УДК 517.9

КУЗНЕЦОВ С. П.

О МОДЕЛЬНОМ ОПИСАНИИ ЦЕПОЧКИ СВЯЗАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВБЛИЗИ ТОЧКИ ПЕРЕХОДА ПОРЯДОК — БЕСПОРЯДОК

Предлагается способ феноменологического описания цепочки связанных систем, демонстрирующих при изменении некоторого параметра переход от периодического к хаотическому режиму через бесконечную последовательность удвоений периода. Способ состоит в использовании модели — цепочки связанных одномерных отображений. Показано, что с точки зрения поведения цепочки после большого числа удвоений периода связь между системами представляет собой комбинацию двух фундаментальных типов связи; равенство соответствующих коэффициентов связи для цепочки и ее модели является условием соответствия между ними. Рассмотрен конкретный пример — цепочка параметрически возбуждаемых нелинейных осцилляторов с диссипацией.

1. Сущность понятия динамической системы состоит в том, что по ее состоянию в начальный момент времени однозначно определяется состояние в любой последующий момент [1]. Состояние — это определенный набор величин, относящихся к системе, например для маятника — угол отклонения и скорость. Как оказалось, многие динамические системы различной природы при изменении какого-либо параметра претерпевают переход от периодического поведения к хаотическому [2—10]. Один из распространенных способов возникновения хаоса связан с существованием бесконечной последовательности удвоений периода движения. При этом значения параметра λ_n, при которых происходят удвоения, сходятся к конечному пределу — критической точке λ_c [2—4]:

$$\lambda_n = \lambda_c - K\delta^{-n}. \tag{1}$$

Здесь λ_c и K зависят от конкретной системы, а $\delta = 4{,}6692$ — универсальная постоянная. В качестве примеров можно назвать нелинейный осциллятор с диссипацией, возбуждаемый периодическим внешним воздействием [5, 6], укороченные по Галеркину уравнения ряда гидродинамических систем [7, 8], некоторые задачи химической кинетики [9].

Простейшая система, демонстрирующая удвоения периода, — рекуррентное одномерное отображение [2, 3]:

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 \equiv F(x_n). \tag{2}$$

Здесь x_n — действительная переменная, описывающая состояние в момент дискретного времени n; λ — параметр. Значения постоянных в формуле (1) таковы: $\lambda_c = 1{,}40116$, $K = 0{,}7242$. При $\lambda < \lambda_c$ система демонстрирует периодические, при $\lambda > \lambda_c$ — хаотические режимы[1]).

Как показано в [4], система (2) может рассматриваться как модель, описывающая поведение различных реальных диссипативных систем, претерпевающих переход к хаосу через удвоения периода. Сначала от дифференциальных уравнений переходят к отображению Пуанкаре [1]. При многократных итерациях это отображение оказывается эквивалентным одномерному благодаря имеющемуся в диссипативных системах сжатию фазового объема [4] и сводится надлежащей заменой переменных к виду (2). Соответствие динамики модели и системы имеет место, если они характеризуются одинаковыми значениями величины $(\lambda - \lambda_c) K^{-1}$.

Актуальная задача состоит в изучении возникновения хаоса в распределенных системах [7, 8]. Распространенный в теории колебаний способ перехода от простых систем к распределенным состоит в том, чтобы рассмотреть цепочку или среду, составленную из слабо связанных систем с изученными свойствами. Естественно поставить вопрос о поведении цепочки (среды) из систем, демонстрирующих удвоения периода. Цель данной работы состоит в том, чтобы указать условия соответствия между поведением такой цепочки и ее модели, составленной из систем (2). Найденные условия иллюстрируются конкретным примером, который интересен для теории твердого тела, нелинейной оптики, радиотехники.

2. Используем в качестве ячейки, на базе которой строится цепочка, систему (2). Заметим, что малая добавка к переменной x преобразуется за единицу времени по формуле $\xi_{n+1} = F'(x_n)\xi_n$.

Переходя к цепочке из связанных ячеек, будем считать, что уравнение (2) описывает пространственно-однородное решение, т. е. определяет динамику цепочки в случае, когда x не зависит от номера ячейки m. Рассмотрим малое возмущение пространственно-однородного решения $\xi_{n,m}$. Чтобы описать его эволюцию, следует добавить в уравнение для возмущения линейный по ξ член:

$$\xi_{n+1,m} = F'(x_n)\,\xi_{n,m} - \varphi(x_n)\,(\xi_{n,m-1} - 2\xi_{n,m} + \xi_{n,m+1}), \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ — функция, вид которой зависит от конкретного способа введения связи между ячейками. Полагая $\xi_{n,m} = \xi_n e^{i\beta m}$ (β — волновое число) и ограничиваясь длинноволновыми возмущениями $\beta^2 \ll 1$, получим:

$$\xi_{n+1} = F'(x_n)\,\xi_n + \varphi(x_n)\,\beta^2\xi_n. \tag{4}$$

Подвергнем уравнения (2) и (4) преобразованию ренормировки (удвоения) [2, 3]: выразим x_{n+2}, ξ_{n+2} через x_n, ξ_n, пренебрегая членами порядка β^4, и выполним замену $x \to x/a_0$, $a_0 = 1/F(F(0))$:

$$x_{n+2} = a_0 F\left(F\left(\frac{x_n}{a_0}\right)\right), \quad \xi_{n+2} = \left\{F'\left(F\left(\frac{x_n}{a_0}\right)\right) F'\left(\frac{x_n}{a_0}\right) + \left[F'\left(\frac{x_n}{a_0}\right) \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times\, \varphi\left(F\left(\frac{x_n}{a_0}\right)\right) + F'\left(F\left(\frac{x_n}{a_0}\right)\right) \varphi\left(\frac{x_n}{a_0}\right)\right]\beta^2\right\}\xi_n.$$

В результате N-кратного применения этой процедуры будем иметь

$$x_{n+2^N} = F_N(x_n), \quad \xi_{n+2^N} = F'_N(x_n)\,\xi_n + \beta^2\varphi_N(x_n)\,\xi_n, \tag{5}$$

где функции $F_N(x)$ и $\varphi_N(x)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$F_{N+1}(x) = a_N F_N\left(F_N\left(\frac{x}{a_N}\right)\right), \quad a_N = 1/F_N(F_N(0)), \tag{6}$$

---

[1]) При $\lambda > \lambda_c$ существуют, впрочем, узкие зоны значений параметра, в которых реализуются устойчивые периодические режимы [2].

$$\varphi_{N+1}(x) = F'_N\left(\frac{x}{a_N}\right)\varphi_N\left(F_N\left(\frac{x}{a_N}\right)\right) + F'_N\left(F_N\left(\frac{x}{a_N}\right)\right)\varphi\left(\frac{x}{a_N}\right). \qquad (7)$$

Пусть $\lambda = \lambda_c$, тогда согласно [2, 3] существует нетривиальный предел $\lim\limits_{N\to\infty} f_N(x) = g(x)$ и $\lim\limits_{N\to\infty} a_N = a = -2{,}5029$. Как видно из (6), функция $g(x)$ должна удовлетворять функциональному уравнению [2]:

$$g(x) = ag\left(g\left(\frac{x}{a}\right)\right), \qquad (8)$$

причем $g(0) = 1$, $g'(0) = 0$, $g''(0) \neq 0$, $a = 1/g(1)$. Как показано Фейгенбаумом, функция $g(x)$ может быть найдена непосредственно как решение уравнения (8). Эта функция универсальна (не зависит от кон-

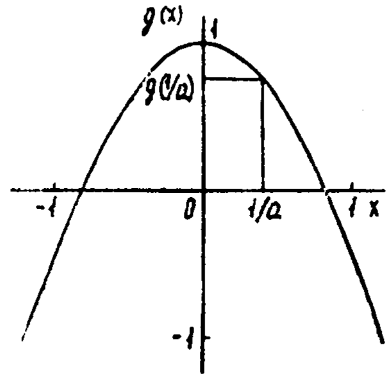

Рис. 1

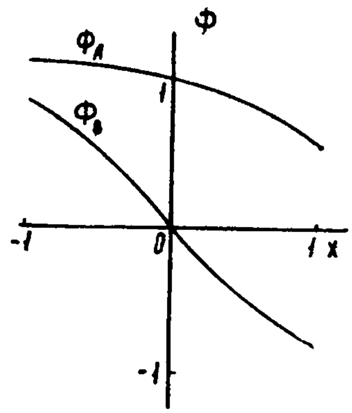

Рис. 2

кретной начальной $F(x)$). В [3] указана полиномиальная аппроксимация $g(x)$, позволяющая вычислять ее на отрезке $[-1, 1]$ с точностью до 10 значащих цифр. График функции $g(x)$ показан на рис. 1.

В силу сказанного, соотношение (7) при $\lambda = \lambda_c$ и больших N принимает вид:

$$\varphi_{N+1}(x) = g'\left(\frac{x}{a}\right)\varphi_N\left(g\left(\frac{x}{a}\right)\right) + g'\left(g\left(\frac{x}{a}\right)\right)\varphi_N\left(\frac{x}{a}\right).$$

Его можно упростить с помощью замены $\varphi_N(x) = g'(x) f_N(x)$:

$$f_{N+1}(x) = f_N\left(\frac{x}{a}\right) + f_N\left(g\left(\frac{x}{a}\right)\right) \equiv \hat{L} f_N(x), \qquad (9)$$

где использовано вытекающее из (8) тождество

$$g'(x) = g'\left(\frac{x}{a}\right) g'\left(g\left(\frac{x}{a}\right)\right).$$

Производная $g'(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ имеет единственный простой нуль в точке $x = 0$. Будем рассматривать функции f, представимые в виде $f(x) = \dfrac{\text{const}}{x} + \tilde{f}(x)$, где $\tilde{f}(x)$ удовлетворяет на отрезке $[-1, 1]$ условию Липшица. (Для этого достаточно потребовать двукратной дифференцируемости функции связи $\varphi(x)$ для $x \in [-1, 1]$.) Тогда, согласно Теореме 3, сформулированной и доказанной в приложении, функция $f_N(x)$ равномерно аппроксимируется выражением $f_N(x) = C_A\psi(x)\,a^N + C_B\cdot 2^N + O\left(\left|\frac{2}{a}\right|^N\right)$ и, следовательно,

$$\varphi_N(x) = C_A\,\Phi_A(x)\,a^N + C_B\Phi_B(x)\cdot 2^N C + O\left(\left|\frac{2}{a}\right|^N\right), \tag{10}$$

где C_A и C_B — постоянные, зависящие от начальной функции $\varphi(x)$; $\Phi_A(x) = g'(x)\,\psi(x)$, $\Phi_B(x) = g'(x)$, функция $\psi(x)$ введена в приложении. Графики функций $\Phi_A(x)$ и $\Phi_B(x)$ показаны на рис. 2. Поскольку функция $\varphi_N(x)$ характеризует связь между ячейками цепочки, будем трактовать каждый из двух членов в (10) как определенный тип связи, A-и B-тип соответственно. Таким образом, вопрос о поведении цепочек рассматриваемого вида после большого числа удвоений периода сводится к изучению цепочек с функциями связи $C_A\Phi_A(x) + C_B\Phi_B(x)$, т. е. радикально упрощается по сравнению с исходной постановкой задачи, содержавшей произвольную функцию $\varphi(x)$[2]. Условием одинакового поведения двух различных цепочек в критической точке является равенство соответствующих коэффициентов C_A и C_B. Из этого следует, что нужно уметь находить C_A и C_B для конкретных систем; один метод их определения указан ниже.

3. Как известно [2], отображение (2) имеет при $\lambda = \lambda_c$ неустойчивые циклы периода 2^N, $N = 0, 1, \ldots \infty$. Определим мультипликатор 2^N-цикла $\mu_N(\beta)$ — величину, показывающую, во сколько раз изменяется за период цикла малое возмущение вида $e^{i\beta m}$ на фоне соответствующего этому циклу пространственно-однородного решения. Как видно из (5), ренормированное значение x, отвечающее 2^N-циклу при больших N есть $x_* = 0{,}5439$ — корень уравнения $x = g(x)$ [2]. Подставляя $x = x_*$ в уравнение (5), используя (10) и определение μ_N, получим:

$$\mu_N(\beta) = \mu_* + (c_A a^N + c_B\cdot 2^N)\,\beta^2 \text{ (для достаточно больших } N), \tag{11}$$

где $$\mu_* = g'(x_*) \doteq -1{,}60119;\quad c_{A,B} = C_{A,B}\Phi_{A,B}(x_*).$$

Если для какой-либо цепочки вычислены мультипликаторы двух циклов в критической точке, то из (11) находятся коэффициенты c_A и c_B. Тогда можно описывать цепочку моделью, составленной из систем (2):

$$x_{n+1,m} = 1 - \lambda x_{n,m}^2 + 1{,}0979\,c_A\,(-x_{n,m-1} + 2x_{n,m} - x_{n,m+1}) + \\ + (0{,}8751\,c_B - 0{,}135\,c_A)\,(-x_{n,m+1}^2 + 2x_{n,m}^2 - x_{n,m+1}^2). \tag{12}$$

Численные коэффициенты выбраны здесь так, чтобы мультипликаторы 2^N-циклов выражались через входящие в (12) параметры c_A и c_B в соответствии с (11). Заметим, что модель (12) можно использовать и в окрестности критической точки, если обеспечить соответствие с моделируемой системой по параметру $(\lambda - \lambda_c)K^{-1}$.

4. Продемонстрируем применимость развитой теории к системе, представляющей практический интерес, и опишем расчеты, которые необходимо выполнить для определения параметров модели. Рассмотрим цепочку параметрически возбуждаемых нелинейных осцилляторов [5]:

$$\ddot{X}_m + \lambda\dot{X}_m + \left(1 + q\cos\frac{2\pi t}{T}\right)X_m + X_m^3 = \varepsilon\Psi(X_{m-1}, X_m, X_{m+1}, \\ \dot{X}_{m-1}, \dot{X}_m, \dot{X}_{m+1}), \tag{13}$$

[2]) Цепочка с чистой B-связью исследована в [10].

где X_m — обобщенная координата m-го осциллятора; λ, q, T — параметры; функция Ψ определяет связь между осцилляторами; ε — коэффициент связи. Исследуем три способа введения связи:

$$1)\ \Psi_1 = x_{m-1} - 2X_m + X_{m+1}\,;\ 2)\ \Psi_2 = X_m^2\,(X_{m-1} - 2X_m + X_{m+1})\,;$$

$$3)\ \Psi_3 = \dot{X}_{m-1} - 2\dot{X}_m + \dot{X}_{m+1}\,.$$

Пространственно-однородное решение описывается уравнением

$$\ddot{X} + \lambda \dot{X} + \left(1 + q\cos\frac{2\pi t}{T}\right) X + X^3 = 0. \tag{14}$$

Малые возмущения этого решения вида $\xi e^{i\beta m}$ для трех указанных способов введения связи подчиняются при $\beta^2 \ll 1$ линейным уравнениям:

$$\ddot{\xi} + \lambda\dot{\xi} + \left(1 + q\cos\frac{2\pi t}{T}\right)\xi + 3X^2\xi = \begin{cases} -\,\varepsilon\beta^2\xi \\ -\,\varepsilon\beta^2 X^2\xi. \\ -\,\varepsilon\beta^2\dot{\xi} \end{cases} \tag{15}$$

При фиксированных q, T решение (14) претерпевает удвоения периода при уменьшении λ. Проследив за последовательностью удвоений, можно найти критическую точку λ_c. В частности, при $q = 6$, $2\pi/T = 2{,}04$ было получено $\lambda_c = 0{,}97723$, $K = -0{,}1505$. Для поиска цикла периода $2^N T$ при $\lambda = \lambda_c$ уравнение (14) решается численно на отрезке $[0, 2^N T]$ с начальными условиями $(X(0),\ \dot{X}(0))$. Уточненное положение начальной точки на цикле определяется по формулам

$$X_{\text{ут}}(0) = X(0) + [X(2^N T) - X(0)]\,(1 - \mu_*)^{-1},$$
$$\dot{X}_{\text{ут}}(0) = \dot{X}(0) + [\dot{X}(2^N T) - \dot{X}(0)]\,(1 - \mu_*)^{-1};$$

в случае необходимости итерация повторяется. После того, как цикл найден, на том же отрезке времени совместно решаются уравнения (14) и (15), причем ищутся два линейно-независимых решения (15) с начальными условиями $\xi = 1$, $\dot{\xi} = 0$ и $\xi = 0$, $\dot{\xi} = 1$. Из величин $\xi(2^N T)$ и $\dot{\xi}(2^N T)$, отвечающих этим решениям, составляется матрица 2×2, собственные числа которой есть мультипликаторы. При больших N один мультипликатор стремится к нулю, а второй представляется в виде $\mu_N = \mu_* + \varepsilon\varkappa_N\beta^2$. В таблице приведены значения $\varkappa_N$, вычисленные для

Таблица

	F_1			F_2			F_3		
N	$\varkappa_N$	c_A/ε	c_B/ε	$\varkappa_N$	c_A/ε	c_B/ε	$\varkappa_N$	c_A/ε	c_B/ε
1	3,570			1,982			3,431		
2	−1,931	−0,805	0,778	−2,602	−0,583	0,262	11,29	0,392	2,208
3	18,56	−0,795	0,762	11,21	−0,582	0,261	11,17	0,404	2,189
4	−19,11	−0,796	0,759	−18,80	−0,584	0,257	51,11	0,407	2,195

трех способов введения связи, а также найденные с помощью (11) по каждой паре $\varkappa_N$, $\varkappa_{N+1}$ коэффициенты c_A/ε, c_B/ε. Приближенное постоянство коэффициентов в каждом столбце означает, что введенные A- и B-типы связи имеют смысл для цепочки (13). При выборе c_A и c_B, согласно данным таблицы, модель (12) должна правильно описывать цепочку осцилляторов вблизи критической точки[3]).

[3]) Заметим, что, согласно результатам расчетов, c_A и c_B зависят от параметров задачи q, T.

Проведенный анализ касался динамики малых возмущений пространственно-однородного решения задачи. Поэтому он дает лишь необходимые условия соответствия модели и системы. Однако численные эксперименты показывают, что количественное соответствие между динамикой цепочки (13) и модели (12) сохраняется и для конечных возмущений.

Приложение

В проведенных ниже рассуждениях используются без оговорок некоторые свойства функции Фейгенбаума $g(x)$, представляющей собой решение функционального уравнения (8). Эти свойства установлены в [2—4]. В частности, функция $g(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ ограничена и имеет ограниченную производную. Для любого $x \in [-1, 1]$ и $i > 0$ справедливо $g^i(x) \in [-1, 1]$. Здесь и далее используется обозначение $g^i(x) = \underbrace{g(g(\ldots g}_{i \text{ раз}}(x)\ldots))$. Через $\hat{L}$ обозначается линейный оператор, определенный соотношением (9).

Лемма. Пусть $x, y \in [-1, 1]$, κ и i — целые, $\kappa \geqslant 0$, $0 < i \leqslant 2^\kappa$. Тогда

$$\Delta_\kappa^i = |g^i(x/a^\kappa) - g^i(y/a^\kappa)| < \frac{|x-y|}{|a|^{\kappa-1}} \leqslant \frac{2}{|a|^{\kappa-1}}.$$

Доказательство. Для $\kappa = 0$, $i = 1$ имеем:

$$|g(x) - g(y)| < \max_{|x|<1} |g'(x)|\,|x-y| = |g'(1)|\,|x-y| = |a|\,|x-y| \leqslant 2|a|.$$

Предположим, что утверждение Леммы справедливо при некотором κ. Покажем, что это влечет его справедливость для $\kappa + 1$.

а) Пусть i — четное, $i = 2m$, $0 < m \leqslant 2^\kappa$. Используя (8), имеем:

$$\Delta_{\kappa+1}^{2m} = \left| g^{2m}\left(\frac{x}{a^{\kappa+1}}\right) - g^{2m}\left(\frac{y}{a^{\kappa+1}}\right) \right| = \left| \frac{1}{a} g^m\left(\frac{x}{a^\kappa}\right) - \frac{1}{a} g^m\left(\frac{y}{a^\kappa}\right) \right| < \frac{|x-y|}{|a|^\kappa} \leqslant \frac{2}{|a|^\kappa}.$$

б) Пусть i — нечетное, $i = 2m+1$, $0 \leqslant m < 2^\kappa$. Обозначим $g^{2m+1}\left(\frac{x}{a^{\kappa+1}}\right) = \xi$, $g^{2m+1}\left(\frac{y}{a^{\kappa+1}}\right) = \eta$ и оценим разность $\Delta_{\kappa+1}^{2m+1} = |\xi - \eta|$.

Заметим, что $\xi = g\left(g^{2m}\left(\frac{x}{a^{\kappa+1}}\right)\right) = g(X)$, где $X = \frac{1}{a} g^m\left(\frac{x}{a^\kappa}\right) \in \left[-\frac{1}{|a|}, \frac{1}{|a|}\right]$, поскольку $\left| g^m\left(\frac{x}{a^\kappa}\right)\right| \leqslant 1$. Тогда $g\left(\frac{1}{a}\right) \leqslant \xi \leqslant 1$ (рис. 1) и аналогично $g\left(\frac{1}{a}\right) \leqslant \eta \leqslant 1$, $g\left(\frac{1}{a}\right) = 0{,}7589$. Согласно пункту (а),

$$|g(\xi) - g(\eta)| = \Delta_{\kappa+1}^{2m+2} < \frac{|x-y|}{|a|^\kappa} \leqslant \frac{2}{|a|^\kappa}. \tag{П.1}$$

С другой стороны,

$$|g(\xi) - g(\eta)| > \min |g'(\xi)|\,|\xi - \eta| > |\xi - \eta|, \tag{П.2}$$

поскольку $\min |g'(\xi)| = \left|g'\left(g\left(\frac{1}{a}\right)\right)\right| \approx 2{,}10$. Сопоставляя (П.1) и (П.2), имеем:

$$\Delta_{\kappa+1}^{2m+1} = |\xi - \eta| < |g(\xi) - g(\eta)| < \frac{|x-y|}{|a|^\kappa} \leqslant \frac{2}{|a|^\kappa}.$$

По индукции Лемма справедлива для всех κ.

Исследуем многократное действие оператора $\hat{L}$ на некоторые классы функций.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ равномерно ограничена на отрезке $[-1, 1]$; $|f(x)| < C$, то $|\hat{L}^\kappa f(x)| < C \cdot 2^\kappa$.

Доказательство. Запишем результат κ-кратного действия оператора $\hat{L}$ на функцию $f(x)$:

$$\hat{L}^\kappa f(x) = \sum_{i=0}^{2^\kappa - 1} f\left(g^i\left(\frac{x}{a^\kappa}\right)\right). \tag{П.3}$$

Оценим модуль правой части (П.3):

$$\left|\sum_{i=0}^{2^\kappa-1} f\left(g^i\left(\frac{x}{a^\kappa}\right)\right)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{2^\kappa-1}\left|f\left(g^i\left(\frac{x}{a^\kappa}\right)\right)\right| < C \cdot 2^\kappa.$$

Теорема 2. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица $|f(x) - f(y)| < K|x-y|$, где x, $y \in [-1, 1]$, K — фиксированная константа, то существуют такие константы C и P, что

$$|\hat{L}^\kappa f(x) - C \cdot 2^\kappa| < P\left|\frac{2}{a}\right|^\kappa.$$

Доказательство. Согласно (П.3),

$$\hat{L}^{\kappa+1} f(x) = \sum_{i=0}^{2^\kappa-1}\left[f\left(g^i\left(\frac{x}{a^{\kappa+1}}\right)\right) + f\left(g^i\left(\frac{y}{a^{\kappa+1}}\right)\right)\right],$$

где $y = a^\kappa g^{2^\kappa}(x/a^{\kappa+1})$. С помощью (8) можно показать, что $y = g(x/a) \in [-1, 1]$. Оценим $\Delta = |\hat{L}^{\kappa+1} f(x_1) - 2\hat{L}^\kappa f(x_2)|$, где x_1, $x_2 \in [-1, 1]$. Обозначая $y_{1,2} = g(x_{1,2})$, имеем

$$\Delta = \left|\sum_{i=0}^{2^\kappa-1}\left\{\left[f\left(g^i\left(\frac{x_1}{a^{\kappa+1}}\right)\right) - f\left(g^i\left(\frac{x_2}{a^{\kappa+1}}\right)\right)\right] + \left[f\left(g^i\left(\frac{y_1}{a^\kappa}\right)\right) - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - f\left(g^i\left(\frac{y_2}{a^\kappa}\right)\right)\right]\right\}\right| < K\sum_{i=0}^{2^\kappa-1}\left[\left|g^i\left(\frac{x_1}{a^{\kappa+1}}\right) - g^i\left(\frac{x_2}{a^{\kappa+1}}\right)\right| + \right.$$

$$\left. + \left|g^i\left(\frac{y_1}{a^\kappa}\right) - g^i\left(\frac{y_2}{a^\kappa}\right)\right|\right].$$

Используем Лемму:

$$\Delta < K \cdot 2^\kappa (|x_1 - x_2||a|^{-\kappa} + |y_1 - y_2||a|^{-\kappa-1}) < Q\left|\frac{2}{a}\right|^\kappa,$$

$$Q = 2K(1 + |a|). \tag{П.4}$$

Полагая 1) $x_1 = x_2 = x$, 2) $x_1 = x$, $x_2 = 0$, 3) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, находим следующие неравенства:

$$|\Phi_{\kappa+1}(x) - \Phi_\kappa(x)| < Q|a|^{-\kappa}, \tag{П.5}$$

$$|\Phi_{\kappa+1}(x) - \Phi_\kappa(0)| < Q|a|^{-\kappa}, \tag{П.6}$$

$$|\Phi_{\kappa+1}(0) - \Phi_\kappa(0)| < Q|a|^{-\kappa}, \tag{П.7}$$

где введено обозначение $\Phi_\kappa(x) = 2^{-\kappa}\hat{L}^\kappa f(x)$. Из (П.7) следует, что по критерию Коши [11, с. 40] последовательность $\Phi_\kappa(0)$ имеет предел $\lim\limits_{\kappa\to\infty}\Phi_\kappa(0)=C$. Из (П.6) видно, что это же число C является пределом последовательности $\Phi_\kappa(x)$ при любом $x\in[-1,\ 1]$.

Пусть $\Delta_\kappa(x)=\Phi_{\kappa+1}(x)-\Phi_\kappa(x)$, тогда $\sum\limits_{\kappa=m}^{m+N-1}\Delta_\kappa=\Phi_{m+N}-\Phi_m$. Предел правой части при $N\to\infty$ существует, следовательно, $\sum\limits_{\kappa=m}^{\infty}\Delta_\kappa=$ $=C-\Phi_m$. Согласно (П.5), $|\Delta_\kappa(x)|<Q|a|^{-\kappa}$. Поэтому

$$|\Phi_m-C|=\left|\sum_{\kappa=m}^{\infty}\Delta_\kappa\right|\leqslant\sum_{\kappa=m}^{\infty}|\Delta_\kappa|<\sum_{\kappa=m}^{\infty}Q|a|^{-\kappa}=P|a|^{-m},$$

где $P=Q[1-|a|^{-1}]^{-1}$. Отсюда вытекает утверждение Теоремы 2.

Теорема 3. Пусть $f(x)=\dfrac{1}{x}+\tilde f(x)$, где $\tilde f(x)$ — функция, удовлетворяющая условию Липшица $|\tilde f(x)-\tilde f(y)|<K|x-y|$, x, $y\in$ $\in[-1,\ 1]$, K — фиксированная постоянная. Тогда существуют такие константы C, P и функция $\psi(x)$, что для любого $x\in[-1,\ 1]$ справедливо неравенство

$$|\hat L^\kappa f(x)-a^\kappa\psi(x)-C\cdot 2^\kappa|<P\left|\frac{2}{a}\right|^\kappa. \tag{П.8}$$

Докажем последовательно ряд утверждений.

1. Имеет место неравенство

$$\left|f_\kappa(x)-\frac{a^\kappa}{x}\right|<M|a|^\kappa, \tag{П.9}$$

где $f_\kappa(x)=\hat L^\kappa f(x)$; $x\in[-1,\ 1]$; M — константа.

При $\kappa=0$ утверждение справедливо, если положить $M>2K$.

Предположим, что (П.9) выполнено для некоторого κ. Тогда для $\kappa+1$ имеем:

$$\left|f_{\kappa+1}(x)-\frac{a^{\kappa+1}}{x}\right|=\left|f_\kappa\left(\frac{x}{a}\right)+f_\kappa\left(g\left(\frac{x}{a}\right)\right)-\frac{a^{\kappa+1}}{x}\right|\leqslant\left|f_\kappa\left(\frac{x}{a}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{a^\kappa}{(x/a)}\right|+\left|f_\kappa\left(g\left(\frac{x}{a}\right)\right)-\frac{a^\kappa}{g(x/a)}\right|+\left|\frac{a^\kappa}{g(x/a)}\right|\leqslant\left[2M+\frac{1}{g(1/a)}\right]|a|^\kappa,$$

где использовано, что $\min\limits_{|x|<1}g(x/a)=g(1/a)$. Потребуем, чтобы выражение в квадратных скобках было меньше, чем $M|a|$. Это обеспечено при $M>\dfrac{1}{(|a|-2)\,g(1/a)}\approx 2{,}62$. Тогда $|f_{\kappa+1}(x)-a^{\kappa+1}/x|<$ $<M|a|^{\kappa+1}$. По индукции заключаем, что неравенство (П.9) верно для любых κ, если выбрать $M>\max\ [2{,}63;\ 2K]$.

2. Существует предел $\lim\limits_{\kappa\to\infty}[\hat L^\kappa f(x)/a^\kappa]=\psi(x)$.

Введем обозначение $\psi_\kappa(x)=\hat L^\kappa f(x)/a^\kappa=f_\kappa(x)/a^\kappa$ и рассмотрим модуль разности

$$|\psi_{\kappa+1}(x)-\psi_\kappa(x)|=|a|^{-\kappa-1}|f_{\kappa+1}(x)-af_\kappa(x)|=$$
$$=|a|^{-\kappa}|\hat L^\kappa[f_1(x)-af(x)]|.$$

Функция $f_1(x) - af(x)$ равномерно ограничена:

$$|f_1(x) - af(x)| = |f(x/a) + f(g(x/a)) - af(x)| =$$

$$/a \qquad = |\tilde{f}(x/a) + a/g(x/a) + \tilde{f}(g(x/a)) - a\tilde{f}(x)| <$$

$$< (2 + |a|)K + |a/g(1/a)| = D.$$

Поэтому по Теореме 1 $|f_{\kappa+1}(x) - af_\kappa(x)| < D\cdot 2^\kappa$ и $|\psi_{\kappa+1}(x) - \psi_\kappa(x)| < \frac{D}{|a|}\left|\frac{2}{a}\right|^\kappa$. Правая часть последнего выражения стремится к нулю при $\kappa\to\infty$. Согласно критерию равномерной сходимости последовательности функций [11, с. 546], отсюда следует существование предела $\lim\limits_{\kappa\to\infty}\psi_\kappa(x) = \psi(x)$. Функция $\psi(x)$ — собственная функция оператора $\hat{L}$ с собственным числом a. Действительно, при больших κ $\psi_{\kappa+1}(x) \approx \approx \psi_\kappa(x) \approx \psi(x)$, т. е. $\hat{L}\psi = a\psi$.

Если положить $f(x) = 1/x$, то получим:

$$\psi(x) = \lim_{\kappa\to\infty}\frac{\hat{L}^\kappa f(x)}{a^\kappa} = \lim_{\kappa\to\infty}\left\{\frac{1}{x} + \sum_{i=1}^{2^\kappa-1}[a^\kappa g^i(x/a^\kappa)]^{-1}\right\}.$$

Выбирая κ большим, но конечным, можно использовать это представление функции $\psi(x)$ для ее вычисления.

3. Функция $\tilde{\psi}(x) = \psi(x) - 1/x$ удовлетворяет условию Липшица:

$$|\tilde{\psi}(x) - \tilde{\psi}(y)| < S|x - y|, \tag{П.10}$$

где x, $y\in[-1,\ 1]$; S — надлежащим образом выбранная константа.

Если мы покажем, что неравенство вида (П.10) выполняется для функций $\psi_\kappa(x) = f_\kappa(x)/a^\kappa$ при любом κ, то оно справедливо и для предельной функции $\psi(x)$. Для $\kappa = 0$ неравенство имеет место по условию Теоремы 3. Предположим, что оно справедливо для некоторого κ. Тогда для $\kappa+1$ имеем:

$$|\tilde{\psi}_{\kappa+1}(x) - \tilde{\psi}_{\kappa+1}(y)| = \left|\left[\frac{f_\kappa(x/a) - f_\kappa(y/a)}{a^{\kappa+1}} - \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right] + \right.$$

$$+ \frac{1}{a}\left[\frac{f_\kappa(g(x/a)) - f_\kappa(g(y/a))}{a^\kappa} - \frac{1}{g(x/a)} + \frac{1}{g(y/a)}\right] +$$

$$\left. + \frac{1}{ag(x/a)} - \frac{1}{ag(y/a)}\right| < S\left|\frac{x-y}{a}\right| + \frac{S}{|a|}\left|g\left(\frac{x}{a}\right) - \right.$$

$$\left. - g\left(\frac{y}{a}\right)\right| + \frac{1}{|a|}\left|\frac{1}{g(x/a)} - \frac{1}{g(y/a)}\right|.$$

Используя неравенства

$$|g(x/a) - g(y/a)| \leqslant \max_{|x|\leqslant 1}\left|g'\left(\frac{x}{a}\right)\right|\left|\frac{x}{a} - \frac{y}{a}\right| =$$

$$= \left|\frac{x}{a} - \frac{y}{a}\right|\left|g'\left(\frac{1}{a}\right)\right|,$$

$$|1/g(x/a) - 1/g(y/a)| \leqslant |g'(1/a)|\left|\frac{x}{a} - \frac{y}{a}\right|\left[\min_{|x|\leqslant 1}\left|g\left(\frac{x}{a}\right)\right|\right]^{-2} =$$

$$= |g'(1/a)|\left|\frac{x}{a} - \frac{y}{a}\right||g(1/a)|^{-2},$$

получаем:

$$|\tilde{\psi}_{\kappa+1}(x) - \tilde{\psi}_{\kappa+1}(y)| \leqslant \left[S\left(\frac{1}{|a|} + \frac{|g'(1/a)|}{a^2}\right) + \left|\frac{g'(1/a)}{a(g'(1/a))^2}\right|\right] |x-y|.$$

Правая часть меньше, чем $S|x-y|$, если положить

$$S > |g'(1/a)||a|(g(1/a))^2(1-1/|a|-|g'(1/a)|/|a|^2)^{-1} \approx 2{,}0184.$$

Следовательно, (П.10) выполнено, если $S > \max[K;\ 2{,}1]$.

4. Используя полученные результаты, нетрудно убедиться в справедливости Теоремы 3. Очевидно, функция $F(x) = f(x) - \psi(x)$ удовлетворяет условию Липшица:

$$|F(x) - F(y)| \leqslant |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| + |\tilde{\psi}(x) - \tilde{\psi}(y)| = (K+S)|x-y|.$$

Согласно Теореме 2, существуют такие C и P, что

$$|\hat{L}^{\kappa}(f(x) - \psi(x)) - C\cdot 2^{\kappa}| < \left|\frac{2}{a}\right|^{\kappa} \cdot P.$$

Как было показано, $\hat{L}\psi = a\psi$. Поэтому отсюда следует (П.8).

Автор благодарен Д. И. Трубецкову за полезное обсуждение, А. П. Кузнецову и А. Г. Рожневу за помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М., Наука, 1972.
2. Feigenbaum M. J. J. Stat. Phys., 1978, **19**, № 1, 25.
3. Feigenbaum M. J. J. Stat. Phys., 1979, **21**, № 6, 669.
4. Feigenbaum M. J. Commun. Math. Phys., 1980, **77**, 65.
5. Izrailev F. M., Rabinovich M. I., Ugodnikov A. D. Phys. Lett., 1981, **A86**, № 6—7, 321.
6. Testa J., Perez J., Jeffries C. Phys. Rev. Lett., 1982, **48**, №11, 74.
7. Сб.: Странные аттракторы. М., Мир. 1981.
8. Eckmann J. D. Rev. Mod. Phys., 1981, **53**, № 4, Part. 1, 643.
9. Kai T. Phys. Lett., 1981, **A6**, № 5, 263.
10. Кузнецов С. П. Изв. вузов, Радиофизика, 1982, **25**, 1364.
11. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. **1**, М., Высшая школа, 1973.

Саратовский госуниверситет

Поступила в редакцию
после доработки 10 ноября 1983 г.