

УДК 621.373

**СЛОЖНАЯ ДИНАМИКА ГЕНЕРАТОРОВ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ  
ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ.**

(Обзор)

С. П. Кузнецов

**СОДЕРЖАНИЕ**

1. Введение. Обобщенная схема генератора с запаздывающей обратной связью
2. Инерционные и нелинейные свойства цепи. Основное уравнение элементарной модели
3. Линейный этап установления колебаний. Разложение по модам
4. Нелинейная стадия переходного процесса
  - 4.1. Динамика амплитуды колебаний генератора
  - 4.2. Динамика фазы колебаний. Фазовый топологический инвариант
5. Классификация автоколебательных режимов
6. История вопроса. Анализ опубликованных работ
  - 6.1. Работы по изучению последовательностей типа  $x_{n+1} = f(x_n)$
  - 6.2. Работы по элементарной модели и другим обобщенным моделям генератора с запаздывающей обратной связью
  - 6.3. О некоторых теоретических работах по конкретным генераторам
  - 6.4. Экспериментальные работы
7. Заключение

**1. ВВЕДЕНИЕ. ОБОБЩЕННАЯ СХЕМА ГЕНЕРАТОРА  
С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ**

Обобщенная схема многих автоколебательных систем различной физической природы содержит усилитель, выходной сигнал которого частично поступает на его вход (рис. 1а). Такое устройство будем классифицировать как генератор с запаздывающей обратной связью, если время прохождения сигнала по замкнутой цепи достаточно велико (точнее — если выполняется приведенное ниже неравенство (1)). Конкретные примеры подобных генераторов изображены схематически на рис. 1в—д.

В ЛБВ-генераторе [1, 2] (рис. 1в) усиление электромагнитной волны осуществляется благодаря ее взаимодействию с электронным пучком; в области взаимодействия фазовая скорость волны близка к скорости пучка. Обратная связь реализуется либо путем создания отражений волны на концах области взаимодействия, либо с помощью специальной внешней цепи.

Генератор с акустической обратной связью [5] содержит усилитель звуковых частот, ко входу которого подключен микрофон М, а к выходу — громкоговоритель Гр, установленные на некотором расстоянии  $l$  друг от друга (рис. 1в); время запаздывания есть  $l/v_{зв}$ , где  $v_{зв}$  — скорость звука. Аналогичное по сути дела устройство может быть реализовано в СВЧ диапазоне при использовании твердотельной акустической линии задержки в качестве одного из элементов цепи обратной связи.

Нелинейно-оптическая система, описанная в [32], представляет собой кольцевой резонатор, образованный зеркалами 1, 2 и полупрозрачным зеркалом 3 (рис. 1д). В резонатор помещен образец с нелинейными оптическими свойствами. Возбуждение осуществляется внешним

источником когерентного излучения. Последнее отличает данную систему от предыдущих, однако динамика амплитуды сигнала, циркулирующего по петле обратной связи в этом устройстве и в автономном генераторе аналогична.

Генераторы с запаздывающей обратной связью исследуются уже давно, и основополагающие работы, относящиеся к некоторым механическим и радиотехническим системам [4, 5, 6, 10], появились еще в 30—50-е годы. Представляется, однако, что именно сейчас изучение различных колебательных явлений в генераторах с запаздывающей обратной связью наиболее актуально. Это обусловлено, во-первых, тем, что классические работы были выполнены до того, как в 60—70-е годы сформировались современные представления о динамике распределенных автоколебательных систем и, в частности, была установлена возможность и выяснены закономерности возникновения стохастического поведения динамических систем [21—26]. Во-вторых, начиная с 50-х годов появилось множество новых типов генераторов с запаздывающей обратной связью; стали более четко выявляться их типичные особенности. В-третьих, в настоящее время широкое внимание привлечено к вопросам динамики конкретных генераторов данного класса. Об этом свидетельствует появление целого ряда работ, посвященных анализу нестационарных процессов в системах квантовой, релятивистской и традиционной сверхвысокочастотной электроники [2, 3, 15—20, 27—32].

Как известно из литературы [4—20, 29—32], в зависимости от параметров и от начальных условий в генераторах с запаздывающей обратной связью могут реализоваться различные по характеру автоколебательные режимы — квазигармонические, автомодуляционные, стохастические. Очевидной потребностью является систематизация имеющихся результатов, выделение общих и частных (характерных для конкретных генераторов) особенностей поведения. В настоящий момент, однако, решить эту задачу в полном объеме еще не представляется возможным. Поэтому цель данного обзора является более ограниченной и состоит в изложении тех закономерностей динамики генераторов с запаздывающей обратной связью, которые могут быть поняты на основании модели такого генератора в виде замкнутой в кольцо цепочки из безынерционного нелинейного усилителя и линии задержки [4, 5, 14]. Эта элементарная модель допускает далеко идущий теоретический анализ, охватываемый ею класс генераторов шире, чем у более сложных моделей. Однако, как правило, элементарной модели можно доверять лишь при изучении определенной стадии переходного процесса для ограниченного класса начальных условий; выводы о характере установившегося режима колебаний на ее основании следует делать с большой осторожностью. Тем не менее, информация, даваемая элементарной моделью, сама по себе обширна и полезна в качестве исходного пункта для дальнейшего исследования. В связи с этим большое внимание будет уделено критическому обсуждению исходных принципов и условий применимости элементарной модели.

Наряду с обзором идей и представлений, сложившихся к настоящему времени в результате работ разных авторов [4—10, 29—32], статья содержит ряд оригинальных результатов. Из-за разнородности опубликованного в литературе материала ссылки сделаны за редким исключением не по ходу изложения, а вынесены в специальный раздел. В разд. 2 и п. 4.1 частично использованы материалы статьи автора и Н. С. Гинзбурга, публикуемой в сборнике «Релятивистская высокочастотная электроника».

## **2. ИНЕРЦИОННЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ СВОЙСТВА ЦЕПИ. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МОДЕЛИ**

Пусть  $x(t)$  и  $y(t)$  — функции, описывающие соответственно входной и выходной сигнал разомкнутой системы (рис. 1б). В зависимости от

конкретной природы рассматриваемого устройства,  $x(t)$  и  $y(t)$  могут характеризовать изменение во времени электрического напряжения, механического смещения или какой-либо другой физической величины.

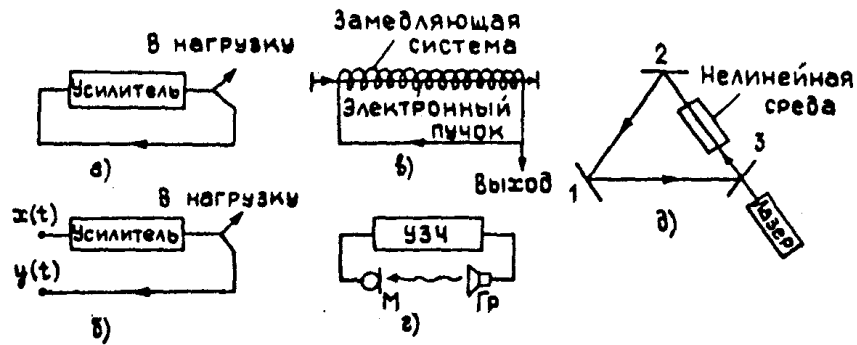


Рис. 1.

Если на вход системы подать короткий импульс, то выходной сигнал будет иметь примерно такой вид, как показано на рис. 2. Из рисунка ясен смысл двух интервалов времени, играющих основную роль в данной задаче: импульс на выходе появляется с запаздыванием  $T$  и имеет длительность  $\tau$ . Пусть теперь входной сигнал есть произвольная функция времени  $x(t)$ . Тогда сигнал на выходе в момент  $t_1$  определяется поведением функции  $x(t)$  в окрестности точки  $t_1 - T$  шириной порядка  $\tau$ . Таким образом, величина  $\tau$  представляет собой временной масштаб, характеризующий нелокальность связи входного и выходного сигналов. Заметим, что эта величина и ширина полосы частот, пропускаемых системой, подчиняются известному соотношению неопределенностей  $\tau \Delta \omega \geq 2\pi$ . В дальнейшем считается выполненным условие

$$T \gg \tau, \quad (1)$$

при котором запаздывание является существенным. Будем предполагать также, что центральная частота полосы пропускания системы  $\omega_0$  по порядку величины больше или равна  $\tau^{-1}$ . В этом случае вместо  $x(t)$  и  $y(t)$  целесообразно ввести комплексные амплитуды  $z(t)$  и  $w(t)$  так, что  $x(t) = \text{Re}[z(t)e^{i\omega_0 t}]$ ,  $y(t) = \text{Re}[w(t)e^{i\omega_0 t}]$ .

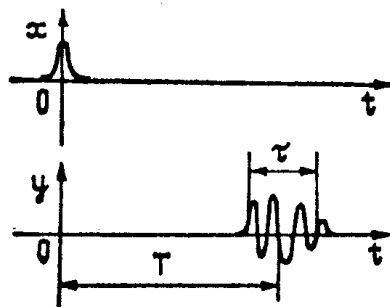


Рис. 2.

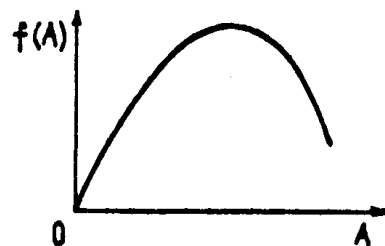


Рис. 3.

Если комплексные амплитуды входного и выходного сигналов медленно меняются в масштабе времени  $\tau$ , то их значения в моменты времени соответственно  $t - T$  и  $t$  связаны алгебраически. Это соотношение должно сохранять свою форму при постоянном сдвиге фаз, т. е. при замене  $z \rightarrow ze^{i\alpha}$ ,  $w \rightarrow we^{i\alpha}$ . Поэтому оно имеет вид

$$w(t) = [G(|z|)z]_{t-T}, \quad (2)$$

где  $G(|z|)$  — коэффициент усиления разомкнутой системы на частоте  $\omega_0$ .

Чтобы получить основное уравнение элементарной модели генератора с запаздывающей обратной связью, заметим, что для замкнутой в кольцо системы следует положить комплексные амплитуды входного и выходного сигналов равными:  $z(t) = w(t)$ . Тогда из (2) будем иметь

$$z(t) = [G(|z|)z]_{t-\tau}. \quad (3)$$

Уравнение (3) отвечает представлению генератора в виде модели — замкнутой цепочки, состоящей из активного элемента — безынерционного преобразователя амплитуды и линии задержки. Нелинейные свойства активного элемента характеризуются функцией  $f(A) = A |G(A)|$ , типичный вид которой показан на рис. 3. (Системы, для которых вид зависимости  $f(A)$  качественно иной, мы не рассматриваем.) Подчеркнем, что в уравнении (3) не фигурирует временной масштаб  $\tau$ , т. е. в элементарной модели не заложена нелокальность связи между входом и выходом цепочки. Учет нелокальности означал бы, что активному элементу приписываются инерционные свойства, характеризующиеся временем  $\tau$ .

В качестве начального условия для уравнения (3) необходимо задать функцию  $z(t)$  на начальном отрезке времени длины  $T$ , т. е.

$$z(t)|_{0 < t < T} = z^0(t). \quad (4)$$

Действительно, это позволяет решить уравнение однозначно. Подставив (4) в правую часть (3), можно найти  $z(t)$  при  $T \leq t < 2T$ . Используя результат в качестве нового начального условия, аналогичным образом определим  $z(t)$  при  $2T \leq t < 3T$  и т. д. Для обеспечения непрерывности решения в точках  $t = nT$  потребуем, чтобы  $\lim_{t \rightarrow T} z^0(t) = G(|z^0(0)|)z^0(0)$ .

В силу предположения, сделанного при выводе уравнения (3), допустимо задание в качестве начальных только таких функций  $z^0(t)$ , которые мало меняются за время порядка  $\tau$ . Однако даже при выполнении этого условия динамика системы, как правило, ведет к появлению возмущений генерируемого сигнала с малым временным масштабом. Это может произойти, во-первых, если инерционные свойства активного элемента способствуют раскачке возмущений с характерным периодом  $\tau$  и, во-вторых, благодаря постепенному уменьшению характерного временного масштаба сигнала  $t_{\text{хар}}$  в силу собственной динамики элементарной модели (см. ниже). В обоих случаях описание в рамках элементарной модели будет справедливым, строго говоря, лишь в течение ограниченного времени. Тем не менее, правильные качественные выводы о характере установившегося режима автоколебаний могут быть сделаны на основании элементарной модели, если инерционные свойства активного элемента способствуют сглаживанию мелко-масштабных возмущений комплексной амплитуды генерируемого сигнала. В частности, это справедливо, если активный элемент может быть представлен в виде цепочки безынерционный преобразователь амплитуды — полосовой фильтр. (Т. е. если в цепь обратной связи введен полосовой фильтр, время отклика которого  $\tau$  существенно превышает величину, характеризующую инерционные свойства усилителя, но удовлетворяет условию (1).) Такой генератор описывается уравнением

$$z(t+T) = G(|\hat{L}z(t)|)\hat{L}z(t), \quad (5)$$

где  $\hat{L}$  — линейный оператор фильтра с передаточной характеристикой вида  $L(\omega) = (e^{-i\omega t}\hat{L}e^{i\omega t}) = 1 - \omega^2\tau^2 + O(\omega^2\tau^2)$  (здесь  $\omega$  — отстройка частоты сигнала от центральной  $\omega_0$ ). Модель (5) допускает экспериментальную реализацию [13] и поэтому представляет самостоятельный интерес.

### 3. ЛИНЕЙНЫЙ ЭТАП УСТАНОВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО МОДАМ

При малом уровне амплитуды колебаний можно использовать линейризованное уравнение (3):

$$z(t) = G(0)z(t-T). \quad (6)$$

Если искать решение (6) в виде  $z(t) \sim e^{\delta t}$ , то получим характеристическое уравнение

$$e^{\delta T} = G(0), \quad (7)$$

корни которого определяют комплексные собственные частоты мод системы ( $\omega_m = \omega_0 - i\delta_m$ ):

$$\delta_m = (1/T)[\ln g + i\gamma + 2\pi im]. \quad (8)$$

Здесь  $g = |G(0)|$ ,  $\gamma = \arg G(0)$ , индекс  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  нумерует моды. Как видно из (8), все моды затухают при  $g < 1$  и нарастают при  $g > 1$  с одинаковым инкрементом. Собственные частоты мод образуют эквидистантный спектр с межмодовым расстоянием  $2\pi/T$ .

Как можно убедиться непосредственной подстановкой в (6), если  $z(t)$  — решение (6), то функция  $Z(t) = z(t)e^{-t/T(\ln g + i\gamma)}$  является периодической с периодом  $T$ . Разложив ее в ряд Фурье, получим для  $z(t)$  следующее представление:

$$z(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{\delta_m t}, \quad (9)$$

где

$$C_m = \frac{1}{T} \int_0^T z(t) e^{-\delta_m t} dt \equiv \frac{1}{T} \int_0^T z^0(t) e^{-\delta_m t} dt.$$

Формула (9) реализует разложение решения (6) с начальным условием (4) по собственным модам.

Тот факт, что бесконечно большое число мод имеет одинаковый инкремент, является специфическим для элементарной модели. Если же принять во внимание инерционные свойства активного элемента, то коэффициент передачи  $G$  становится функцией частоты, а инкременты — зависящими от номера моды. Число мод, попадающих в полосу усиленных частот и являющихся поэтому нарастающими, можно оценить по формуле  $N_0 \sim \Delta \omega T \sim T/\tau$ . Очевидно, наибольшими инкрементами обладают моды с малыми номерами, собственные частоты которых близки к центральной частоте полосы пропускания системы  $\omega_0$ . При достаточно низком начальном уровне сигнала (например, при установлении от шумов) эти моды успеют выделиться среди прочих до окончания линейной стадии переходного процесса. В таком случае элементарная модель годится, по крайней мере, для описания начального этапа нелинейной стадии установления колебаний\*.

#### 4. НЕЛИНЕЙНАЯ СТАДИЯ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

Свойства уравнения (3) позволяют исследовать динамику амплитуды колебаний независимо от анализа фазовых соотношений. Действительно, подставляя в (3)  $z(t) = A(t)e^{i\varphi(t)}$  и вычисляя модуль и аргумент от обеих частей, будем иметь

$$A(t) = f(A(t-T)); \quad (10)$$

$$\{\varphi(t)\} = \{\varphi(t-T) + \arg G(A(t-T))\}, \quad (11)$$

где для главного значения фазы, отнесенного к интервалу  $[0, 2\pi)$ , использован символ  $\{\varphi(t)\}$ . Начальные условия для амплитуды и фазы очевидны из (4):

$$A(t)|_{0 < t < T} = |z^0(t)|; \quad (12)$$

\* Как видно из (9), сигнал в виде суперпозиции мод с малыми номерами имеет медленно меняющуюся комплексную амплитуду.

$$\varphi(t)|_{0 < t < T} = \arg z^0(t). \quad (13)$$

Пусть  $t_0$  — произвольная точка начального отрезка,  $A_0 = A(t_0)$  и  $\varphi_0 = \varphi(t_0)$  — соответствующие ей значения амплитуды и фазы. Тогда из (10) находим последовательность чисел  $A_n$ :

$$A_1 = f(A_0), A_2 = f(A_1), A_3 = f(A_2), \dots, \quad (14)$$

представляющих собой значения амплитуды в моменты времени  $t_1 = t_0 + T, t_2 = t_0 + 2T, t_3 = t_0 + 3T, \dots$ . Затем с помощью (11) определяем аналогичную последовательность значений фазы

$$\begin{aligned} \{\varphi_1\} &= \{\varphi_0 + \arg G(A_0)\}, \\ \{\varphi_2\} &= \{\varphi_1 + \arg G(A_1)\}, \dots \end{aligned} \quad (15)$$

Выбирая в качестве исходных другие точки начального отрезка  $t'_0, t''_0, \dots$  и повторяя описанное построение, можно полностью восстановить зависимость амплитуды и фазы сигнала от времени (рис. 4). Вся процедура легко выполняется графически или с помощью микрокалькулятора.

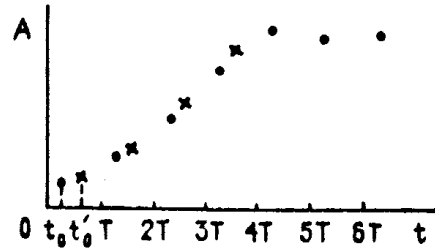


Рис. 4.

**4.1. Динамика амплитуды колебаний генератора.** Аппроксимируем функцию  $f(A)$  первыми членами ряда Тейлора:  $f(A) = gA - hA^3$ . Тогда заменой  $A \rightarrow \sqrt{g/h}A$  уравнение (10) преобразуется к виду

$$A(t) = g[A(t-T) - A^3(t-T)]. \quad (16)$$

Все конкретные результаты далее будут приведены для модели (16). Иное задание функции  $f(A)$ , вид которой соответствует рис. 3, приводит только к некоторому изменению числовых констант.

Таблица 1

**Бифуркационные значения параметра**

$$g_0 = 1, g_1 = 2, g_2 = 2,2^{\cdot}607, g_3 = 2,2^{\cdot}803, g_4 = 2,29923 \dots$$

Интервал $g$	$g < g_0$	$g_0 < g < g_1$	$g_1 < g < g_2$	$g_2 < g < g_3$	$g_3 < g < g_4$	
Режимы, реализующиеся почти для всех значений начального члена $A_0$ (устойчивые)	$A_n \equiv 0$	Постоянная амплитуда $A_n \equiv A(g)$	2-тактный цикл $A_{n+2} = A_n$	4-тактный цикл $A_{n+4} = A_n$	8-тактный цикл $A_{n+8} = A_n$	...
Символическое обозначение	0	C	2T	4T	8T	
Режимы, реализующиеся для некоторых дискретных значений $A_0$ (неустойчивые)		0	C 0	2T C 0	4T 2T C 0	

Обсудим сначала свойства дискретных последовательностей (14):  $A_{n+1} = g(A_n - A_n^3)$ . Как оказывается, асимптотическое поведение  $A_n$  при больших  $n$  усложняется с ростом параметра  $g$  (табл. 1). На рис. 5 приведены диаграммы Ламерея, соответствующие различным типам асимптотического поведения  $A_n$ ; принцип их построения очевиден из рисунка. На рис. 6 показаны зависимости значений, пробегаемых амплитудой в асимптотических режимах, от параметра  $g$ . Устойчивые режимы выделены жирными линиями.

Согласно Фейгенбауму [24], последовательность бифуркационных значений параметра  $g$ , при которых происходит удвоение периода устойчивых режимов, бесконечна и сходится к пределу  $g_{пр}$  по закону  $g_n = g_{пр} - c(4,66920)^{-n}$ , универсальному для всех функций  $f(A)$  с квадратичным максимумом. Для модели (16) константы  $g_{пр}$  и  $c$  равны соответственно 2,30228 и 1,45079.

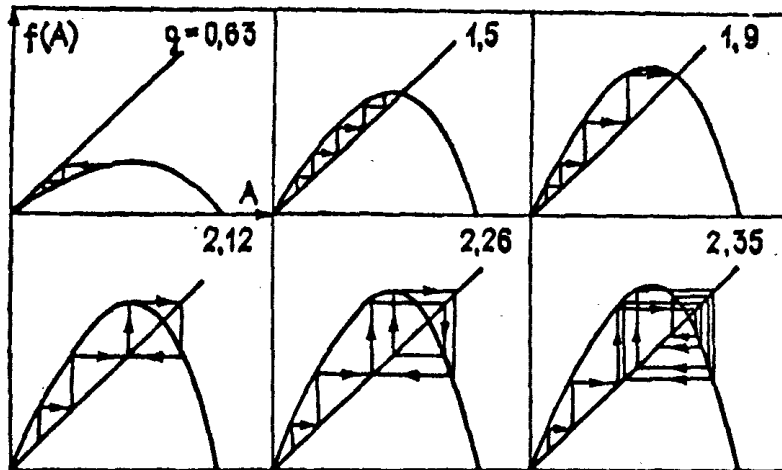


Рис. 5.

При  $g > g_{пр}$  последовательность  $A_n$  демонстрирует стохастическое поведение [15, 23-25]\*. Она является непериодической, обладает при больших  $n$  свойствами стационарной случайной последовательности и неустойчива относительно малых возмущений. Последнее означает, что небольшое возмущение начального значения  $A_0$  влечет за собой экспоненциально нарастающее с номером изменение остальных членов последовательности.

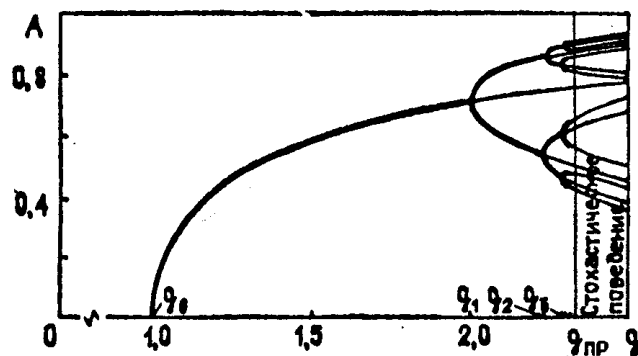


Рис. 6.

Используем изложенные результаты для решения уравнения (16), т. е. перейдем от дискретной переменной  $n$  к непрерывному времени  $t$ . Предположим сначала, что амплитуда сигнала на отрезке  $[0, T]$  задана в виде

$$A(t) |_{0 < t < T} = \text{const} e^{i(\omega t + \varphi)}, \quad \text{const} \ll 1. \quad (17)$$

Такие начальные условия отвечают наличию одной моды, «выжившей» к концу линейной стадии переходного процесса. Реализующиеся при

\* В области  $g > g_{пр}$  существуют очень узкие зоны значений  $g$ , в которых возможны устойчивые периодические режимы с периодами  $3T$ ,  $5T$  и т. д. [15-25].

этом зависимости амплитуды от времени для различных значений параметра  $g$  показаны на рис. 7. Напомним, что качественно верные выводы о характере установившегося режима могут быть сделаны (да и то с оговорками, см. ниже) лишь при определенных ограничениях на инерционные свойства активного элемента, в частности, для генератора с фильтром в цепи обратной связи (модель (5)).

Как видно из рисунка, при  $g < g_0$  (затухание колебаний) и  $g_0 < g < g_1$  (установление режима с постоянной амплитудой) в течение всего переходного процесса амплитуда меняется плавно (рис. 7а, б), т. е. элементарная модель применима на всем его протяжении.

При  $g_1 < g < g_2$  устанавливается режим автомодуляции с периодом  $2T$ . При этом образуются локализованные области, внутри которых крутизна изменения амплитуды нарастает от цикла к циклу; в пределе  $t \rightarrow \infty$  форма модуляции становится прямоугольной (рис. 7в). В генераторе, описываемом уравнением (5), процесс уменьшения характерного временного масштаба в локализованных областях прекратится ввиду инерционных свойств фильтра, когда ширина участков быстрого изменения амплитуды сравняется по порядку величины с  $\tau$ . В этом случае элементарная модель правильно передает характер автомодуляционного режима и не описывает только структуру участков быстрого изменения амплитуды.

В соответствии с результатами анализа последовательностей  $A_n$  в интервале значений параметра  $g_2 < g < g_{пр}$  следует ожидать возникновения автомодуляционных режимов с периодом  $2^n T$ ,  $n \geq 2$ . Однако как видно из рис. 7г, д, в этих случаях на отрезке времени длины  $T$  является уже не один разрыв, а бесконечное (дискретное) множество точек разрыва функции  $A(t)$ \*. Естественно, элементарная модель перестает быть верной при больших  $t$ , по крайней мере, на множестве, являющемся объединением  $\tau$ -окрестностей точек разрыва. При приближении параметра  $g$  к  $g_{пр}$  это множество занимает все большую часть периода автомодуляции. Тем не менее, как показано в работе автора [34], вывод о существовании автомодуляционных режимов с периодом  $2^n T$  для модели (5) является верным; влияние инерционных свойств фильтра, разумеется, предотвращает формирование разрывов и приводит, кроме того, к смещению бифуркационных значений параметра  $g_n$  для  $n \geq 2 \log_2(\tau/T)$  и предельной точки  $g_{пр}$ .

При  $g > g_{пр}$  следует ожидать появления режима стохастических автоколебаний, стационарного в статистическом смысле и характеризующегося сплошным спектром выходного сигнала, — такой режим действительно наблюдался в реальных генераторах [15, 17, 20]. Он, однако, не может быть корректно описан в рамках элементарной модели. Действительно, пусть  $t_1$  и  $t_2 = t_1 + \epsilon$  — две точки начального отрезка време-

\* Пусть при данном значении параметра  $g$  существует устойчивый 4-цикл отображения  $f(A)$ :  $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_1$ . Как видно из диаграммы на рис. 5,  $A_1 > A_3 > A_2 > A_4$ . Выделим участок функции  $A(t)$ , на котором она непрерывна и монотонна и принимает последовательно значения  $A_1, A_3, A_2$ . Посмотрим, как преобразуется этот участок «перепад»  $A_1 A_3 A_2$  под действием отображения  $f(A)$ . Поскольку  $A_1 \rightarrow A_2, A_3 \rightarrow A_4, A_2 \rightarrow A_3$ , а где-то между точками  $A_4$  и  $A_3$  функция  $A(t)$  обязательно принимает значение  $A_2$ , запишем результат как  $A_2 A_4 A_2 A_3$ . Проведем это преобразование четырежды, обозначая применение отображения  $f(A)$  горизонтальными стрелками, а добавление «промежуточных» точек — вертикальными. В результате будем иметь:

$$\begin{array}{ccccc} A_1 A_3 A_2 \rightarrow A_2 A_4 A_3 & A_3 A_1 A_3 A_2 A_4 \rightarrow A_4 A_2 A_4 A_3 A_1 & A_1 A_3 A_1 A_3 A_2 A_4 A_2 & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ A_2 A_4 A_2 A_3 \rightarrow A_3 A_1 A_3 A_4 & A_4 A_2 A_4 A_2 A_3 A_1 \rightarrow A_1 A_3 A_1 A_3 A_4 A_2 & & & \end{array}$$

При многократном выполнении описанной процедуры перепад  $A_1 A_3 A_2$  будет сохраняться, а слева от него каждый раз будут возникать по две пары новых перепадов  $A_1 A_3, A_3 A_1$  и  $A_2 A_4, A_4 A_2$ . При  $t \rightarrow \infty$  из каждого такого перепада сформируется разрыв функции  $A(t)$ .



ны, причем  $\Delta = |A(t_1) - A(t_2)| \neq 0$ . Из-за присущей стохастическому режиму неустойчивости через некоторое число циклов  $M$  обязательно будем иметь  $|A(t_1 + MT) - A(t_2 + MT)| \geq C$ , где  $C$  — число, зависящее от  $(g - g_{\text{пр}})$ . Вообще говоря, чем меньше  $\epsilon$ , тем меньше  $\Delta$  и тем больше  $M$ ! Следовательно, при  $t \sim MT$  характерный для сигнала временной масштаб  $t_{\text{хар}}$  не превышает  $\epsilon$ . Проводя это рассуждение для все меньших и меньших  $\epsilon$ , убеждаемся, что величина  $t_{\text{хар}}$  должна неограниченно уменьшаться с течением времени, а установившийся в статистическом смысле колебательный режим вообще отсутствует. Из рис. 7е видно, что это действительно так. В реальном генераторе процесс «дробления масштаба» прекратится, когда  $t_{\text{хар}}$  будет порядка  $\tau$ . В отличие от установления периодических режимов дробление масштаба носит не локальный, а глобальный характер, и поэтому элементарная модель заведомо непригодна для асимптотического режима.

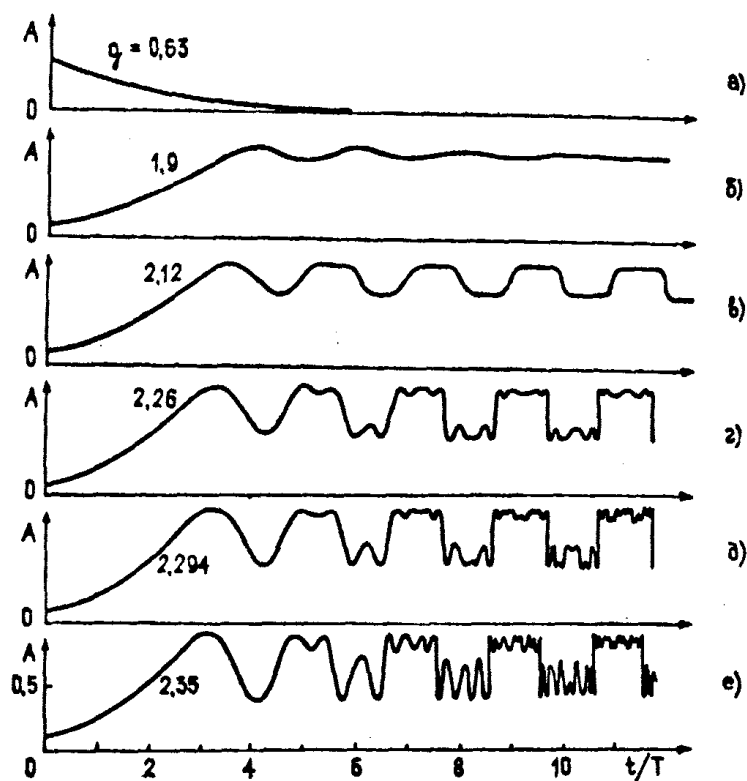


Рис. 7.

Посмотрим теперь, что можно сказать о характере переходного процесса, если вид начальной функции отличается от (17). Очевидно, релаксация к невозбужденному состоянию для  $g < g_0$  и установление режима с постоянной амплитудой для  $g_0 < g < g_1$  наблюдаются при любых начальных условиях, поскольку в этих случаях последовательность (14) стремится к определенному пределу  $A(g)$ , не зависящему от того, какая точка начального отрезка  $l_0$  взята за исходную при построении последовательности. Остальные изложенные качественные результаты остаются в силе для любой монотонно нарастающей начальной функции  $A^0(t) \ll 1^*$ .

\* Рассмотрим какое-нибудь решение уравнения (10)  $A(t)$  и положим  $B(t) = A(t + \theta(t))$ . Здесь  $\theta(t)$  — некоторая  $T$ -периодическая функция, причем  $|\theta'(t)| < 1$ , что обеспечивает взаимную однозначность сделанной замены переменной. Как можно убедиться прямой подстановкой, функция  $B(t)$  также является решением уравнения (10), но с другим начальным условием. Сделанное в тексте утверждение основано на том, что любую монотонную начальную функцию  $A^0(t) \ll 1$  можно таким способом преобразовать к виду (17).

Немонотонность начальной функции может привести к изменению характера автомодуляционных режимов. Проиллюстрируем это для наиболее простого автомодуляционного режима с периодом  $2T$  (интервал значений параметра  $g_1 < g < g_2$ ). Введем в рассмотрение последовательность  $a_0, a_{-1}, a_{-2}, \dots$ , где  $a_0$  определяется из уравнения  $a_0 = f(a_0)$ , а остальные члены — из уравнений вида  $a_k = f(a_{k-1})$  (рис. 8а). Нанесем на график зависимости  $A = A(t)$  горизонтальные линии  $A = a_k$  (рис. 8б). Если кривая  $A = A(t)$  пересекает одну из них при  $t = t_0$ , то при  $t = t_n = t_0 + nT$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) тоже будут расположены точки ее пересечения с линиями  $a_k$ . Для больших  $n$  числа  $t_n$  определяют координаты точек разрыва функции  $A(t)$ . Монотонная начальная функция дает ровно одну точку пересечения на начальном отрезке; следовательно, в установившемся режиме на отрезок длины  $T$  будет приходиться один разрыв. Если же кривая  $A = A(t)$  имеет на начальном отрезке  $s > 1$  точек пересечения с системой линий  $a_k$ , то возникает иной режим автомодуляции. Его период по-прежнему равен  $2T$ , а число скачков, происходящих на период, составляет  $2s$  (рис. 8б). Вопрос об устойчивости таких режимов не может быть вполне выяснен в рамках элементарной модели. Укажем лишь, что характер устойчивости должен быть близок к нейтральному, поскольку небольшая вариация начальных условий может изменить относительное расположение участков быстрого изменения амплитуды. Можно предположить, что в реальном генераторе эти участки способны перемещаться друг относительно друга за счет микрофлуктуаций. При случайном сближении двух таких участков на расстояние порядка  $\tau$  генератор мог бы самопроизвольно переходить в безусловно устойчивый режим рис. 7в.

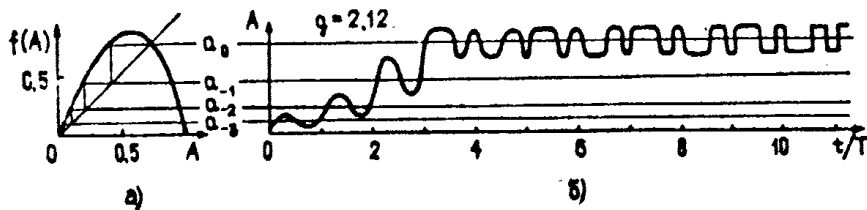


Рис. 8

**4.2. Динамика фазы колебаний. Фазовый топологический инвариант.** Для простоты предположим сначала, что коэффициент передачи системы  $G(A)$  является вещественным, т. е.  $\arg G(A) \equiv 0$ . Как видно из уравнения (11), в этом случае зависимость фазы колебаний от времени на любом отрезке  $[MT, (M+1)T]$  такая же, как и на начальном

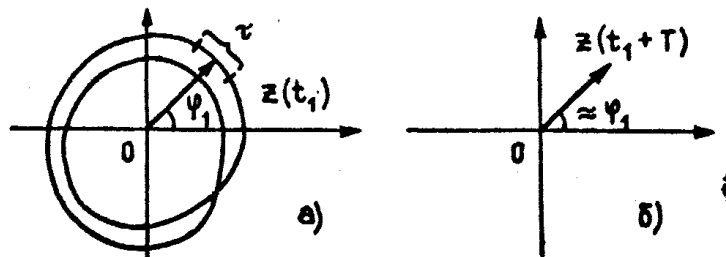


Рис. 9.

отрезке  $[0, T]$  (с точностью до слагаемого, кратного  $2\pi$ ). Поэтому даже в режиме, который является установившимся с точки зрения поведения амплитуды сигнала, в течение неограниченного времени сохраняется остаточная фазовая модуляция, определяемая начальным условием (13).

Этот результат, полученный в рамках элементарной модели, нуждается в пересмотре, если речь идет о реальном генераторе. Действительно, благодаря нелокальности связи входа и выхода усиливающей цепи фазовая модуляция должна эволюционировать. Проанализируем этот процесс качественно.

Прежде всего отметим, что эволюция фазовой модуляции протекает (по крайней мере, пока ее глубина не очень велика) с сохранением целочисленной величины

$$m = [\varphi(t + T) - \varphi(t)]/2\pi, \quad (18)$$

представляющей собой топологический инвариант. Чтобы показать это, рассмотрим кривую, описываемую в комплексной плоскости  $z$  концом изображающего вектора  $z(t) = Ae^{i\varphi}$  при изменении времени  $t$  (рис. 9). Выделим участок этой кривой, соответствующий окрестности некоторой точки  $t_1$  шириной порядка величины  $\tau$ , введенной в разд. 2. Если изменение фазы сигнала за время  $\tau$  мало, то фаза в момент  $t_1 + T$ , отнесенная к интервалу  $[0, 2\pi)$ , будет близка к  $\{\varphi(t_1)\}$  даже при учете инерционных свойств активного элемента. По мере изменения  $t_1$  от  $t$  до  $t + T$  концы вектора  $z(t_1)$  на рис. 9а и вектора  $z(t_1 + T)$  на рис. 9б совершат одно и то же число оборотов вокруг начала координат  $m$ , т. е.  $m$  в самом деле сохраняется.

Проведенное рассуждение существенно опирается на два предположения. Во-первых, амплитуда сигнала на рассматриваемом отрезке времени не должна обращаться в нуль. Все режимы, описанные в п. 4.1, удовлетворяют этому условию (за исключением неустойчивого при  $g > 1$  режима  $A \equiv 0$ ). Поэтому каждому выделенному типу асимптотического поведения амплитуды соответствует целый набор установившихся режимов, отличающихся значениями фазового инварианта  $m$ . В каждом таком режиме фаза колебаний меняется во времени по линейному закону\*  $\varphi(t) = (2\pi m/T)t + \text{const}$ . При этом центральная частота спектра генерируемого сигнала составляет  $\omega = \omega_0 + 2\pi m/T$ . Во-вторых, изменение фазы за время  $\tau$  считалось малым, т. е.  $|2\pi m\tau/T| \ll 2\pi$ ,  $|m| \ll T/\tau$ . Таким образом, число режимов, устойчивых по приведенным топологическим соображениям, ограничено и имеет тот же порядок величины, что и число нарастающих мод линейной теории.

Если на линейной стадии переходного процесса возбуждена одна мода, то значение фазового инварианта, в том числе, конечно, и в развитем нелинейном режиме, определяется ее индексом. Если же начальная функция задана в виде суперпозиции мод, то, найдя фазовый инвариант на начальном отрезке, можно предсказать «победу» соответствующей частотной составляющей на нелинейном этапе процесса.

Оценим характерное время фазовой релаксации  $t_\varphi$ . Пусть для определенности  $g_0 < g < g_1$ , амплитуда сигнала приблизительно постоянна, а фаза медленно меняется в масштабе времени  $\tau$ . С учетом поправки, обусловленной инерционными свойствами активного элемента, уравнение (11) будет иметь вид

$$\{\varphi(t + T)\} = \{\varphi(t) + \hat{l}\varphi\}, \quad (19)$$

где  $\hat{l}$  — некоторый линейный оператор. (Действительно, вклад в правую часть уравнения могут давать только значения фазы из интервала времени шириной порядка  $\tau$ , которые по сделанному предположению близки между собой:  $\Delta\varphi \sim \varphi\tau \ll 2\pi$ . Поэтому мы можем учитывать только линейную по  $\varphi$  часть добавки.) Введем запись  $\varphi(t) = \varphi(n, \xi)$ , где  $n$  —

\* Линейный закон изменения фазы возникает естественным образом в результате сглаживания возмущений при наложенном ограничении (18). Дополнительным аргументом в пользу этого утверждения является его соответствие с приведенным далее уравнением (20).

целая часть числа  $t/T$  (номер такта), а  $\xi = t - nT$ . От уравнения (19), являющегося разностным по переменной  $n$ , перейдем к дифференциальному:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \hat{l}_\varphi \approx l_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + l_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}, \quad (20)$$

где оставлены два первых члена разложения  $\hat{l}$  в ряд по степеням оператора  $\partial/\partial \xi$ . Коэффициенты  $l_1$  и  $l_2$  связаны с инерционными свойствами активного элемента и имеют размерность соответственно  $[t]$  и  $[t^2]$ . Поэтому естественно предположить, что по порядку величины они составляют  $l_1 \sim \tau$ ,  $l_2 \sim \tau^2$ . Согласно (18), на  $\varphi$  следует наложить дополнительное условие  $\varphi(n, \xi + T) - \varphi(n, \xi) = 2\pi m$ . Подставив в (20)  $\varphi = (2\pi m/T)\xi + \tilde{\varphi}$  и полагая  $\tilde{\varphi} \sim e^{i\omega\xi + \Delta n}$ , получим  $\text{Re } \Delta = -l_2\omega^2$ .

Если  $l_2 > 0$ , то возмущения фазы  $\tilde{\varphi}$  длительностью порядка  $1/\omega$  исчезают за число тактов  $n \sim 1/l_2\omega^2 \sim 1/\tau^2\omega^2$ . Для наиболее долгоживущих возмущений величина  $\omega$  имеет порядок  $1/T$ , т. е. время их сглаживания занимает  $n \sim T^2/\tau^2$  тактов и составляет

$$t_\varphi \sim T^3/\tau^2. \quad (21)$$

Очевидно, порядок величины  $t_\varphi$  останется тем же и при установлении автомодуляционных режимов.

Случай  $l_2 > 0$  реализуется, например, в генераторах с полосовым фильтром в цепи обратной связи в тех режимах, которым соответствуют не слишком большие значения фазового инварианта  $((2\pi m \tau/T)^2 \ll \ll 1)$ . Действительно, подставим в (5)  $z = A(1 + a(t))e^{i(\Omega t + \varphi(t))}$ , где  $A = \text{const}$ ,  $G(A) = 1$ ,  $\tilde{\varphi} \ll 1$ ,  $\tilde{a} \ll 1$ ,  $\Omega = 2\pi m/T$ . Тогда будем иметь

$$\tilde{a}(t + T) + i\tilde{\varphi}(t + T) = \hat{L} [f'(A)\tilde{a}(t) + i\tilde{\varphi}(t)], \quad \hat{L} = \frac{e^{-i\Omega t} \hat{L} e^{i\Omega t}}{L(\Omega)}$$

или

$$\begin{aligned} \tilde{a}(t + T) &= \frac{\hat{L} + \hat{L}^*}{2} f'(A)\tilde{a}(t) - \frac{\hat{L} - \hat{L}^*}{2i} \tilde{\varphi}(t), \\ \tilde{\varphi}(t + T) &= \frac{\hat{L} - \hat{L}^*}{2i} f'(A)\tilde{a}(t) + \frac{\hat{L} + \hat{L}^*}{2} \tilde{\varphi}(t). \end{aligned}$$

Считая, что изменение  $\tilde{a}$  и  $\tilde{\varphi}$  за время  $T$  мало, и вводя, как и раньше, переменные  $n$  и  $\xi^*$ , получим:

$$\frac{\partial}{\partial n} \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix} = \hat{M} \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix}, \quad \hat{M} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{L} + \hat{L}^*}{2} f'(A) - 1 & -\frac{\hat{L} - \hat{L}^*}{2i} \\ \frac{\hat{L} - \hat{L}^*}{2i} f'(A) & \frac{\hat{L} + \hat{L}^*}{2} - 1 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

\* Одно из собственных чисел вводимой ниже матрицы  $[e^{-i\omega\xi} \hat{M} e^{i\omega\xi}]$  близко к нулю. Соответствующая этому собственному вектору модуляция сигнала  $(\tilde{a}, \tilde{\varphi})$ ,  $|\tilde{a}| \ll |\tilde{\varphi}|$  эволюционирует медленно. В данном случае нас интересует именно эта медленная составляющая решения, поэтому замена разностей производными в уравнении (22) оправдана.

Для возмущений вида  $e^{i\omega t}$  уравнение (22) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial n} \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix} = [e^{-i\omega t} \hat{M} e^{i\omega t}] \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix}. \quad \text{Учитывая, что } L(\omega) \approx 1 - \omega^2 \tau^2, \text{ находим}$$

$$[e^{-i\omega t} \hat{M} e^{i\omega t}] = \hat{M}_0 + \hat{M}' = \begin{pmatrix} f'(A) - 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ + \frac{\tau^2}{1 - \Omega^2 \tau^2} \begin{pmatrix} -\omega^2 f'(A) - 2i\omega\Omega & \\ & 2i\omega\Omega f'(A) - \omega^2 \end{pmatrix}.$$

Добавку  $\hat{M}'$  при  $\omega^2 \tau^2 \ll 1$ ,  $\Omega^2 \tau^2 \ll 1$  можно считать малым возмущением. Собственные векторы матрицы  $\hat{M}_0$  имеют вид  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  (амплитудная модуляция, собственное число  $\Delta_1^0 = f'(A) - 1$ ) и  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  (фазовая модуляция, собственное число  $\Delta_2^0 = 0$ ). По аналогии с квантовомеханической теорией возмущений можно найти поправку ко второму собственному числу; она равна элементу (2,2) матрицы  $\hat{M}'$ :  $\Delta_2 = -\frac{\tau^2 \omega^2}{1 - \Omega^2 \tau^2}$ . т. е.  $l_1 = 0$ ,  $l_2 = \frac{\tau^2}{1 - \Omega^2 \tau^2} > 0$ . При  $\omega \neq 0$ ,  $\Omega \neq 0$  второй собственный вектор отличается от  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , т. е. релаксирующая фазовая модуляция будет сопровождаться слабой амплитудной модуляцией сигнала, затухающей по тому же самому закону.

Если  $l_2 < 0$ , то фазовая модуляция будет нарастать; возникающий при этом автоколебательный режим заведомо не может быть рассмотрен в рамках элементарной модели. Для генератора, описываемого уравнением (5), этот случай возможен при седлообразной характеристике фильтра:  $L(\omega) \approx 1 + \omega^2 \tau^2$ , что было отмечено в [10, 11].

Таким образом, нелинейный этап переходного процесса в генераторах с запаздывающей обратной связью протекает в две стадии, характеризующиеся разными масштабами времени. Сначала за время  $t_A$  порядка нескольких  $T$  устанавливается асимптотический режим поведения амплитуды (рис. 7, 8), а затем более медленно, с характерным временем  $t_\varphi \gg t_A$  эволюционирует фазовая модуляция, сохранившаяся от предыдущей стадии.

Для более общего случая  $\arg G = \text{const} \neq 0$  все изложенные в этом пункте результаты остаются в силе; отличия состоят лишь в том, что определение фазового инварианта имеет вид  $m = (1/2\pi) [\varphi(t+T) - \varphi(t) - \arg G]$ , и центральная частота генерируемых колебаний смещается на величину  $\arg G/T$ . Вывод о существовании двух сильно различающихся по масштабам времени стадий переходного процесса сохраняется и при наличии зависимости  $\arg G$  от амплитуды.

## 5. КЛАССИФИКАЦИЯ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ

Суммируя результаты проведенного в предыдущем разделе анализа, опишем классификацию автоколебательных режимов для генератора с фильтром в цепи обратной связи. В общем случае, не сводящемся к модели (5), данная классификация также применима, но лишь до тех пор, пока не возникает автомодуляция с характерным периодом  $\tau$ , обусловленная инерционными свойствами активного элемента.

Как было указано, безусловно устойчивые регулярные автоколебательные режимы характеризуются наличием не более одного скачка амплитуды на отрезке времени длины  $T$  и линейным законом измене-

ния фазы на тех временных участках, где амплитуда сигнала постоянна. Все такие режимы классифицируются, во-первых, по типу поведения амплитуды и, во-вторых, по фазовому инварианту  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Поэтому их удобно свести в двумерную табл. 2. В таблицу включены также стохастические автоколебательные режимы, хотя они и не описываются адекватно элементарной моделью. В каждой клетке таблицы показан качественно спектр генерируемого сигнала и приведено символическое обозначение для определенного режима\*. Клетки, находящиеся

Таблица 2

$q < q_0$	$q_0 < q < q_1$	$q_1 < q < q_2$	$q_2 < q < q_3$	...	$q > q_{пр}$	Значения параметра	
Генерация нет	Постоянная амплитуда	Автомодуляция $2T$	Автомодуляция $4T$		Стохастич. колебания	Тип поведения амплитуды	
0				Бифуркации удвоения периода автомодуляции		Зависимость $A(t)$ от $m$	
	$C_{-1}$	$2T_{-1}$	$4T_{-1}$		$S_{-1}$	-1	
	$C_0$	$2T_0$	$4T_0$		$S_0$	0	
	$C_1$	$2T_1$	$4T_1$		$S_1$	1	
	$C_2$	$2T_2$	$4T_2$		$S_2$	2	
	...	...	...		...	...	...

\* Поясним форму спектра в стохастических режимах. Участки сигнала  $z(t)$  шириной порядка  $\tau$ , разделенные интервалами времени  $nT$ , связаны детерминированным функциональным преобразованием, поэтому функцию корреляции  $K(t_1) = \langle z(t)z^*(t+t_1) \rangle$  можно представить в виде  $K(t_1) = K_0(t_1) + K_1(t_1) + K_2(t_1) + \dots$ , где  $K_n(t_1)$  существенно отличается от нуля лишь в  $\tau$ -окрестности точки  $t_1 = nT$ . Тогда спектр сигнала имеет вид  $S(\omega) = S_0(\omega) + S_1(\omega) \cos \omega T + S_2(\omega) \cos 2\omega T + \dots$ , где  $S_n(\omega)$  — фурье-образ  $K_n(t_1)$ . Характерный масштаб частоты для  $S_n(\omega)$  должен определяться величиной  $2\pi/\tau$ , поскольку дробление масштаба во временной области до уровня  $\tau$  (п.4.1) и соответствует увеличению ширины спектра до  $2\pi/\tau$ . Следовательно, спектральная функция  $S(\omega)$  обладает плавной огибающей масштаба  $2\pi/\tau$  и быстрым заполнением (изрезанностью) в масштабе  $2\pi/T$ .

ся на одной вертикали, отвечают режимам с одинаковым поведением амплитуды сигнала, а на одной горизонтали — режимам с одинаковым фазовым инвариантом.

На рис. 10 схематически показано расположение в табл. 2 тех режимов, для описания которых элементарная модель применима вполне (зона, ограниченная сплошной линией) или с определенными оговорками (зона, ограниченная пунктирной линией). Горизонтальные участки границ, разумеется, условны. Заметим, что критические значения параметра  $g$  для режимов, занимающих разные горизонтальные ряды,

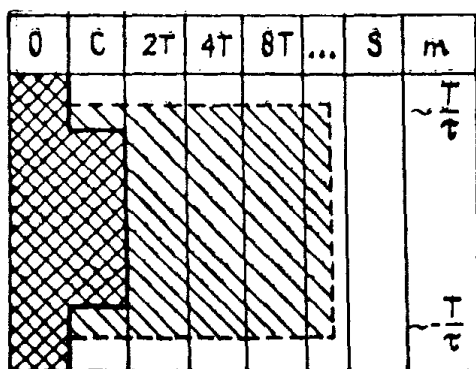


Рис. 10.

колебаний) не может привести к изменению фазового инварианта  $m$ : при этом можно перемещаться только вдоль горизонтального ряда табл. 2. Сам же номер ряда  $m$  определяется частотой исходного затравочного сигнала.

## 6. ИСТОРИЯ ВОПРОСА. АНАЛИЗ ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

Цель данного раздела состоит в том, чтобы облегчить читателю ориентировку в обширной журнальной литературе по генераторам с запаздывающей обратной связью и отметить те принадлежащие разным авторам методы и результаты, которые были использованы в предыдущем разделе статьи. Среди работ, заслуживающих упоминания здесь, можно условно выделить четыре группы.

### 6.1. Работы по изучению последовательностей типа $x_{n+1} = f(x_n)$ .

Классические результаты в этой области, принадлежащие Кенигсу и Ламерею, изложены в целом ряде статей и книг [4, 5, 14, 33]. Сюда относятся графический метод диаграмм Ламерея, обоснование возможности существования стационарных ( $x_n = \text{const}$ ) и многотактных ( $x_{n+N} = x_n$ ) режимов, а также условие их устойчивости  $\left| \prod_{k=1}^N f'(x_{n+k}) \right| < 1$ . Сравнительно недавно было установлено существование бесконечной последовательности бифуркаций удвоения периода многотактных режимов, универсального асимптотического закона для соответствующей последовательности бифуркационных значений параметра  $g_n$ , а также ее сходимость к конечному пределу  $g_{\text{пр}}$  [24]. В статьях [25, 26], появившихся под влиянием работы [24], рассматривается возникновение стохастической неустойчивости при  $g > g_{\text{пр}}$  и найдена зависимость инкремента (энтропии Колмогорова) от параметра  $g$ :  $h \sim (g - g_{\text{пр}})^{\nu}$ ,  $\nu = 0,449807$ .

6.2. Работы по элементарной модели и другим обобщенным моделям генератора с запаздывающей обратной связью. Элементарная модель была впервые предложена в работах Витта [4] и Бовшеверова [5]

для описания автоколебаний струны, возбуждаемой смычком, и устройства с акустической обратной связью. В этих работах содержится четкая математическая постановка задачи (уравнение типа (10) с начальными условиями), описан алгоритм построения решения, применен метод диаграмм Ламерея. Авторами [4, 5] установлена возможность разрывных автоколебаний с периодами, кратными  $T$ . Следует отметить, однако, что рассмотренный в [4, 5] вид нелинейных характеристик качественно отличается от рис. 3, поэтому конкретные результаты [4, 5] нельзя непосредственно перенести на рассматриваемый здесь класс генераторов.

В последующих работах [6, 10, 14] была введена более сложная обобщенная модель генератора: замкнутая в кольцо цепочка, содержащая безынерционный нелинейный элемент, линию задержки и фильтр с полосой пропускаемых частот порядка  $2\pi/\tau$ .

Интегральное уравнение, описывающее динамику такой модели, получено в статье Азьяна и Мигулина [6]. Эта работа включает также ряд результатов по линейной теории (частоты и инкременты мод) и качественное обсуждение влияния нелинейных свойств системы. В последующих работах Азьяна с соавторами [7-9] проведено численное решение интегрального уравнения. Все результаты работ [6-9] относятся к случаю, когда центральная частота полосы пропускания цепи равна нулю ( $\omega_0 = 0$ ).

В работах Гоноровского [10, 11] в качестве нелинейного элемента в модели генератора фигурирует идеальный амплитудный ограничитель. Из-за отсутствия падающего участка характеристики  $f(A)$  результаты [10, 11] могут быть отнесены только к тому интервалу значений параметра  $g$ , которому отвечают режимы автоколебаний с постоянной амплитудой. Фильтрующий элемент в модели [10, 11] имеет центральную частоту  $\omega_0 \gg T^{-1}$ , поэтому автор [10, 11] уделяет большое внимание динамике фазы колебаний. В работах [10, 11] четко отмечена возможность монохроматической генерации с разными (в зависимости от начальных условий) частотами. Показано, что если первоначально возбуждены две частотные составляющие, то в результате конкуренции «выживает» только одна из них. Отмечено, что нелинейная часть автогенератора не препятствует существованию режима колебаний, в котором амплитуда постоянна, но имеет место фазовая модуляция сигнала. (Из проведенного в этой связи рассуждения почти с очевидностью может быть сделано важное заключение о существовании двух стадий переходного процесса (см. п. 4.2).) В работах [10, 11] показана возможность автомодуляции генерируемого сигнала по фазе при седлообразной форме частотной характеристики фильтрующего элемента. Такая автомодуляция обусловлена инерционными свойствами усилительной цепочки и обладает временным масштабом  $\tau$ .

Объяснение автомодуляции с периодом, кратным  $T$ , наличием падающего участка на нелинейной характеристике  $f(A)$  с использованием диаграмм Ламерея в рамках элементарной модели (см. рис. 5) дано в [13, 14]. Возможность стохастических режимов впервые отмечена в работах Кислова с сотрудниками [14-19]. Эти результаты были стимулированы экспериментальными исследованиями тех же авторов (см. ниже). В статье [14] развит метод решения интегрального уравнения генератора с запаздывающей обратной связью, основанный на применении рядов Котельникова; результаты численных расчетов приводятся в [14-19]. Если в полосу фильтра попадает лишь одна из собственных частот системы  $\omega_m = \omega_0 + 2\pi m/T$ , то в рамках подхода [14-19] уравнение генератора сводится к соотношению  $A_{n+1} = f(A_n)$ , формально совпадающему с уравнением элементарной модели для дискретной последовательности значений амплитуды. Во избежание недоразумений подчеркнем, что это совершенно иная модель: действительно, она предназначена для случая



$\Delta\omega T \sim 1$  (а не  $\Delta\omega T \gg 1$ ), при этом значения функции  $A(t)$  в разных точках интервала времени  $T$  не являются независимыми, как это было в элементарной модели.

Приведенные в настоящей статье анализ эффекта дробления масштаба, качественное объяснение существования двух стадий установления колебаний и оценка характерного времени фазовой релаксации, а также топологическая классификация установившихся режимов являются оригинальными.

**6.3. О некоторых теоретических работах по конкретным генераторам. ЛБВ-генератор.** Качественный анализ физических механизмов, приводящих к нелокальности связи входного и выходного сигналов содержится в работе [27]. Методы анализа прохождения сложных сигналов через ЛБВ развиты в [27, 28]. В [16, 19] предлагается приближенный способ расчета (движение электронов в заданном поле сигнала) и приводятся результаты численного моделирования стохастических режимов в ЛБВ-генераторе.

*Лазер на свободных электронах (ЛСЭ).* Система интегродифференциальных уравнений, описывающих динамику ЛСЭ, получена и решена численно в работах [29, 30]. Обнаружено, что при превышении тока пучка над стартовым в 3 раза и более в ЛСЭ возникает автомодуляция, обусловленная инерционными свойствами активного элемента пучок — электромагнитная волна с характерным временем  $\tau \sim |L/v_0 - L/v_{гр}|$  ( $L$  — длина системы,  $v_0$  — скорость пучка,  $v_{гр}$  — групповая скорость волны). Автомодуляция с периодом  $\sim T = 2L/v_{гр}$  не наблюдалась в силу заложенных в модель ограничений (которые, впрочем, справедливы для представляющих практический интерес режимов работы ЛСЭ). В статье [31] проанализирован процесс установления в ЛСЭ режима колебаний постоянной амплитуды на основании модового подхода. В этой работе ясно указано на существование двух стадий переходного процесса — быстрой (установление амплитуды) и медленной (установление фазы), а также на важность данного факта для импульсных режимов работы ЛСЭ. Как очевидно из п. 4.2 настоящей статьи, этот вывод имеет общее значение.

*Нелинейно-оптическая система* в виде кольцевого резонатора, заполненного нелинейной средой и возбуждаемого внешним источником когерентного излучения, исследовалась теоретически в работе японских авторов [32]. Ими получено уравнение динамики системы и проведено численное моделирование, позволившее обнаружить регулярные и стохастические автомодуляционные режимы. Показано, что приближение, эквивалентное элементарной модели, принципиально неприменимо для анализа стохастических режимов. Обоснование последнего результата в [32] аналогично рассуждению из п. 4.1.

**6.4. Экспериментальные работы.** Ряд экспериментальных результатов исследования систем с нулевой центральной частотой  $\omega_0$  содержится в уже упоминавшейся работе [6] (осциллограммы автоколебательных режимов) и в статьях [8, 9] (осциллограммы переходных процессов). Динамика огибающей колебаний в генераторе с  $\omega_0 \gg T^{-1}$  на линейном этапе переходного процесса изучалась в [12]. Приведенная там осциллограмма демонстрирует замечательное сходство с рис. 8.

Широкое экспериментальное исследование различных автоколебательных режимов в генераторе с запаздывающей обратной связью (конкретно — в ЛБВ-генераторе) было проведено в работе Котырева и Плисса [13]. Основной четкий вывод этой работы — наличие очень большого числа устойчивых форм генерируемого спектра — хорошо коррелирует с результатами анализа разд. 4 настоящей статьи. Некоторые из описанных в разд. 4 типов поведения амплитуды ( $C$ ,  $2T$ ,  $4T$ ) легко

можно отождествить с режимами, наблюдавшимися авторами [13]. По-видимому, они наблюдали также и стохастические режимы. В то же время приведенные в статье [13] материалы не дают возможности полностью разобраться в классификации наблюдавшихся режимов и проверить вывод п. 4.2 о сохранении фазового инварианта.

О наблюдении автомодуляционных режимов с периодами  $2T$ ,  $4T$  сообщалось также в работах Кислова с соавторами [15, 17] и в более поздней статье Анищенко и Астахова [20]. Основное значение этих работ, однако, состоит в надежном установлении того факта, что при изменении характеристик системы, эквивалентном увеличению параметра  $g$ , ЛБВ-генератор переходит после ряда бифуркаций в режим стохастических автоколебаний. При этом спектр генерации становится сплошным, хотя и содержит ряд размазанных пиков. Общий вид спектра качественно соответствует описанному в сноске в разд. 5.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как показывает проведенный анализ, элементарная модель, несмотря на ее простоту и ряд существенных оговорок, позволяет обрисовать в общих чертах широкую картину явлений, которые могут наблюдаться в генераторах с запаздывающей обратной связью. Следует отметить, что некоторые ключевые моменты этой картины к настоящему времени еще недостаточно изучены экспериментально. Настоятельно необходимым представляется сейчас проведение следующих экспериментов, которые могут быть выполнены практически на любом конкретном генераторе с запаздывающей обратной связью.

1) Реализация режимов, отвечающих каждой клетке табл. 2. Проверка сохранения фазового инварианта  $m$  при плавном изменении параметров системы. Уточнение границ применимости классификации режимов по фазовому инварианту.

2) Экспериментальная проверка закономерностей, присущих переходному процессу. Сюда относятся наблюдение дробления масштаба до уровня  $\tau$  при установлении автомодуляционных и стохастических режимов, а также наблюдение фазовой релаксации и определение ее характерного времени.

Автор благодарен А. П. Кузнецову за постоянные обсуждения и конструктивную критику в ходе работы над текстом статьи, а также Б. П. Безручко и А. Ю. Перельману за ряд полезных замечаний.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шевчик В. Н. Основы электроники сверхвысоких частот.— М.: Сов. радио, 1959.
2. Лекции по электронике СВЧ и радиофизике (5-я зимняя школа-семинар инженеров).— Саратов: Гос. ун-т, 1980, кн. 5.
3. Ханин Я. И. Динамика квантовых генераторов.— М.: Сов. радио, 1975.
4. Витт А. А.— ЖТФ, 1936, 6, № 9, с. 1459.
5. Бовшеверов В. М.— ЖТФ, 1936, 6, № 9, с. 1480.
6. Азьян Ю. М., Мигулин В. В.— Радиотехника и электроника, 1956, 1, № 4, с. 418.
7. Азьян Ю. М.— Радиотехника и электроника, 1963, 8, № 10, с. 1665.
8. Азьян Ю. М., Снигирев О. В., Мкртумов А. С.— Вестник МГУ, сер. физ., астрон., 1972, 13, № 1, с. 99.
9. Азьян Ю. М., Снигирев О. В.— Вестник МГУ, сер. физ., астрон., 1972, 13, № 2, с. 245.
10. Гоноровский И. С.— Радиотехника, 1958, 13, № 5; 1959, 14, № 1.
11. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы.— М.: Сов. радио, 1977.
12. Недешев А. И.— Радиотехника, 1963, 18, № 1, с. 30.
13. Котирев Е. А., Плисс Л. Е.— Радиотехника и электроника, 1965, 10, № 9, с. 1628.
14. Дихтяр В. Б., Кислов В. Я.— Радиотехника и электроника, 1977, 22, № 10, с. 2141.

15. Кислов В. Я., Залогин Н. Н., Мясин Е. А.— Радиотехника и электроника, 1979, 24, № 6, с. 1118.
16. Кислов В. Я.— Радиотехника и электроника, 1980, 25, № 8, с. 1683.
17. Кислов В. Я., Мясин Е. А., Залогин Н. Н.— Радиотехника и электроника, 1980, 25, № 10, с. 2160.
18. Дихтяр В. Б., Кислов В. Я.— В кн.: Нелинейные волны. Стохастичность и турбулентность.— Горький: ИПФ АН СССР, 1980, с. 37.
19. Кислов В. Я.— В кн.: Лекции по электронике СВЧ и радиофизике (5-я зимняя школа-семинар инженеров).— Саратов: Гос. ун-т, 1980, кн. 5, с. 78.
20. Анищенко В. С., Астахов В. В.— В кн.: Лекции по электронике СВЧ и радиофизике (5-я зимняя школа-семинар инженеров).— Саратов: Гос. ун-т, 1980, кн. 5, с. 118.
21. Рабинович М. И.— УФН, 1978, 125, № 1, с. 123.
22. Рабинович М. И.— В кн.: Нелинейные волны. Стохастичность и турбулентность.— Горький: ИПФ АН СССР, 1980, с. 5.
23. Пиковский А. С.— В кн.: Лекции по электронике СВЧ и радиофизике (5-я зимняя школа-семинар инженеров).— Саратов: Гос. ун-т, 1980, кн. 5, с. 5.
24. Feigenbaum M. J.— J. Stat. Phys., 1978, 19, № 1, p. 25.
25. Пиковский А. С.— Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 7, с. 883.
26. Huberman В. А., Rudnik J.— Phys. Rev. Lett., 1980, 45, p. 154.
27. Кузнецов С. П.— В кн.: Лекции по электронике СВЧ и радиофизике (5-я зимняя школа-семинар инженеров).— Саратов: Гос. ун-т, 1980, кн. 5, с. 165.
28. Манькин И. А., Школьников В. Г.— Радиотехника и электроника, 1981, 25, № 9, с. 1918.
29. Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Петелин М. И.— Изв. АН СССР, сер. физич., 1980, 44, № 8, с. 1594.
30. Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Петелин М. И.— В кн.: Лекции по электронике СВЧ и радиофизике (5-я зимняя школа-семинар инженеров).— Саратов: Гос. ун-т, 1981, кн. 1, с. 69.
31. Четвериков А. П.— ЖТФ, 1981, 51, с. 2452.
32. Ikeda K., Daido H., Akimoto O.— Phys. Rev. Lett., 1980, 45, № 9, p. 709.
33. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1976.
34. Кузнецов С. П.— Изв. вузов — Радиофизика, 1982, 25, № 11, с. 1364.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
13 ноября 1981 г.,  
после доработки  
3 августа 1982 г.