Письма в ЖТФ, том 9, вып. 2 26 января 1983 г.

О КРИТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ОДНОМЕРНЫХ ЦЕПОЧЕК

С.П. Кузнецов

1. В теории колебаний и волн широко известен следующий подход: сначала изучается простая колебательная система, а затем полученные результаты привлекаются для анализа цепочки связанных систем. Это позволяет перейти от элементарных систем к системам с большим числом степеней свободы. Как выяснилось недавно [1, 2], многие простые динамические системы могут претерпевать переход от периодического режима колебаний к стохастическому через бифуркации удвоения периода, причем последовательность бифуркационных значений параметра сходится к конечному пределу - критической точке. Естественно поставить вопрос о поведении цепочки из обладающих такими свойствами связанных систем. В данной работе мы исследуем, как меняется динамика малых возмущений пространственно однородного решения в подобных цепочках при многократном удвоении его временного периода; для простоты рассматривается только поведение в критической точке. Результаты

этой статьи могут оказаться полезными для понимания общих закономерностей возникновения стохастичности в распределенных системах.

2. Выберем в качестве элементарной ячейки, на базе которой будет строиться цепочка, динамическую систему, описываемую уравнением

$$x' = g(x), \tag{1}$$

где x – переменная, характеризующая состояние ячейки в момент дискретного времени n, а x' – в момент $n+1$, $g(x)$ – функция Фейгенбаума [1]. Малое возмущение ξ переменной x преобразуется за единицу времени по формуле $\xi' = g'(x)\xi$.

Переходя к анализу одномерной цепочки из связанных между собой ячеек, будем считать, что уравнение (1) описывает пространственно однородное решение. Рассмотрим малое возмущение пространственно однородного решения вида $\xi e^{i\beta m}$ (β – волновое число, m – номер ячейки). Чтобы описать его эволюцию, следует добавить в уравнение для возмущения линейный по ξ член:

$$\xi' = g'(x)\xi + \mathcal{E}\psi(x,\beta)\xi. \tag{2}$$

Здесь $\mathcal{E}$ – малый параметр, $\psi(x, \beta)$ – функция, вид которой зависит от конкретного способа введения связи между ячейками, $\psi(x, 0) = 0$.

Подвергнем уравнения (1) и (2) преобразованию ренормировки (удвоения) [1]: выразим x и ξ в момент $n+2$ через их значения в момент n, пренебрегая членом порядка $\mathcal{E}^2$,

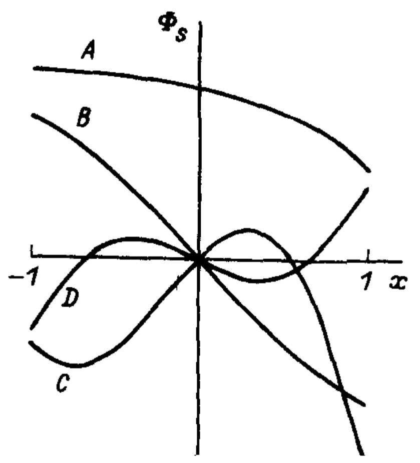
$$x'' = g(g(x)), \quad \xi'' = g'(g(x))g'(x)\xi + \mathcal{E}[g'(x)\psi(g(x),\beta) + g'(g(x))\psi(x,\beta)]\,\xi, \tag{3}$$

и выполним в (3) замену $x \to x/a$, $a = -2.5029$ – константа Фейгенбаума. Используя соотношения $ag(g(\frac{x}{a})) = g(x)$, $g'(g(\frac{x}{a}))g'(\frac{x}{a}) = g'(x)$ [1], приходим вновь к уравнениям (1), (2), но с функцией связи $\psi_1 = g'(\frac{x}{a})\psi(g(\frac{x}{a}),\beta) + g'(g(\frac{x}{a}))\psi(\frac{x}{a},\beta)$. В результате N-кратного применения этой процедуры будет иметь

$$x^{(2^N)} = g(x), \quad \xi^{(2^N)} = g'(x)\xi + \mathcal{E}\psi_N(x,\beta)\xi, \tag{4}$$

где величины с индексом (2^N) относятся к моменту времени $n+2^N$, а функция $\psi_N(x,\beta)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\psi_{N+1}(x,\beta) = g'(\tfrac{x}{a})\psi_N(g(\tfrac{x}{a}),\beta) + g'(g(\tfrac{x}{a}))\psi_N(\tfrac{x}{a},\beta) \equiv \hat{L}\psi_N. \tag{5}$$



Поскольку $\hat{L}$ – линейный оператор, решение (5) можно искать в виде

$$\psi_N(x,\beta)=\sum_S C_S(\beta)\,\nu_S^N\,\Phi_S(x), \qquad (6)$$

где $C_S(\beta)$ – коэффициенты, зависящи от вида начальной функции $\psi(x,\beta)$, Φ_S и ν_S – собственные функции и собственные числа оператора $\hat{L}$. Каждый член ряда (6) будем трактовать как определенный тип связи и обозначать как А-тип, В-тип, С-тип и т.д. в порядке убывания модулей собственных чисел. Графики первых четырех функций Φ_S показаны на рисунке, собственные числа есть ν_A =a=-2.503, ν_B =2, ν_C $=\frac{1}{a}=$-0.400, ν_D =-0.218.

При преобразовании удвоения весовой коэффициент, с которым входит каждый тип в функцию связи $\psi_N(x, \beta)$, умножается на соответствующее собственное число. При больших N доминирующими становятся А и В-связь, поскольку $|\nu_{A,B}|>1$ (разумеется, если $C_{A,B}\neq 0$). Таким образом, общий вопрос о возможных типах критического поведения сводится к изучению цепочек с функциями связи вида $\psi = C_A\Phi_A + C_B\Phi_B$, т.е. радикально упрощается по сравнению с исходной постановкой задачи, содержавшей произвольную функцию $\psi(x,\beta)$. Из сказанного следует, что для изучения критического поведения нужно уметь находить C_A и C_B для конкретных систем; один метод их определения указан ниже.

3. Как известно, отображение (1) имеет циклы периода 2, 4, 8, 16, ... Определим мультипликатор 2^N-цикла $\mu_N(\beta)$ – величину, показывающую, во сколько раз изменяется за период цикла возмущение вида $e^{i\beta m}$ на фоне соответствующего этому циклу пространственно однородного решения. Как видно из (4), ренормированное значение x, отвечающее 2^N-циклу, есть x_*=0.5439 – корень уравнения $g(x) = x$ [1]. Подставляя $x=x_*$ в уравнение для ξ, используя (6) и считая N большим, получим

$$\mu_N(\beta)=\mu_*+c_A a^N+c_B 2^N, \qquad (7)$$

где $\mu_* = g'(x_*)$ = -1.6012, $c_{A,B} = C_{A,B}\Phi_{A,B}(x_*)\xi$. Если известны мультипликаторы хотя бы для двух различных циклов, то из (7) можно найти c_A и c_B.

4. Если каждая ячейка симметричным образом связана со своими левыми и правыми соседями, то функция связи при малых β имеет вид $\psi(x,\beta)\approx\psi^0(x)\beta^2$. Посмотрим, как при этом

влияет наличие того или иного типа связи на динамику возмущений. Обсудим отдельно некоторые частные случаи.

А. $c_A \neq 0$, $c_B = 0$. Так как $a < 0$, то из (7) следует, что для 2^N-циклов с четными при $c_A < 0$ и нечетными при $c_A > 0$ номерами N нарастающими являются возмущения с малыми β, причем соответствующий интервал значений β уменьшается с ростом N пропорционально $|a|^{-N/2}$. Для циклов с нечетными при $c_A < 0$ и четными при $c_A > 0$ номерами возмущения нарастают тем быстрее, чем больше их волновое число.

В. $c_A = 0$. Если $c_B < 0$, то для любого 2^N-цикла нарастающими являются возмущения с малыми β из интервала, ширина которого пропорциональна $2^{-N/2}$. При $c_B > 0$ все 2^N-циклы неустойчивы относительно возмущений с большими волновыми числами.

В случае $|c_A| \ll |c_B|$ поведение типа В реализуется для циклов не слишком большого периода; с ростом N оно сменяется поведением типа А (так как $|\nu_A| > |\nu_B|$).

5. Как известно, уравнение (1) адекватно передает все детали критического поведения для широкого класса динамических систем как с дискретным, так и с непрерывным временем [1, 2]. Поэтому можно ожидать, что полученные выше результаты применимы для столь же широкого класса одномерных цепочек. В качестве конкретного примера рассмотрим цепочку параметрически возбуждаемых нелинейных осцилляторов [3], представляющую самостоятельный интерес для физики твердого тела, нелинейной оптики, радиотехники:

$$\ddot{x}_m + k\dot{x}_m + \left(1 + q\cos\frac{2\pi t}{T}\right)x_m + x_m^3 = \mathcal{E}\left(x_{m-1} - 2x_m + x_{m+1}\right). \qquad (8)$$

Здесь x_m - обобщенная координата m-го осциллятора, k, q, T - параметры, $\mathcal{E}$ - коэффициент связи между осцилляторами. При фиксированных q, T пространственно однородное решение уравнения (8) претерпевает бифуркации удвоения при уменьшении параметра k, демонстрируя режимы (циклы) периода 2T, 4T, 8T, ... [3]. Для $q = 4$, $\frac{2\pi}{T} = 2.04$ предел последовательности бифуркационных значений k есть $k_c = 0.4105$. При $k = k_c$ существуют циклы со всевозможными периодами 2^NT. Мультипликаторы этих циклов были найдены нами численно для возмущений вида $e^{i\beta m}$ при $\beta^2 \ll 1$: $\mu_N(\beta) = \mu_* + \mathcal{E}\varkappa_N\beta^2$; значения $\varkappa_N$ для $N = 1, 2, 3, 4$ равны соответственно 5.12, 4.49, 27.4, -36.6. Эта последовательность с хорошей точностью воспроизводится формулой $\varkappa_N = c_1 a^N + c_2 2^N$ ($c_1 = -1.30$, $c_2 = 0.90$), что подтверждает представления, развитые в пп. 1-4.

Автор благодарен А.П. Кузнецову и А.Г. Рожневу за обсуждение.

Л и т е р а т у р а

[1] M.J. F e i g e n b a u m. J. Stat. Phys., 19, 25 (1978).
[2] J.P. E c k m a n n. Rev. Mod. Phys., 53, Part 1, 643 (1981).
[3] Ф.М. И з р а й л е в, М.И. Р а б и н о в и ч, А.Д. У г о д н и к о в. Препринт № 17 ИПФ АН СССР, Горький (1981).

Поступило в Редакцию
26 октября 1982 г.