Письма в ЖТФ, том 8, вып. 15 12 августа 1982 г.

СМЕНА ХАРАКТЕРА НЕУСТОЙЧИВОСТИ В СИСТЕМЕ ДВУХ СЛАБО СВЯЗАННЫХ ВОЛН

А.П. Кузнецов

1. Огромное количество физических задач сводится к взаимодействию двух волн. Такое взаимодействие широко используется в усилителях, если неустойчивость конвективная, и в генераторах, если она абсолютная. Однако вопрос о характере неустойчивости обычно не является простым. Данная работа преследует двоякую цель. Во-первых, исследовать характер неустойчивости в ситуации, когда не ясно – с усилителем или с генератором мы имеем дело; во-вторых, предложить метод исследования характера неустойчивости в многопараметрических задачах, позволяющий радикально сократить формально-математическую сторону такого исследования.

Пусть две ветви спектра бездиссипативной системы $\omega = \omega_1(\beta)$ и $\omega = \omega_2(\beta)$ пересекаются и связываются друг с другом, причем на плоскости область связи охватывает малый интервал частот и волновых чисел. Дисперсионное уравнение системы в этом случае имеет следующий вид [1, 2]:

$$[\omega - \omega_1(\beta)][\omega - \omega_2(\beta)] = \pm \varepsilon^2. \qquad (1)$$

Здесь ε – малый параметр, совпадающий по порядку величины с частотным размером области связи. Мы будем рассматривать случай, когда система неустойчива, чему соответствует знак минус в правой части (1).

Поскольку размер области связи мал, то аппроксимируем внутри него функции $\omega_1(\beta)$ и $\omega_2(\beta)$ первыми членами ряда Тейлора. Часто можно ограничиться линейными членами

$$[\omega - \omega_0 - \omega_1'(\beta_0)(\beta - \beta_0)][\omega - \omega_0 - \omega_2'(\beta_0)(\beta - \beta_0)] = -\varepsilon^2. \qquad (2)$$

Если при этом групповые скорости волн $\omega_1'(\beta_0)$ и $\omega_2'(\beta_0)$ имеют разные знаки, то неустойчивость абсолютная, а если одинаковые – то конвективная. Этот результат принадлежит Стэрроку [2] и представляет собой универсальный критерий различения характера неустойчивости двух слабо связанных волн. Подобный анализ на характер неустойчивости, однако, неприменим, если в области связи групповая скорость одной из волн обращается в нуль.[1] Такая ситуация возникает, если задача характеризуется некоторым параметром B, при изменении которого точка пересечения дисперсионных характеристик переходит с восходящего на нисходящий участок одной из них, а неустойчивость,

[1] Эту точку $(\omega_k \beta_k)$ будем называть критической.

соответственно, превращается из конвективной в абсолютную (рис. 1). Исследование этого превращения и проводится в данной работе. Заметим, что этот вопрос возникает в ряде прикладных задач, например, при анализе работы лампы бегущей волны вблизи границы пропускания волноведущей системы [3].

2. Пусть в область связи попадает критическая точка первой волны: $\omega_1'(\beta_K)=0$. Тогда

$$\left[\omega-\omega_K-\frac{\omega_1''(\beta_K)}{2}(\beta-\beta_K)^2\right]\left[\omega-\omega_2(\beta_K)-\omega_2'(\beta_K)(\beta-\beta_K)\right]=-\varepsilon^2. \tag{3}$$

Будем для определенности полагать $\omega_1''(\beta_K)<0$, а $\omega_2'(\beta_K)>0$. Рис. 1 находится в соответствии с таким выбором знаков.

Все эффекты, связанные с существованием критической точки, разыгрываются в характерных интервалах частот и волновых чисел, определяемых соотношением $\Delta\omega\sim|\omega_1''|\Delta\beta^2\sim\varepsilon^{4/3}$. Поэтому введем безразмерные частоту Ω и волновое число K следующим образом:

$$\Omega=\left[\frac{|\omega_1''|}{2(\omega_2')^2}\right]^{1/3}\cdot\frac{\omega-\omega_K}{\varepsilon^{4/3}};\quad K=\left[\frac{2}{|\omega_1''|\cdot\omega_2'}\right]^{1/3}\cdot\frac{\beta-\beta_K}{\varepsilon^{2/3}}. \tag{4}$$

Переходя в уравнении (3) к безразмерным переменным, отбросим член, содержащий малый параметр ε :

$$\Omega=-K^2+\frac{1}{K+B}. \tag{5}$$

Здесь $B=\left[\frac{|\omega_1''|}{2\omega_2'}\right]^{1/3}\cdot\frac{\omega_2(\beta_K)-\omega_K}{\varepsilon^{2/3}}$ – параметр, характеризующий взаимное расположение дисперсионных характеристик невзаимодействующих волн; $B=0$ соответствует их пересечению точно в критической точке (рис. 1). В выбранных масштабах дисперсионная характеристика второй волны выглядит как вертикальная линия $K=-B$. Мы, однако, будем помнить, что она слегка наклонена, как на рис. 1.[2]

3. Установим граничное значение параметра B, при котором исчезает абсолютная неустойчивость. Это произойдет, когда инкремент нарастания, соответствующий той седловой точке функции $\Omega(K)$, которая ответственна за абсолютную неустойчивость, обращается в нуль:

$$Im\,\Omega(K_0)=0,\quad \frac{\partial\Omega(K_0)}{\partial K_0}=0. \tag{6}$$

Для закона дисперсии (5) существует единственное значение параметра $B=1{,}5$, при котором выполняются оба условия (6).

[2] Это утверждение эквивалентно определенному правилу обхода особенности в законе дисперсии (5) при интегрировании в K-плоскости.

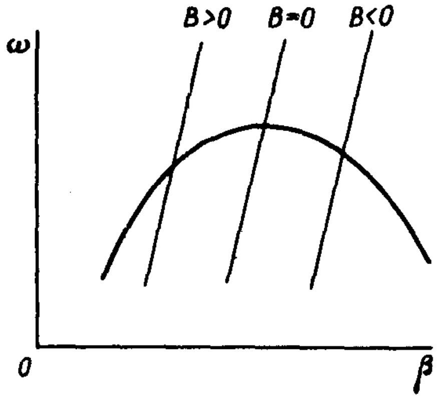

Рис. 1.

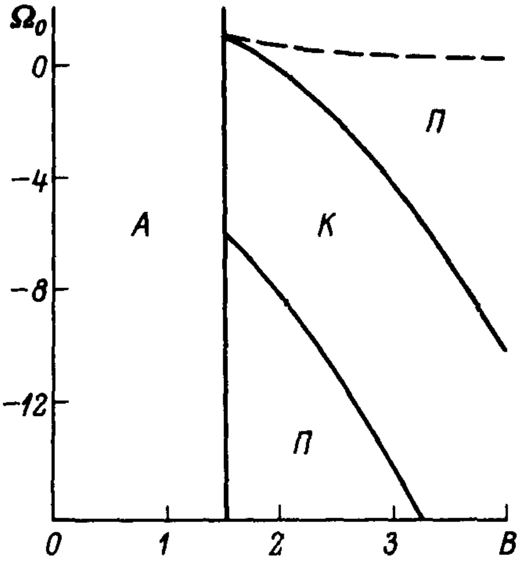

Рис. 2.

При больших параметрах $|B|$ точка пересечения ветвей уходит далеко от критической точки, и можно пользоваться критерием Стэррока. Как видно из рис. 1, при больших отрицательных B неустойчивость абсолютная, а при больших положительных – конвективная. Значит, абсолютная неустойчивость реализуется при $B < 1.5$.

4. Пусть в системе есть источник, колеблющийся с частотой Ω_0. Найдем на плоскости параметров Ω_0, B границы областей усиления и пропускания. От источника бегут волны с волновыми числами, определяемыми уравнением

$$\Omega_0 = \Omega(K). \tag{7}$$

На границе области усиления пространственный инкремент хотя бы одной из них обращается в нуль

$$Im\, K(\Omega_0) = 0. \tag{8}$$

При $B > 1.5$ для закона дисперсии (5) все три линии, удовлетворяющие уравнениям (7) и (8), показаны на рис. 2. При больших положительных B, согласно Стэрроку, должна существовать полоса усиления, лежащая вблизи дисперсионной характеристики второй волны, а вне этой полосы – располагаться область пропускания. Эти соображения совместно с исследованием асимптотического поведения линий, задаваемых уравнениями (7) и (8), позволяют утверждать, что область усиления заключена между двумя непрерывными линиями, а пунктирная линия целиком лежит в области пропускания.

5. На рис. 2 на плоскости параметров Ω_0, B показаны области различного поведения системы: А – абсолютной неустойчивости, К – конвективной неустойчивости, П – пропускания.

Поскольку мы нигде не конкретизировали физическую природу взаимодействующих волн, то полученные результаты являются универсальными.

В заключение заметим, что фактически мы использовали следующий метод. Пространство параметров разбивается поверхностями (6) и (7)-(8) на области. Характер решения внутри каждой области устанавливается из физических соображений, например из асимптотики. Использование этого метода удобно, поскольку при определении границ областей требуются только необходимые условия неустойчивости, которые отыскиваются очень просто. Поведение же системы внутри каждой области исследовать также проще, чем проверять громоздкие критерии неустойчивости во всем пространстве параметров.

Литература

[1] Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. Физическая кинетика, „Наука", М. (1979).

[2] P.A. Sturrock. Phys. Rev., 112, 1488 (1958).

[3] А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов. Изв. высш. уч. зав., сер. Радиофизика, 23, 1104 (1980).

Саратовский государственный университет

Поступило в Редакцию 5 марта 1982 г.