

МАСШТАБНО-ИНВАРИАНТНАЯ СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ ФЕЙГЕНБАУМА

С. П. Кузнецов

1. Изучение стохастических колебаний в динамических системах привело в последнее время к формированию нескольких универсальных моделей, описывающих поведение различных систем у порога возникновения хаоса [1]. Одна из этих моделей, именуемая далее системой Фейгенбаума, — это обобщенный образ нелинейной диссипативной системы, претерпевающей при изменении некоторого параметра λ переход к хаосу через иерархию бифуркаций удвоения периода, накапливающихся к критической точке λ_c [2]. Пространство параметров (ось λ) обладает вблизи критической точки масштабно-инвариантной структурой —

разбиение на области различных режимов переходит в себя при изменении масштаба в $\delta=4.669$ раз относительно точки λ_c . Примерами систем Фейгенбаума являются нелинейный диссипативный колебательный контур под внешним периодическим воздействием [3], контакт Джоузефсона в переменном высокочастотном поле [4], радиотехнический генератор с инерционной нелинейностью [5] и др. Самый простой пример — это модельная система [2]

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2, \quad (1)$$

где переменная x_n описывает состояние системы в момент времени n .

Естественный путь дальнейшего развития теории состоит в конструировании на базе системы Фейгенбаума более сложных объектов и изучении перехода порядок—хаос в них. Так, в работах [6–8] численно исследовалась система двух связанных элементов, описываемых уравнениями вида (1). При этом, однако, не были выявлены свойства универсальности и подобия, существования которых можно ожидать из-за наличия таковых у индивидуальных составляющих элементов. Как мы увидим, причина состоит в том, что анализировались двухпараметрические семейства систем, тогда как следует рассмотреть трехпараметрическое.

В работе [9] было показано, что, с точки зрения поведения связанных систем Фейгенбаума на больших интервалах времени, введенная произвольным образом слабая связь полностью характеризуется двумя параметрами α и β , которые по терминологии [9] соответствуют двум типам связи А и В. Эти типы связи различаются трансформационными свойствами относительно ренормгруппового преобразования [2]: одному отвечает масштабный фактор $a=-2.503$, а другому $b=2$. Из результатов [9] следует, что пространство параметров связанных систем (α, β, λ) имеет масштабно-инвариантную структуру вблизи точки $(0, 0, \lambda_c)$: точкам $(\alpha, \beta, \lambda_c + \Delta)$ и $(\alpha/a, \beta/b, \lambda_c + \Delta/\delta)$ соответствуют подобные режимы поведения систем с различающимися в 2 раза временным масштабом.

В настоящем сообщении изложены результаты численного исследования, конкретизирующие структуру пространства параметров связанных систем Фейгенбаума и подтверждающие указанный закон подобия.

2. Будем анализировать следующую систему двух идентичных симметрично связанных элементов, описываемых уравнениями вида (1):

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \varepsilon(x_n - y_n) + \mu(x_n^2 - y_n^2), \quad y_{n+1} = \lambda - y_n^2 + \varepsilon(y_n - x_n) + \mu(y_n^2 - x_n^2), \quad (2)$$

где ε и μ — параметры, характеризующие связь. В переменных $\xi_n = (x_n + y_n)/2$, $\eta_n = (x_n - y_n)/2$ эти уравнения принимают вид

$$\xi_{n+1} = \lambda - \xi_n^2 - \eta_n^2, \quad \eta_{n+1} = -2B(\xi_n + \alpha)\eta_n, \quad (3)$$

где $B=1-2\mu$, $\alpha=\varepsilon/(1-2\mu)$. Вместо тройки параметров (α, B, λ) будем использовать тройку (α, β, λ) , положив

$$B = e^{-\beta} (1 - 0.6025\alpha + 0.1019\alpha^2 - 0.0278\alpha\lambda)^{0.2779}. \quad (4)$$

Вид формулы (4) подобран численно таким образом, чтобы величины α и β как раз соответствовали коэффициентам двух типов связи [9]. Рассмотрим сначала чистую связь одного и другого типа.

3. Чистая В-связь: $\alpha=0$, $\beta > 0$.¹ В этом случае в области $\lambda < \lambda_c$ реализуются режимы устойчивых синфазных колебаний обеих связанных систем ($x_n \equiv y_n$, $\eta_n \equiv 0$). Период колебаний удваивается три тех же самых значениях λ , как и у отдельной системы Фейгенбаума (1).

При $\lambda > \lambda_c$ синфазное движение может потерять устойчивость, если ляпуновский ха-

рактеристический показатель аттрактора системы (1) $\gamma(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln |2x_n|$ (см. [10])

окажется больше β [11]. Таким образом, при $\lambda > \lambda_c$ имеются зоны синфазных хаотических колебаний ($0 < \gamma(\lambda) < \beta$), несинфазных колебаний ($\gamma(\lambda) > \beta$) и периодических синфазных колебаний ($\gamma(\lambda) \equiv 0$, «окна устойчивости» [2]). Конфигурация областей на плоскости (β, λ) показана на рис. 1. Заметим, что она переходит в себя при изменении масштаба в b раз по оси абсцисс и в δ раз по оси ординат относительно точки $(0, \lambda_c)$.

4. Чистая А-связь: $\alpha \neq 0$, $\beta=0$. Поверхность параметров (α, λ) оказывается полезным представлять склеенной из ряда листов. Один из них, S-лист, соответствует синфазным движе-

¹ Как видно из (3), (4), случай $\beta > 0$ отвечает тому, что В-связь способствует выравниванию состояний подсистем. Противоположный случай $\beta < 0$ может быть реализован только при наличии усиления в канале связи и здесь не рассматривается.

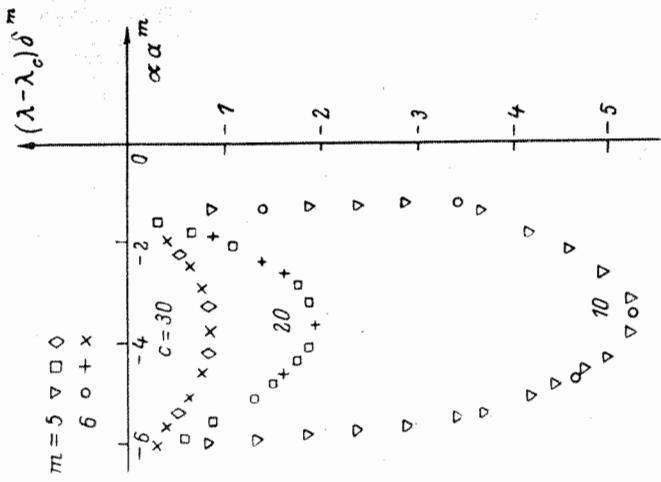


Рис. 1. Плоскость параметров (β, λ) для системы с чистой связью типа В. Области устойчивости синфазных циклов отмечены цифрами, означающими их период. Штриховкой показаны зоны синфазных стохастических колебаний; полностью заштрихованы области несинфазных режимов. Картина воспроизводится в уменьшенном виде внутри пунктирного прямоугольника.

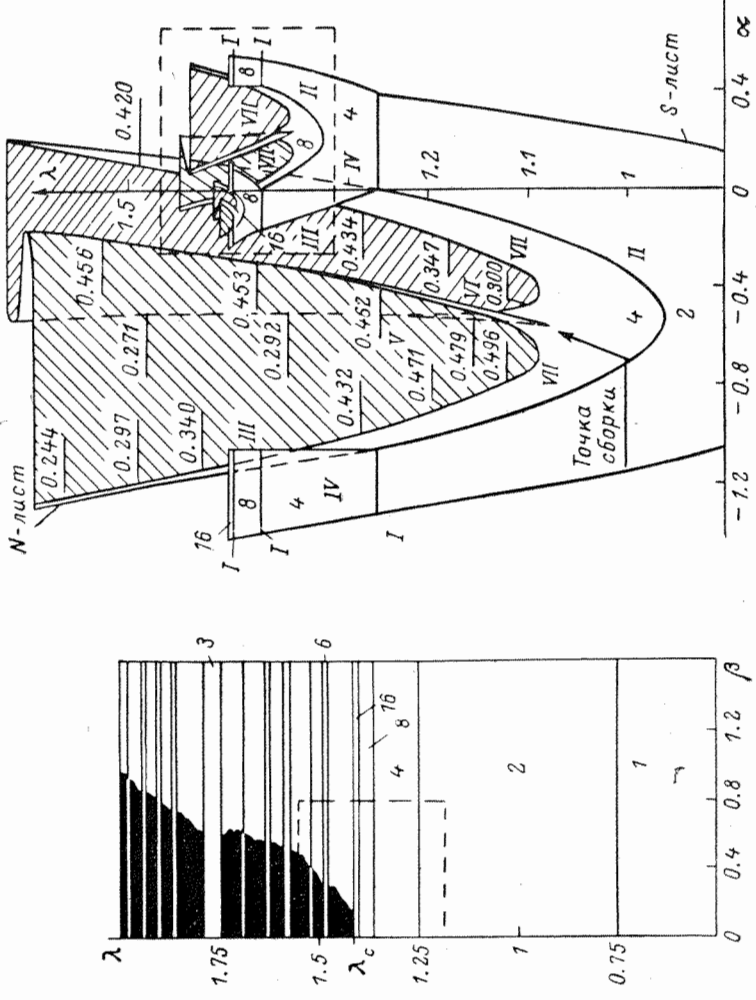


Рис. 2. Поверхность параметров (α, λ) для системы с чистой связью типа А.

S -лист соответствует связанным движениям связанных систем, а листы N — несинфазным. Светлые области на S - и N -листах отвечают устойчивым циклам, период которых указан цифрами. Бифуркационные линии отмечены римскими цифрами: I — линии удвоения периода синфазных циклов; II — линии удвоения периода для краев S -листа, при пересечении которых происходит переход на N -лист; III — край S -листа, при пересечении S - и N -листа; IV — край N -листа, при пересечении которых происходит переход на S -лист; V, VI — линии складок на N -листе; VII — линия складки Андронова—Хопфа с указанными рядами числами вращения для рождающегося квазипериодического аттрактора. Картина воспроизводится в уменьшенном виде внутри пунктирного прямоугольника с изменением ориентации относительно оси абсцисс.

Рис. 3. Границы областей устойчивости синфазных 2^m -циклов на поверхности $(\alpha, \beta=c | \lambda - \lambda_0 | \log \delta^b, \lambda)$.

ниям подсистем, а остальные, N -листы, — несинфазным. Листы считаются склеенными по линиям, пересечение которых ведет к мягкому переходу между синфазным и несинфазным режимами. Несклеенные края листов отражают наличие жесткой бифуркации скачка с листа на лист, сопровождаемой гистерезисом. Выявленная численно картина областей на поверхности (α, λ) показана на рис. 2. При численных расчетах четко фиксируется свойство подобия: конфигурация областей на рис. 2 воспроизводится при уменьшении масштаба в a раз по оси абсцисс и в b раз по оси ординат относительно точки $(0, \lambda_c)$.

При переходе через линию склеивания S - и N -листов снизу вверх возникает несинфазный цикл, которому соответствует движение подсистем с относительным сдвигом по фазе на полпериода

$$x_{n+M/2} = y_n, \quad y_{n+M/2} = x_n \quad \text{или} \quad \xi_{n+M/2} = \xi_n, \quad \eta_{n+M/2} = -\eta_n. \quad (5)$$

Период M для различных N -листов указан на рис. 2.

На каждом N -листе имеется точка сборки [12], к которой подходят линии складок, обозначенные на рис. 2 V и VI . При обходе вокруг точки сборки по часовой стрелке аттрактор (цикл (5)) эволюционирует непрерывно до пересечения линии VI , после чего режим меняется скачком, причем вновь возникший цикл по-прежнему подчиняется условиям (5). При обходе против часовой стрелки скачок произойдет на линии V .

Штриховкой на рис. 2 показаны области, в которых цикл (5) неустойчив. При пересечении границ этих областей происходит бифуркация Андронова—Хопфа с рождением квазипериодического аттрактора. Отношение периодов исходного цикла и вновь возникшей компоненты движения — число вращения w — указано рядом с бифуркационной линией. Внутри заштрихованных областей имеется тонкая структура: там существуют зоны синхронизации в форме языков, упирающихся остриями в точки бифуркационной линии с рациональными $w = p/q$. Внутри каждого языка вместо квазипериодического режима реализуется сложный цикл периода Mq . При углублении в заштрихованные области возникает хаос (см. также [6, 8]).

5. Комбинированная связь: $\alpha \neq 0, \beta < 0$. Наглядно изобразить структуру трехмерного пространства параметров трудно, поэтому ограничимся тем, что приведем краткое качественное ее описание и результаты количественной проверки соотношений подобия.

Представим себе, что в систему с чистой A -связью постепенно вводится B -связь и проследим за эволюцией областей на поверхности (α, λ) . Расчеты показывают, что при малых β структура этой поверхности в виде склеенных S - и N -листов, а также общее расположение областей на этих листах сохраняется. По мере увеличения β сначала малые, а затем большие языки зон несинфазных режимов поднимаются вверх и уходят в область $\lambda < \lambda_c$. Чтобы исчез каждый последующий язык, параметр β должен быть увеличен в 2 раза.

Для проверки закона подобия рассмотрим сечение пространства параметров (α, β, λ) поверхностью $\beta = c |\lambda - \lambda_c|^{\log_b a}$, где c — произвольная постоянная. При изменении масштаба по оси λ в b раз и по оси α в a раз конфигурация областей на данной поверхности должна переходить в себя, так как β при этом изменится в b раз. На рис. 3 в координатах $\alpha a^m, (\lambda - \lambda_c) b^m$ изображены линии потери устойчивости синфазных циклов периода 2^m на этих поверхностях при нескольких значениях m и c . Видно, что для разных m точки ложатся на одни и те же кривые.

Итак, перемещаясь в пространстве (α, β, λ) различными путями в общем направлении увеличения λ , можно видеть разные сценарии возникновения хаоса, например: 1) бесконечную последовательность удвоений периода; 2) любое конечное число удвоений, затем рождение квазипериодического режима и его последующее разрушение; 3) конечное число удвоений, затем скачкообразный переход к несинфазному хаосу. Свойство масштабной инвариантности нельзя обнаружить, изучая индивидуальные пути: оно выявляется лишь при анализе пространства параметров (α, β, λ) в целом.

Литература

- [1] Eckmann J. P. Roads to turbulence in dissipative dynamical systems. — Rev. Mod. Phys., 1981, v. 53, № 4, p. 643—654.
- [2] Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем. — УФН, 1983, т. 141, № 2, с. 343—374.
- [3] Testa J., Perez J., Jeffries C. Evidence for universal chaotic behaviour of a driven nonlinear oscillator. — Phys. Rev. Lett., 1982, v. 48, № 11, p. 714—717.
- [4] Yeh W., Kao Y. Universal scaling and chaotic behaviour of a Josephson junction analog. — Phys. Rev. Lett., 1982, v. 49, № 26, p. 1888—1891.
- [5] Анищенко В. С., Астахов В. В., Лещинский Т. Е. Экспериментальное исследование структуры странного аттрактора в модели генератора с инерционной нелинейностью. — ЖТФ, 1983, т. 51, № 1, с. 152—154.

- [6] *Kaneko K.* Transition from torus to chaos. In connection with the coupled logistic map. — *Progr. Theor. Phys.*, 1983, v. 69, № 5, p. 1427—1442.
- [7] *Yuan Jian Min et al.* Instability and irregular behavior of coupled logistic equations. — *Phys. Rev.*, 1983, v. A28, № 3, p. 1662—1666.
- [8] *Froyland J.* Some symmetrical two-dimensional dissipative maps. — *Physica*, 1983, v. D8, № 3, p. 423—434.
- [9] *Кузнецов С. П.* О критическом поведении одномерных цепочек. — *Письма в ЖТФ*, 1983, т. 9, № 2, с. 94—98.
- [10] *Geisel T., Nierwetberg J., Keller J.* Critical behavior of the Lyapunov number at the period-doubling onset of chaos. — *Phys. Lett.*, 1981, v. A86, № 2, p. 75—78.
- [11] *Пиковский А. С.* О взаимодействии странных аттракторов. — *Препринт ИИФ АН СССР*, 79. Горький, 1983. 20 с.
- [12] *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф. М.: Мир, 1980. 608 с.

Саратовский
государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского

Поступило в Редакцию
5 июля 1984 г.