Письма в ЖЭТФ, том 39, вып. 3, стр. 113 – 116 *10 февраля 1984 г.*

О ВОЗДЕЙСТВИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ВНЕШНЕГО ВОЗМУЩЕНИЯ НА СИСТЕМУ, ДЕМОНСТРИРУЮЩУЮ ПЕРЕХОД ПОРЯДОК – ХАОС ЧЕРЕЗ БИФУРКАЦИИ УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА

С.П.Кузнецов

Исследуется влияние периодического воздействия на динамику модельной системы, демонстрирующей переход к хаосу через удвоения периода. Указан закон подобия и описана структура пространства параметров в области малых амплитуд воздействия.

В последнее время большое внимание уделяется исследованию перехода динамических систем от периодического поведения к хаотическому при изменении параметров [1–8]. Один из типичных сценариев перехода порядок – хаос связан с существованием бесконечной последовательности бифуркаций удвоения периода движений, подчиняющейся законам подобия Фейгенбаума [2,3]. Такой переход наблюдался в численных и физических экспериментах у механических, радиотехнических, гидродинамических систем [4–7]. Один из замечательных результатов Фейгенбаума [3] состоит в том, что независимо от конкретной природы уравнений системы, ее поведение в окрестности точки перехода можно изучать с помощью модели – одномерного рекуррентного отображения, например,

$$x_{m+1} = \lambda - x_m^2 . \qquad (1)$$

Система (1) демонстрирует удвоения периода при увеличении параметра λ. Последовательность бифуркационных значений λ_n^0 дается формулой Фейгенбаума $\lambda_n^0 = \lambda_c^0 - K\delta^{-n}$ (справедлива, строго говоря, при больших n). Здесь $\delta = 4{,}6692$ – универсальная константа, а $\lambda_c^0 = 1{,}40116$ и $K = 0{,}7242$ – константы, специфичные для системы (1).

Рассмотрим воздействие малого периодического возмущения на систему, которая в отсутствие возмущения демонстрирует переход к хаосу через удвоения периода и описывается, следовательно, моделью (1). Согласно [2], λ есть единственный существенный параметр модели, поэтому именно влияние периодического изменения этого параметра следует рассмотреть. Итак, анализируется модель

$$x_{m+1} = \lambda + A\cos(2\pi m w + \theta) - x_m^2 , \qquad (2)$$

где A – амплитуда, θ – начальная фаза возмущения, w – число вращения, определяющееся соотношением периодов собственного движения и внешнего воздействия. Режимам синхронизации соответствуют рациональные значения w, а режимам биений – иррациональные. Приводимые далее результаты представляют собой обобщение материала, полученного численно для модели (2). Однако они являются столь же общими, как и результаты Фейгенбаума. Это может быть показано с помощью ренормгруппового подхода, что, однако, выходит за рамки данного сообщения.

Как известно, в интервале между двумя бифуркационными значениями параметра $\lambda_n^0 < \lambda < \lambda_n^0$ невозмущенная система имеет устойчивый режим движения – цикл периода 2. Если не рассматривать области, прилегающие к концам интервала, то и при включенном возмущении движение происходит вблизи 2^n-цикла (тем ближе, чем меньше возмущение). При рациональном числе вращения $w = p/q$ это периодическое движение с периодом N, равным наименьшему общему кратному чисел 2^n и q, а при иррациональном – квазипериодическое движение. Особый интерес представляет окрестность точки λ_n^0, поскольку именно там происходит бифуркация – переход от движения вблизи 2^n-цикла невозмущенной системы к движению вблизи 2^{n+1}-цикла.

Пусть сначала число вращения рационально. Рассмотрим N-цикл возмущенной системы при $\lambda \approx \lambda_n^0$. В силу малости возмущения, один из элементов этого цикла x_0 близок к элементу 2^n-цикла невозмущенной системы $\bar{x}_0$. Нас будет интересовать параметр $\mu = \partial x_N / \partial x_0$ – мультипликатор N-цикла, а также связанный с ним ляпуновский характеристический показатель $\gamma = {}^1/_N \ln |\mu|$. Очевидно, устойчивому циклу отвечают $|\mu| < 1$, $\gamma < 0$, а неустойчивому $|\mu| > 1$, $\gamma > 0$. Из уравнения $|\mu| = 1$ или $\gamma = 0$ можно отыскать поверхность в пространстве параметров, на которой происходит бифуркация.

Чтобы найти μ и γ, представим величину x_N в виде ряда по степеням $\Lambda = \lambda - \lambda_n^0$, $\xi = x_0 - \bar{x}_0$ и A. Коэффициенты ряда (частные производные от x_N в точке $\Lambda = 0$, $\xi = 0$, $A = 0$) могут быть вычислены с помощью рекуррентных формул, получаемых дифференцированием соотношения (2):

$$x_{m+1} = \lambda_n^0 - x_m^2; \quad x_{m+1,\Lambda} = -2x_m x_{m,\Lambda} + 1; \quad x_{m+1,A} = -2x x_{m,A} + \cos(2\pi m w + \theta);$$

$$x_{m+1,\xi} = -2x_m x_{m,\xi}; \quad x_{m+1,A\xi} = -2(x_m x_{m,A\xi} + x_{m,\xi} x_{m,A});$$

$$x_{m+1,AA} = -2(x_m x_{m,AA} + x_{m,A}^2); \tag{3}$$

$$x_{m+1,\Lambda\xi} = -2(x_m x_{m,\Lambda\xi} + x_{m,\Lambda} x_{m,\xi});$$

$$x_{m+1,AA\xi} = -2(x_m x_{m,AA\xi} + x_{m,\xi} x_{m,AA} + 2x_{m,A} x_{m,A\xi}),$$

причем $x_N = x_0$, $x_{N,\Lambda} = x_{0,\Lambda}$, $x_{N,A} = x_{0,A}$, $x_{N,AA} = x_{0,AA}$, $x_{0,\xi} = 1$, $x_{0A\xi} = 0$, $x_{0,AA\xi} = 0$, $x_{0,\Lambda\xi} = 0$. Используя (3), можно показать, что если $q \neq 2^k$, то $x_{N,A} = 0$, а $x_{N,AA}$ не зависит от фазы θ [1]. Учитывая, что $\mu = -1$ при $\Lambda = 0$, $A = 0$, имеем:

$$\mu \approx -1 + x_{N,\Lambda\xi}\Lambda + x_{N,AA}\frac{A^2}{2} = -1 - C_n\Lambda + D_n(w)A^2; \quad \gamma \approx \frac{C_n\Lambda - D_n(w)A^2}{N} \tag{4}$$

Таким образом, при введении возмущения μ остается действительным; бифуркация происходит при

$$\mu = -1, \text{ т. е. } \Lambda_n = D_n(w)A^2/C_n \text{ или } \lambda_n = \lambda_n^0 + D_n(w)A^2/C_n. \tag{5}$$

Как известно [9], переход мультипликатора через -1 сопровождается бифуркацией удвоения периода, в данном случае, рождением $2N$-цикла.

---

[1] Случай $q = 2^k$ не представляет особого интереса, так как после k-кратного удвоения периода влияние возмущения сводится к постоянной поправке к λ, и переход к хаосу происходит по Фейгенбауму.

Исследуем зависимость коэффициентов в формуле (4) от n и w. Как известно из решения невозмущенной задачи [8], $C_n \sim \delta^n$, $\delta = 4{,}6692$. Чтобы установить закономерности, которым подчиняется коэффициент $D_n(w)$, проследим за поведением отношений $\Delta_n = D_{n+1}(w)/D_n(w)$. Как показывают численные расчеты, имеет место следующий закон подобия, справедливый при достаточно больших n (практически для $n \gtrsim 2$): при изменении числа вращения в 2^k раз последовательность $\Delta_n(w)$ сдвигается на k шагов: $\Delta_n(2^k w) = \Delta_{n+k}(w)$. Отсюда следует, что если число вращения представляется двоичной дробью с периодом k, то последовательность Δ_n также имеет период k: $\Delta_{n+k}(w) = \Delta_n(w)$.

Найденная численно зависимость Δ_n от w изображена на рис. 1 в координатах $\omega = 2^n w$, $\varphi = \ln \Delta_n$. При $n \geqslant 2$ точки, отвечающие разным n и w ложатся на одну кривую $\varphi = \varphi(\omega)$ [2)]. Это наводит на мысль, что φ и Δ_n имеют разумный смысл и для иррациональных w.

Рассмотрим последовательность периодических двоичных дробей, $w_i = p_i/q_i$, сходящихся к иррациональному пределу w. Каждой рациональной аппроксимации w_i соответствует цикл периода N_i, который бифурцирует при $\lambda_n(w_i)$ (см. (5)). Используя (3), можно показать, что при $w_i \to w$ имеют конечный предел следующие величины: $\lambda_n(w_i)$, $\Delta_n(w_i)$, $\varphi(w_i)$, $\gamma(w_i)$. Соответствующие предельные значения припишем функциям λ_n, Δ_n, φ, γ в иррациональной точке w. Заметим, что $\gamma(w) < 0$ при $\lambda < \lambda_n(w)$ и $\gamma(w) > 0$ при $\lambda > \lambda_n(w)$. Это значит, что при $\lambda = \lambda_n(w)$ происходит бифуркация квазипериодического движения, локализованного около 2^n-цикла невозмущенной задачи. Оно теряет устойчивость, и возникает другой устойчивый квазипериодический режим, локализованный около 2^{n+1}-цикла. По-видимому, именно такие бифуркации "удвоения торов" наблюдались в [5].

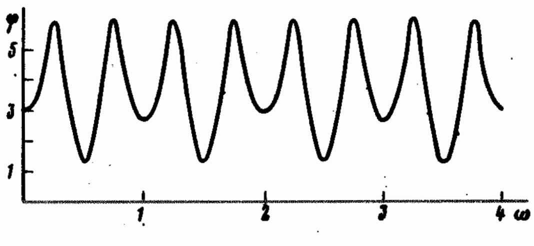

Рис. 1. График функции $\varphi(\omega)$

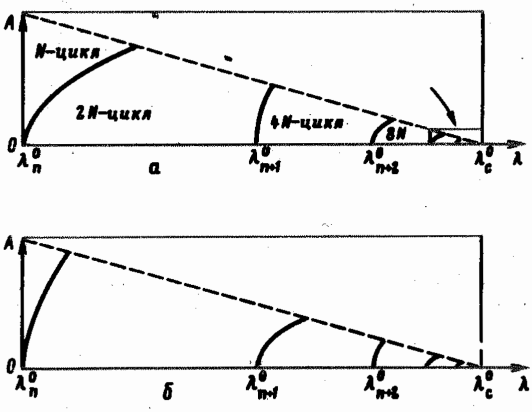

Рис. 2

Рис. 2. Схематическое изображение плоскости параметров (λ, A): *а* – для рационального w (двоичная дробь периода 3), *б* – для иррационального w. Сплошные кривые отвечают бифуркациям удвоения периода циклов *(а)* и бифуркациям "удвоения торов" *(б)*. Пунктир – условная граница применимости формул (4), (5). Рис. *(а)* воспроизводится в уменьшенном виде в прямоугольнике, показанном стрелкой. Масштаб не соблюден.

Теперь нетрудно составить представление о структуре пространства параметров (λ, A, w). Бифуркационные поверхности даются уравнением (5), в котором $D_n/C_n \sim \delta^{-n} \prod_{i=0}^{n-1} \Delta_n(w) \sim \delta^{-n} \exp \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(w \cdot 2^i)$. При рациональных w, представляющихся двоичными дробями

2) Как видно из рис. 1, зависимость $\varphi(\omega)$ является почти периодической и может быть аппроксимирована функцией периода 2^k. Погрешность такой аппроксимации быстро убывает при увеличении k.

периода k, конфигурация областей в плоскости (λ, A) переходит в себя при изменении масштаба относительно точки $(\lambda_c^0, 0)$ в δ^k раз по оси λ и в $\exp \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi(w \cdot 2^i)$ раз по оси A (рис. 2, *а*). Для иррациональных w масштабной инвариантности в обычном смысле слова нет (рис. 2, *б*). Однако для чисел w, принадлежащих множеству меры 1 на интервале $(0, 1)$, можно говорить о масштабной инвариантности областей в статистическом смысле. Вместо констант, характеризующих изменение масштаба по оси A при бифуркациях удвоения, теперь фигурируют случайные числа с определенными статистическими характеристиками. Эти характеристики можно найти с помощью функции φ, так как известно, что для выбранной случайным образом точки w дробная часть числа $2^n w$ с равной вероятностью распределена по всему интервалу $(0, 1)$. Поэтому, например, среднее значение логарифма масштабного фактора Δ_n есть просто $<\ln\Delta> = \frac{1}{2^k}\int_0^{2^k} \varphi(w)dw \approx 3{,}66$ (универсальная константа).

Литература

1. *Eckmann J.P.* Rev. Mod. Phys., 1981, **53**, 643.
2. *Feigenbaum M.J.* J. Stat. Phys., 1978, **19**, 25.
3. *Feigenbaum M.J.* Comm. Math. Phys., 1980, **77**, 65.
4. *D'Humieres D., Beasley M.R., Huberman B.A., Libchaber A.* Phys. Rev., 1982, **26 A**, 3483.
5. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Летчфорд Т.Е., Сафонова М.А.* Изв. высш. уч. зав., сер. Радиофизика, 1983, **26**, 832.
6. *Кузнецов С.П.* Изв. высш. уч. зав., сер. Радиофизика, 1982, **25**, 1364.
7. *Gollub J.P., Benson S.V.* J. Fluid Mech., 1980, **100**, 449.
8. *Geisel T., Nierwetberg J., Keller J.* Phys. Lett., 1981, **86 A**, 75.
9. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, 257.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию
31 октября 1983 г.