УДК 621.372.8.001.24

# ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ УРАВНЕНИЙ ВОЗБУЖДЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

*С. П. Кузнецов*

Рассмотрим задачу о возбуждении электромагнитных полей в периодическом волноводе с идеально проводящими стенками заданным током с плотностью $\vec{j}(\vec{r}, t)$. Будем исходить из уравнений Максвелла

$$\text{rot}\,\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{j},\qquad \text{rot}\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\text{div}\,\vec{B}=0,\quad \text{div}\,\vec{D}=\rho, \tag{1}$$

материальных уравнений $\vec{D}=\varepsilon(x, y, z)\vec{E}$, $\vec{B}=\mu(x, y, z)\vec{H}$, где $\varepsilon$ и $\mu$ – скалярные $d$-периодические функции $x$, и обычных граничных условий (также $d$-периодических) на стенках волновода.

Далее нам понадобится специальная форма дискретного преобразования Фурье функции $\Phi(x)$:

$$\Phi_\beta(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Phi(x+nd)\,e^{i\beta nd}, \tag{2}$$

где $\beta$ – некоторый действительный параметр. Образ $\Phi_\beta(x)$ заведомо существует, если функция $\Phi(x)$ достаточно быстро стремится к нулю при $x\to\pm\infty$. Очевидно,

$$\Phi_\beta(x+d)=\Phi_\beta(x)\,e^{-i\beta d},\qquad \Phi_\beta(x)=\Phi_{\beta+2\pi/d}(x). \tag{3}$$

Интегрируя (2) по $\beta$ в пределах от 0 до $2\pi/d$, получим формулу обратного преобразования

$$\Phi(x)=\frac{d}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/d}\Phi_\beta(x)\,d\beta. \tag{4}$$

Применяя преобразование (2) к уравнениям (1), будем иметь

$$\text{rot}\,\vec{H}_\beta=\frac{\partial\vec{D}_\beta}{\partial t}+\vec{j}_\beta,\qquad \text{rot}\,\vec{E}_\beta=-\frac{\partial\vec{B}_\beta}{\partial t}, \tag{5}$$

$$\text{div}\,\vec{B}_\beta=0,\qquad \text{div}\,\vec{D}_\beta=\rho_\beta, \tag{6}$$

причем материальные уравнения и граничные условия остаются без изменения благодаря периодичности волновода.

Для решения уравнений (5) и (6) построим систему соленоидальных собственных функций $\vec{E}_{s,\beta}(\vec{r})$ (аналогично для других векторов поля), которые удовлетворяют условиям вида

$$\vec{E}_{s,\beta}(x+d, y, z)=\vec{E}_{s,\beta}(x, y, z)\,e^{-i\beta d} \tag{7}$$

внутри волновода, граничным условиям на стенках и уравнениям

$$\text{rot}\,\vec{E}_{s,\beta}+\Omega_s(\beta)\vec{B}_{s,\beta}=0,\qquad \text{rot}\,\vec{H}_{s,\beta}+\Omega_s(\beta)\vec{D}_{s,\beta}=0. \tag{8}$$

При заданном действительном $\beta$ задача (7)–(8) оказывается самосопряженной и имеет дискретный спектр собственных чисел $\Omega_s(\beta)$, которые все являются действительными. Можно показать [1] (подобно тому, как это делается в теории возбуждения резонаторов [2]), что в отсутствие вырождения при соответствующей нормировке собственных функций

$$\int\limits_{V_0}(\vec{D}_{s,\beta}\vec{E}^{\,*}_{p,\beta}+\vec{H}_{s,\beta}\vec{B}^{\,*}_{p,\beta})\,dV=\delta_{s,p}, \tag{9}$$

где $V_0$ – любой объем внутри волновода, ограниченный разнесенными на один период поперечными сечениями. При наличии вырождения собственные функции можно переопределить так, чтобы соотношения (9) остались в силе (ср. [2]).

Будем искать решение (5), (6) в виде

$$\vec{E}_\beta=\sum_s C_{s,\beta}(t)\vec{E}_{s,\beta}(\vec{r})-\text{grad}\,\Phi_\beta,\qquad \vec{H}_\beta=-i\sum_s C_{s,\beta}\vec{H}_{s,\beta}(\vec{r}); \tag{10}$$

на $\Phi_\beta$ наложим условие

(11) $$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \Phi_\beta) = -\rho_\beta.$$

Умножим первое уравнение (5) на $i\vec{H}_p{}^*$, а второе – на $\vec{E}_p{}^*$, сложим их и проинтегрируем результат по объему $V_0$. Член, содержащий $\Phi_\beta$, при этом исчезнет, поскольку $\rho_\beta$ и $\vec{j}_\beta$ связаны уравнением непрерывности. Учитывая соотношение ортогональности (9), получаем следующее уравнение для определения $C_{s,\beta}$:

(12) $$\frac{\partial C_{s,\beta}}{\partial t} - i\Omega_s(\beta)C_{s,\beta} = -\int\limits_{V_0} \vec{j}_\beta \vec{E}^*_{s,\beta} dV = -\int\limits_V \vec{j}\,\vec{E}^*_{s,\beta} dV,$$

где $V$ означает полный объем волновода. Разложим обе части (12) в ряды Фурье по $\beta$:

(13) $$\frac{\partial C_{s,n}}{\partial t} - i\sum_{m=-\infty}^{\infty} \Omega_{s,m} C_{s,n-m} = -\int\limits_V \vec{j}\,\vec{E}^*_{s,n} dV,$$

где

(14) $$C_{s,n} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} C_{s,\beta} e^{-in\beta d} d(\beta d); \quad \Omega_{s,n} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Omega_s(\beta) e^{-in\beta d} d(\beta d);$$
$$\vec{E}_{s,n}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \vec{E}_{s,\beta} e^{in\beta d} d(\beta d) = \vec{E}_{s,0}(x-nd, y, z).$$

Выполняя в (10) преобразование (4), окончательно имеем

(15) $$\vec{E} = \sum_s \Big[\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{s,n}(t)\vec{E}_{s,0}(x-nd, y, z)\Big] - \operatorname{grad}\Phi,$$
$$\vec{H} = -\sum_s \Big[\sum_{n=-\infty}^{\infty} iC_{s,n}(t)\vec{H}_{s,0}(x-nd, y, z)\Big],$$

где коэффициенты $C_{s,n}$ должны определяться из уравнений (13), а $\Phi$ – из уравнения Пуассона

(16) $$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad}\Phi) = -\rho,$$

к которому приводит преобразование (4) соотношения (11). Квазистатическое поле пространственного заряда выделено в (15) в явном виде, как и в теории возбуждения резонаторов [2].

Для выяснения физического смысла величин $C_{s,n}$, $\Omega_{s,n}$, $\vec{E}_{s,n}$ рассмотрим волновод в виде цепочки связанных резонаторов.

Если устремить к нулю размер отверстий связи, то поверхности, на которых должны выполняться условия (7), исчезнут, а собственные частоты $\Omega_s(\beta)$ и функции $\vec{E}_{s,\beta}(\vec{r})$ перестанут зависеть от $\beta$. Тогда Фурье-разложения этих величин по $\beta$ содержат только нулевые члены ($\vec{E}_{s,0}$, $\Omega_{s,0}$), а система (13) превращается в набор несвязанных уравнений возбуждения отдельных резонаторов. Величина $C_{s,n}$ характеризует при этом комплексную амплитуду колебаний $s$-го типа в $n$-м резонаторе.

Слабая связь между резонаторами должна, очевидно, описываться членами в (13), содержащими $C_{s,n\pm1}$ (каждый резонатор связан с ближайшими соседними). В этом приближении, следовательно, можно пренебречь величинами $\Omega_{s,m}$ со всеми номерами, кроме $m=0$ и $\pm1$. При $\Omega_1=\Omega_{-1}$ системе (13) отвечает дисперсионное соотношение $\omega=\Omega_0+2\Omega_1\cos\beta d$, типичное для цепочки слабо связанных резонаторов [3]. При дальнейшем увеличении связи должны стать существенными члены с $m=\pm2$, $\pm3$ и т. д., описывающие связь $n$-го резонатора с $(n\pm2)$-м, $(n\pm3)$-м и т. д.

Далее, принимая во внимание смысл величин $C_{s,n}$, из соотношения (15) можно заключить, что функция $\vec{E}_{s,n}(\vec{r})$ определяет поле, которое имеется в точке $\vec{r}$, если $C_{s,n}=1$, $C_{p,m}=0$ ($p\neq s$ или $m\neq n$). Та же (сопряженная) функция входит в интеграл в правой части (13), т. е. характеризует воздействие источника в точке $\vec{r}$ на $C_{s,n}$.

Итак, ясно, что уравнения (13) и (15) имеют простой вид в тех случаях, когда для анализа возбуждения линии передачи применим так называемый дискретный подход [3]. Поэтому их можно трактовать как электродинамическое обоснование и обобщение этого подхода (в том числе на нестационарные процессы). Рассмотрение, основанное на уравнениях (13) и (15), имеет ряд преимуществ перед используемым обычно методом эквивалентных схем, вообще характерных для последовательного электродинамического подхода [2]. Действительно, если известны дисперсионная характеристика волновода и конфигурация полей в собственной волне при различных $\beta$ (для их расчета можно применять множество методов, изложенных в литературе, см., например, [4]), то уравнения возбуждения определяются полностью и единообразно. Отметим, что даже если в (13) учитывается небольшое число коэффициентов связи $\Omega_{s,n}$, уравнения приближенно описывают свойства волновода в широкой полосе частот в отличие от метода, рассмотренного в [5].

Для замкнутых в кольцо периодических структур, характерных, например, для магнетронов, следует положить $C_{s,n+N}=C_{s,n}$, где $N$ – полное число ячеек *. В случае полностью согласованной нагрузки на концах волновода систему можно считать неограниченно продолженной в обе стороны и, если решается начальная задача, граничные условия не нужны вообще. В остальных случаях строгая постановка граничных условий затруднительна и требует далеко идущей конкретизации задачи. Поэтому разумно привлечь феноменологический подход, опираясь на изложенную выше физическую интерпретацию уравнений (13). Пусть, например, в разложении $\Omega_s(\beta)$ в ряд Фурье учитываются только члены с номерами $-1$, 0, $+1$; волновод ограничен слева ячейкой $n=0$. Тогда, исключая в соответствующей формуле (13) член $C_{s,-1}$ и добавляя в левую часть член вида $\gamma C_{s,0}$, который моделирует активную нагрузку, получим выражение

$$\frac{\partial C_{s,0}}{\partial t} - i\Omega_{s,0}C_{s,0} - i\Omega_{s,1}C_{s,1} + \gamma C_{s,0} = -\int\limits_V \vec{j}\,\vec{E}^{\,*}_{s,0}\,dV, \tag{17}$$

играющее роль граничного условия. Остальные уравнения останутся без изменения; в (15) следует положить $C_{s,n}\equiv 0$ $(n\leqslant -1)$. Аналогично можно рассмотреть случай, когда учитывается большее число коэффициентов $\Omega_{s,m}$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Солнцев, ЖТФ, 1968, 38, 1, 100.
2. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, Изд. Советское радио, 1957; Г. В. Кисунько, Электродинамика полых систем, Изд. ВКАС, 1949; Л. А. Вайнштейн, В. А. Солнцев, Лекции по сверхвысокочастотной электронике, Изд. Советское радио, 1973.
3. Л. В. Булгакова, Д. И. Трубецков, В. Л. Фишер, В. Н. Шевчик, Лекции по электронике СВЧ приборов типа О, Изд. Саратовск. ун-та, 1974.
4. Р. А. Силин, В. П. Сазонов, Замедляющие системы, Изд. Советское радио, 1966.
5. С. П. Кузнецов, Д. И. Трубецков, Две лекции по нестационарной теории взаимодействия электронных пучков с электромагнитными волнами, Лекции по электронике СВЧ (3-я зимняя школа-семинар инженеров), кн. 5, Изд. Саратовск. ун-та, 1974.
6. В. Клеен, Введение в электронику сверхвысоких частот, I, Изд. Советское радио, 1963.

Поступило в редакцию
15 VI 1978