

УДК 517.9

УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ И ПОДОБИЕ В ПОВЕДЕНИИ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ ФЕЙГЕНБАУМА

С. П. Кузнецов

Исследуется поведение двух симметрично связанных идентичных систем, каждая из которых в отдельности способна демонстрировать переход к хаосу через бифуркации удвоения периода. Установлены соотношения подобия, которые являются обобщением на связанные системы законов подобия Фейгенбаума. Найдена универсальная конфигурация зон различных режимов в пространстве трех параметров: фейгенбаумовского управляющего параметра и коэффициентов инерционного и диссипативного типов связи.

Изучение стохастических колебаний в динамических системах привело в последнее время к формированию нескольких универсальных моделей, описывающих поведение различных систем у порога возникновения хаоса [1-3]. Одна из этих моделей, именуемая далее системой Фейгенбаума, представляет собой обобщенный образ нелинейной диссипативной системы, претерпевающей при изменении некоторого управляющего параметра λ переход к хаосу через иерархию бифуркаций удвоения периода. Как показал Фейгенбаум [1,2], такой переход подчиняется ряду универсальных закономерностей подобия. В частности, последовательность точек бифуркаций определяется формулой

$$\lambda_m = \lambda_c - K\delta^{-m}, \quad (1)$$

где $\delta = 4,6692$ — универсальная константа, а λ_c и K — постоянные, зависящие от конкретной системы. Этот тип поведения наблюдался в численных расчетах и в экспериментах у многих конкретных систем в радиофизике, гидродинамике, в химической и биологических моделях [4-7]. Естественный путь развития теории видится в конструировании на базе системы Фейгенбаума таких более сложных объектов, как система с внешним воздействием, связанные системы, распределенная среда [8-14] и в изучении закономерностей перехода порядок—хаос в них.

Обратимся к задаче о поведении двух идентичных симметрично связанных элементов, каждый из которых представляет собой систему Фейгенбаума. Конкретными примерами могут служить связанные нелинейные осцилляторы, находящиеся под периодическим внешним воздействием; связанные ячейки, в которых происходит автокаталитическая химическая реакция; сообщающиеся биологические популяции и т. п.

Простейшая система Фейгенбаума—это рекуррентное уравнение [1]:

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2, \quad (2)$$

где x_n характеризует состояние системы в момент дискретного времени n . Поведение двух связанных систем (2) при некоторых частных способах введения связи исследовалось численно в [9-11]. Было пока-

зано, что пути перехода связанных систем к хаосу богаче, чем у индивидуальных элементов: кроме удвоений периода наблюдались переходы через разрушение квазипериодических движений и перемежаемость. Однако работы [9-11] оставляют открытыми принципиальные вопросы, касающиеся выяснения тех свойств связанных систем, которые вытекают из закономерностей Фейгенбаума для составляющих элементов, а также выявления степени зависимости поведения связанных систем от конкретного способа введения связи.

Цель данной статьи состоит в том, чтобы ответить на эти вопросы. В основу исследования положен ренормгрупповой (РГ) подход, представляющий собой развитие предложенного ранее метода анализа одномерных цепочек, составленных из систем Фейгенбаума [12, 13].

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1.1. Качественное обсуждение способов введения связи. Традиционный пример фейгенбаумовской системы, описываемой уравнением (2) — биологическая популяция [2, 7]. При этом x_n характеризует численность популяции (точнее — ее отклонение от экстремального уровня) перед n -м циклом размножения и гибели особей; параметр λ определяется, например, количеством имеющейся пищи.

Проиллюстрируем на этом примере способы введения связи между системами Фейгенбаума. Рассмотрим сначала две несвязанные популяции одного вида, численность которых задается переменными x_n и y_n и эволюционирует согласно уравнениям

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2, \quad y_{n+1} = \lambda - y_n^2. \quad (3)$$

Эта ситуация схематически показана на рис. 1а. Каждый прямоугольник изображает цикл размножения и гибели особей, соответствующий нелинейному преобразованию численности популяции, а вертикальные линии — период существования популяции без изменения численности.

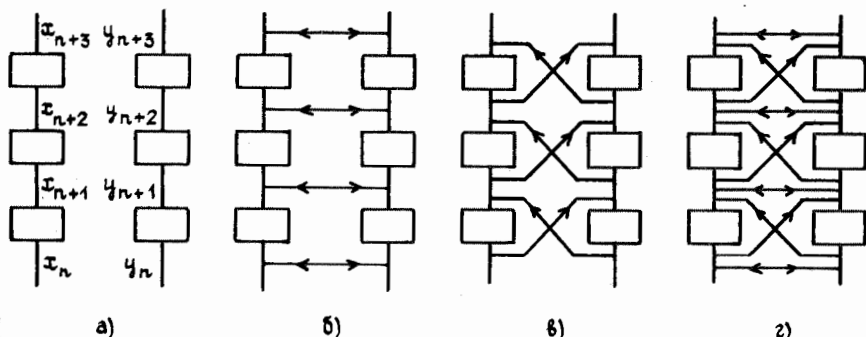


Рис. 1.

Ввести связь между популяциями можно двумя существенно различными способами. Первый из них состоит в том, что в промежутках времени между периодами размножения и гибели особи могут «переползть» в обе стороны по каналу связи, как показано на рис. 1б. Такая связь, очевидно, способствует выравниванию мгновенных численностей обеих популяций. Если численность популяций перед очередным циклом размножения и гибели задается величинами x_n и y_n , то после этого цикла — величинами $\lambda - x_n^2$ и $\lambda - y_n^2$. Предположив, что затем некоторая доля особей в «переползла» из популяции в популяцию по каналу связи, находим значения переменных перед следующим циклом:

$$\dot{x}_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \varepsilon(x_n^2 - y_n^2), \quad y_{n+1} = \lambda - y_n^2 + \varepsilon(y_n^2 - x_n^2). \quad (4)$$

Связь этого типа можно назвать диссипативной. Действительно, рассмотрим преобразование фазового объема $\Delta x_n \Delta y_n$ за единицу времени:

$$\Delta x_{n+1} \Delta y_{n+1} = J \Delta x_n \Delta y_n,$$

где J — якобиан,

$$J = \begin{vmatrix} \partial x_{n+1} / \partial x_n & \partial x_{n+1} / \partial y_n \\ \partial y_{n+1} / \partial x_n & \partial y_{n+1} / \partial y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2x_n(1-\varepsilon) & -2\varepsilon y_n \\ -2\varepsilon x_n & -2y_n(1-\varepsilon) \end{vmatrix} = 4x_n y_n (1-2\varepsilon).$$

В отсутствие связи якобиан равен $J_0 = 4x_n y_n$, а при наличии связи $J = (1-2\varepsilon)J_0$. Таким образом, при наложении на ε естественного в рамках биологической интерпретации условия $0 < \varepsilon < 1$ фазовый объем претерпевает дополнительное сжатие по сравнению с той величиной, которую он имел бы в отсутствие связи.

Второй способ введения связи состоит в том, что особи получают возможность «переползть» из одной популяции в другую в обход цикла размножения и гибели, как показано на рис. 1в. Обозначая через μ долю особей, отправляющихся в путешествие по каналам связи, можно получить следующие уравнения: $x_{n+1} = \lambda - (x_n - \mu x_n)^2 + \mu y_n$, $y_{n+1} = \lambda - (y_n - \mu y_n)^2 + \mu x_n$. Заменой $x \rightarrow \frac{x + \mu/2}{(1 - \mu)^2}$, $y \rightarrow \frac{y + \mu/2}{(1 - \mu)^2}$,

$\lambda \rightarrow \frac{\lambda + \mu/2 - \mu^2/4}{(1 - \mu)^2}$ они приводятся к виду

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \mu(y_n - x_n), \quad y_{n+1} = \lambda - y_n^2 + \mu(x_n - y_n). \quad (5)$$

Принципиальное различие между описанными способами введения связи состоит в следующем. Пусть в некоторый момент \bar{n} обе переменные проходят вблизи точки экстремума отображения (2): $|x_{\bar{n}}^-| \ll 1$, $|y_{\bar{n}}^-| \ll 1$. В случае диссипативной связи информация о различии состояний подсистем будет теряться в момент \bar{n} (разность $y_{\bar{n}+1}^- - x_{\bar{n}+1}^-$ пропорциональна квадрату малой величины). Напротив, для системы (5) информация не теряется: предыстория системы влияет на последующее поведение в обход квадратичного экстремума через каналы связи. Это дает основание назвать второй тип связи инерционным. Данные здесь определения являются предварительными и получают уточнение в разд. 2.

Пусть теперь имеются каналы связи обоих типов (рис. 1г). Если связь невелика, то добавки к правым частям уравнений (3) должны входить аддитивно, так что сразу получаем

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \varepsilon(x_n^2 - y_n^2) - \mu(x_n - y_n), \quad (6)$$

$$y_{n+1} = \lambda - y_n^2 + \varepsilon(y_n^2 - x_n^2) - \mu(y_n - x_n).$$

Как оказывается, никаких других способов введения связи рассматривать не нужно: уравнения (6) обеспечивают при надлежащем выборе параметров адекватное описание фейгенбаумовских систем, слабо связанных произвольным образом (см. ниже).

Для дальнейшего полезно ввести переменные $\xi_n = (x_n + y_n)/2$, $\eta_n = (x_n - y_n)/2$, которые характеризуют симметричную и антисимметричную части решения. В новых переменных уравнения (6) принимают вид

$$\xi_{n+1} = \lambda - \xi_n^2 - \eta_n^2, \quad \eta_{n+1} = -2B(\xi_n + \alpha)\eta_n, \quad (7)$$

где $B = 1 - 2\varepsilon$, $\alpha = \mu/(4\varepsilon - 2)$.

1.2. Законы подобия. Обратимся вновь к системе из несвязанных элементов (3). Из результатов Фейгенбаума [1,2] вытекает следующий закон подобия:

а) пусть известно, что при значении параметра $\lambda_c + \Lambda$ за 2^m единиц времени система переходит из состояния (x, y) в состояние (X, Y) ,

б) тогда при значении параметра $\lambda_c + \Lambda/\delta$ за 2^{m+1} единиц времени она переходит из состояния $(x/a, y/a)$ в состояние $(X/a, Y/a)$; $\delta = 4,6692$, $a = -2,5029$.

Иными словами, если имеется какое-либо решение системы (3), то можно отыскать подобный режим с увеличенным в два раза временным масштабом. Для этого следует пересчитать начальное состояние (x, y) и значение параметра λ в соответствии с указанными правилами.

Аналогичный закон подобия должен существовать и для связанных систем, причем при выключенной связи он обязан превращаться в приведенное выше утверждение. Поэтому правила пересчета x, y и λ должны сохраниться, по крайней мере, в случае слабой связи. Следовательно, вопрос состоит в том, каковы правила пересчета функции, характеризующей связь.

Рассмотрим сначала систему (5) (рис. 1в). При переходе к режиму с увеличенным в два раза временным периодом масштаб переменных x и y вблизи точки экстремума уменьшается в a раз. Тогда относительное влияние возмущения, прошедшего по каналу связи в обход нелинейности, будет в a раз сильнее. Чтобы скомпенсировать возрастание влияния связи и восстановить подобие, следует уменьшить параметр связи в a раз.

Пусть теперь имеем систему (4) (рис. 1б). При увеличении временного масштаба в два раза коэффициент $1 - 2\varepsilon$, характеризующий дополнительное сжатие фазового объема, возводится в квадрат. Чтобы сохранить подобие, нужно уменьшить параметр связи ε в $b = 2$ раза.

В общем случае можно ожидать, что связь представляется в виде комбинации двух компонент, ренормируемых при удвоении временного масштаба соответственно в a и b раз. Чтобы обосновать предлагаемый закон подобия и убедиться в его универсальности, проведем исследование в рамках ренормгруппового подхода.

2. РЕНОРМГРУППОВОЙ АНАЛИЗ

Рассмотрим связанные рекуррентные уравнения общего вида

$$x_{n+1} = f(x_n) + \varphi(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = f(y_n) + \varphi(y_n, x_n), \quad (8)$$

где x_n и y_n — переменные, характеризующие состояния двух идентичных связанных подсистем, $f(x)$ — функция, удовлетворяющая условиям Фейгенбаума [1,2], $\varphi(x, y)$ — гладкая функция двух аргументов, подчиненная условию $\varphi(x, x) \equiv 0$.

Выразим значения x_{n+2} и y_{n+2} через x_n и y_n и выполним замену $x \rightarrow x/a$, $y \rightarrow y/a$. В результате получим

$$x_{n+2} = f_1(x_n) + \varphi_1(x_n, y_n), \quad y_{n+2} = f_1(y_n) + \varphi_1(y_n, x_n),$$

где

$$\begin{aligned} f_1(x) &= af(f(x/a)), \\ \varphi_1(x, y) &= a[f(f(x/a) + \varphi(x/a, y/a)) - f(f(x/a)) + \\ &+ \varphi(f(x/a) + \varphi(x/a, y/a), f(y/a) + \varphi(y/a, x/a))]. \end{aligned} \quad (9)$$

Соотношения (9) определяют операцию РГ преобразования функций f и φ : $\begin{pmatrix} f_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} f \\ \varphi \end{pmatrix}$, с помощью которой осуществляется переход к опи-

санию динамики системы с удвоенным временным интервалом между последовательными итерациями. При многократном применении РГ преобразования приходим к рекуррентному уравнению

$$\begin{pmatrix} f_{N+1} \\ \varphi_{N+1} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} f_N \\ \varphi_N \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где f_N и φ_N — функции, определяющие изменение состояния системы за 2^N итераций:

$$x_{n+2^N} = f_N(x_n) + \varphi_N(x_n, y_n), \quad y_{n+2^N} = f_N(y_n) + \varphi_N(y_n, x_n). \quad (11)$$

Как это следует из [1, 2], уравнение (10) имеет не зависящее от N решение (неподвижная точка в пространстве функций)

$$\begin{pmatrix} g(x) \\ 0 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} g(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g(x) = ag \left(g \left(\frac{x}{a} \right) \right), \quad (12)$$

где $g(x)$ — функция Фейгенбаума. Будем искать решение (10), близкое к неподвижной точке (12), полагая

$$f_N(x) = g(x) + \tilde{f}_N(x), \quad \varphi_N(x, y) = \tilde{\varphi}_N(x, y), \quad |\tilde{f}_N| \ll 1, \quad |\tilde{\varphi}_N| \ll 1.$$

В линейном приближении из (10) получаем

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_{N+1} \\ \tilde{\varphi}_{N+1} \end{pmatrix} = \hat{P} \begin{pmatrix} \tilde{f}_N \\ \tilde{\varphi}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{L} & 0 \\ 0 & \hat{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{f}_N \\ \tilde{\varphi}_N \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где линейные операторы \hat{L} и \hat{M} определены формулами

$$\hat{L}f(x) = a[g'(g(x/a))f(x/a) + f(g(x/a))]; \quad (14)$$

$$\hat{M}\varphi(x, y) = a[g'(g(x/a))\varphi(x/a, y/a) + \varphi(g(x/a), g(y/a))]. \quad (15)$$

Чтобы найти общий вид добавок \tilde{f}_N , $\tilde{\varphi}_N$, обратимся к задаче на собственные функции и собственные значения оператора \hat{P} :

$$\nu \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix} = \hat{P} \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Результат N -кратного действия оператора \hat{P} на любой вектор $\begin{pmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix}$

при больших N будет представлять собой линейную комбинацию тех собственных векторов, которым отвечают значения $|\nu| > 1$ и которые будем называть существенными. Как и в [4, 2], будем исключать из рассмотрения собственные векторы, соответствующие инфинитезимальным заменам переменных x, y в уравнении неподвижной точки (12).

Собственные векторы оператора \hat{P} распадаются на два класса.

Первый класс — это векторы вида $\begin{pmatrix} \tilde{f} \\ 0 \end{pmatrix}$, где \tilde{f} — собственные функции оператора (14). Этот класс собственных векторов относится к подпространству возмущений неподвижной точки (12), не сопровождаю-

щихся включением связи между подсистемами. Согласно Фейгенбауму, имеется единственный собственный вектор данного класса $\begin{pmatrix} h(x) \\ 0 \end{pmatrix}$ с собственным числом $\nu = \delta = 4,6692$; универсальная функция $h(x)$ вычислена в [2].

Второй класс собственных векторов образуют векторы вида $\begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\varphi}(x, y) \end{pmatrix}$,

где $\tilde{\varphi}(x, y)$ — собственные функции оператора (15), подчиненные условию $\tilde{\varphi}(x, x) = 0$. Возмущения неподвижной точки, описываемые этими векторами, соответствуют введению связи. Численное решение задачи на собственные функции оператора (15) (см. Приложение 1) показало, что имеются две существенные собственные функции $\Phi_1(x, y)$ и $\Phi_2(x, y)$, обладающие собственными значениями $\nu_1 = a = -2,5029$ и $\nu_2 = b = 2$ (табл. 1, 2).

Таким образом, в асимптотике больших N функции f_N и φ_N (см. (11)) имеют вид

$$f_N(x) = g(x) + \Lambda \delta^N h(x); \quad (17)$$

$$\varphi_N(x, y) = \alpha a^N \Phi_1(x, y) + \beta b^N \Phi_2(x, y), \quad (18)$$

причем вид начального возмущения $\tilde{f}_0(x)$, $\tilde{\varphi}_0(x, y)$ определяет только значения констант Λ , α , β . Отсюда вытекают важные следствия.

1. *Универсальность.* Если исходное («затравочное») отображение близко к неподвижной точке (12) (т. е. $x_{n+1} = g(x_n) +$ малая добавка, $y_{n+1} = g(y_n) +$ малая добавка), то форма отображения, описывающего динамику системы за достаточно большое число итераций, полностью определяется тремя константами Λ , α , β . Поэтому структура бифуркационных множеств в пространстве параметров Λ , α , β универсальна и не зависит от конкретного вида добавок в затравочном отображении.

2. *Подобие.* В точке пространства параметров с координатами $(\Lambda/\delta, \alpha/a, \beta/b)$ функции $f_{N+1}(x)$ и $\varphi_{N+1}(x, y)$ имеют точно такой же вид, как функция $f_N(x)$ и $\varphi_N(x, y)$ в точке (Λ, α, β) . Это значит, что в первой точке система должна демонстрировать те же самые режимы поведения, что и во второй, но с увеличенным в два раза временным масштабом. Иными словами, структура пространства параметров Λ , α , β обладает свойством масштабной инвариантности и переходит в себя при изменении масштабов по трем осям координат соответственно в δ , a и b раз, что согласуется с предположенной в предыдущем разделе гипотезой подобия. Очевидно, первый член в разложении функции связи (18) ассоциируется с инерционным, а второй — с диссипативным типом связи.

3. СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ

Для исследования универсальной структуры пространства параметров связанных систем можно использовать рассмотренную выше модель (6) или в других обозначениях (7). Действительно, из качественных рассуждений разд. 1 следует существование в этой модели и инерционной и диссипативной связи. Наличие двух параметров связи ϵ и μ позволяет задать произвольное соотношение между обоими типами связи. В Приложении 2 показано, что формулировка уравне-

* Заметим, что величина Λ характеризует отклонение фейгенбаумовского управляющего параметра подсистем от критической точки, т. е. $\Lambda = \text{const}(\lambda - \lambda_c)$.

ний, допускающая независимое управление уровнем двух чистых типов связи, получается, если положить в (7) $B=e^{-\beta F(\alpha, \lambda)}$:

$$\xi_{n+1}=\lambda-\xi_n^2-\eta_n^2, \quad \eta_{n+1}=-2e^{-\beta F(\alpha, \lambda)}(\xi_n+\alpha)\eta_n, \quad (19)$$

где α и β — коэффициенты связи инерционного и диссипативного типов, а функция $F(\alpha, \lambda)$ приближенно выражается формулой

$$F(\alpha, \lambda)=(1-0,6025\alpha+0,1019\alpha^2-0,0278\alpha\lambda)^{0,2779}. \quad (20)$$

Исходный момент исследования структуры пространства параметров системы — это анализ периодических режимов (циклов).

3.1. Циклы и их устойчивость. Предположим, что при некоторых значениях параметров система (19) имеет N -цикл, т. е. решение, для которого $\xi_{n+N}=\xi_n, \eta_{n+N}=\eta_n$. Для анализа на устойчивость рассмотрим, как обычно, эволюцию приращений $\tilde{\xi}_n, \tilde{\eta}_n$ к переменным ξ_n, η_n за период цикла. Как следует из (19),

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi}_N \\ \tilde{\eta}_N \end{pmatrix} = \hat{J} \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_0 \\ \tilde{\eta}_0 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где $\hat{J}=\hat{J}_{N-1}\hat{J}_{N-2}\dots\hat{J}_0$ — матрица монодромии цикла, а \hat{J}_n — матрица Якоби отображения (19) в n -й точке цикла,

$$\hat{J}_n = \begin{pmatrix} -2\xi_n & -2\eta_n \\ -2B\eta_n & -2B(\xi_n+\alpha) \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Собственные значения матрицы \hat{J} (мультипликаторы) определяются из уравнения

$$\mu^2-\mu S+J=0, \quad (23)$$

где S — след, J — детерминант матрицы \hat{J} . На плоскости (S, J) область устойчивости цикла ($|\mu|<1$) изображается треугольником (рис. 2) со сторонами

$$1) J+S+1=0, \quad 2) J-S+1=0, \quad 3) J=1. \quad (24)$$

Переходу через каждую из трех сторон треугольника соответствуют 1) бифуркация удвоения периода цикла, 2) касательная бифуркация, 3) бифуркация рождения квазипериодического аттрактора (бифуркация Андронова — Хопфа). Проследив эволюцию циклов при изменении параметров задачи и вычисляя след и детерминант матрицы монодромии, можно найти в пространстве параметров (λ, α, β) бифуркационные поверхности трех перечисленных типов.

Заметим, что исходные уравнения допускают решения в виде синфазных движений подсистем, т. е.

$$x_n=y_n \text{ или } \eta_n=0. \quad (25)$$

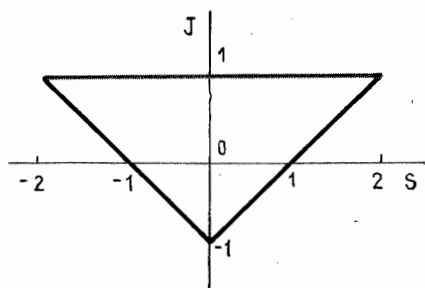


Рис. 2.

В этом случае задача сводится к уравнению (2). Поэтому согласно [1, 2] при $\lambda < \lambda_c = 1,40116$ существуют синфазные циклы периода 2^m , а при $\lambda > \lambda_c$ появляются синфазные хаотические режимы. Для синфаз-

ных циклов, матрицы \hat{J}_n , а следовательно, и \hat{J} диагональны, поэтому собственные значения есть просто диагональные элементы матрицы \hat{J} :

$$\mu_1 = \prod_{n=1}^N (-2\xi_n), \quad \mu_2 = \prod_{n=1}^N (-2B(\xi_n + \alpha)),$$

где N — период цикла. Условие устойчивости имеет вид

$$\left| \prod_{n=1}^N (-2\xi_n) \right| < 1, \quad \left| \prod_{n=1}^N (-2B(\xi_n + \alpha)) \right| < 1 \quad (26)$$

и для циклов периода 1 и 2 выражается явно, поскольку

$$\text{для } N=1: \mu_1 = 1 - \sqrt{1+4\lambda}, \quad \mu_2 = B(1+\alpha - \sqrt{1+4\lambda}); \quad (27)$$

$$\text{для } N=2: \mu_1 = 4 - 4\lambda, \quad \mu_2 = 4B^2(1 - \lambda + \alpha + \alpha^2). \quad (28)$$

3.2. Система с чисто диссипативной связью. Положим в (19) $\alpha=0$. Учитывая, что $F(0, \alpha) = 1$, имеем

$$\xi_{n+1} = \lambda - \xi_n^2 - \eta_n^2, \quad \eta_{n+1} = -2e^{-\beta} \xi_n \eta_n. \quad (29)$$

Будем рассматривать только случай $\beta > 0$ (условие диссипативности).

При $\lambda < \lambda_c$ поведение системы (29) очень простое: она демонстрирует устойчивые синфазные циклы, период которых удваивается при тех же самых значениях λ_m , как и у отдельной системы Фейгенбаума

(2). Действительно, из (26) видно, что первый мультипликатор синфазного 2^m -цикла совпадает с мультипликатором системы (2), а второй равен $\mu_2 = \mu_1 e^{-2^m \beta}$. В области существования данного цикла, как аттрактора системы (2), $|\mu_1| < 1$, поэтому и $|\mu_2| < 1$. Следовательно, цикл системы (29) устойчив в том же интервале параметра λ , как и цикл системы (2). Поэтому на плоскости параметров (β, λ) области циклов различного периода, реализующихся при $\lambda < \lambda_c$, разграничены горизонтальными линиями $\lambda = \lambda_m$ (рис. 3).

При $\lambda > \lambda_c$ синфазный режим может потерять устойчивость к антисимметричным возмущениям, если ляпуновский характеристический показатель, рассчитанный для странного аттрактора системы (2),

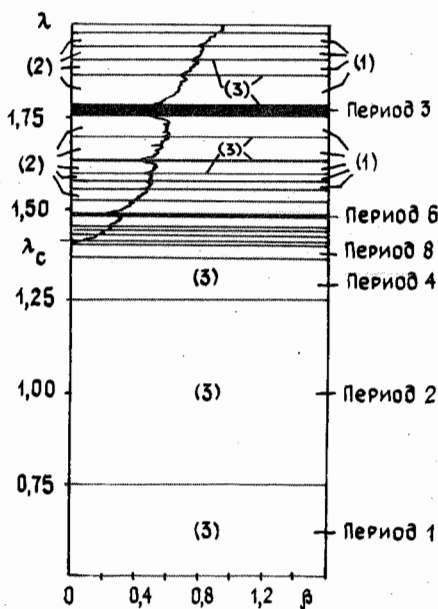


Рис. 3.

$$\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln |2x_n|,$$

станет больше β [14]. Для $\lambda > \lambda_c$ на плоскости параметров существуют области трех типов: 1) зоны синфазного хаотического движения, определяемые условием $0 < \gamma(\lambda) < \beta$, 2) зоны неустойчивости синфаз-

ного хаотического режима, в которых $\gamma(\lambda) > \beta$ и реализуются несинфазные стохастические колебания подсистем, 3) зоны устойчивости периодических движений, совпадающие с «окнами устойчивости» в закритической области системы (2) [1, 2]. Конфигурацию всех этих областей можно найти, используя известную зависимость $\gamma(\lambda)$ для системы (2) [15]. Заметим, что картина областей на рис. 3 переходит в себя при изменении масштаба в δ раз по оси λ и в $b=2$ раз по оси β относительно точки $(0, \lambda_c)$. В этом выражается закон подобия для системы с диссипативной связью.

3.3. Система с чистой инерционной связью. Положим теперь $\beta=0$ и рассмотрим поведение системы (19) в зависимости от параметров α (коэффициент связи) и λ (фейгенбаумовский управляющий параметр). Поскольку в системе с инерционной связью оказываются возможными гистерезисные явления, поверхность (α, λ) полезно представлять склеенной из ряда листов (рис. 4а). Один из них, обозначаемый как *S*-лист, соответствует синфазным движениям подсистем, а остальные *N*-листы — несинфазным движениям. Если пересечение некоторой бифуркационной линии приводит к мягкому переходу с листа на лист, то оба листа считаются склеенными по этой линии (см. рис. 4а, переход 1). Несклеенные края листов отражают существование жесткой бифуркации — скачка с листа на лист, сопровождаемого гистерезисом (на рис. 4а — переход 2). Рис. 4а дает грубое предварительное представление о структуре пространства параметров. Перейдем к ее подробному обсуждению.

S-лист. Рассмотрим синфазные периодические движения в области $\lambda < \lambda_c$. Из формул (26) можно найти численно границы областей устойчивости 2^m -циклов. К ним относятся: 1) горизонтальные линии $\lambda = \lambda_m$, которые определяются условием $\mu_1(\lambda) = -1$ и соответствуют бифуркациям удвоения периода синфазных циклов, 2) кривые, задаваемые соотношениями $\mu_2(\lambda, \alpha) = \pm 1$, отвечающие потере устойчивости синфазного режима относительно антисимметричного возмущения и переходу на какой-либо *N*-лист. Оба семейства бифуркационных линий на *S*-листе изображены на рис. 4б. В светлых областях реализуются устойчивые синфазные циклы с указанным на рисунке периодом, области неустойчивости синфазных режимов заштрихованы. Линии, по которым *S*-лист склеен с *N*-листами, — это нижние дугообразные границы заштрихованных областей, на которых $\mu_2 = -1$.

Отметим четко фиксируемое при численных расчетах свойство подобия: вся картина областей на рис. 4б воспроизводится внутри прямоугольника, обозначенного пунктиром, с уменьшением масштаба в δ раз по оси ординат и в a раз по оси абсцисс. Поскольку константа a отрицательна, то расположение областей в большом и малом прямоугольниках противоположно по ориентации относительно оси абсцисс.

N-лист. Исследуем теперь режимы несинфазного движения, которые реализуются на *N*-листах. Благодаря существованию закона подобия достаточно изучить структуру всего одного *N*-листа — того, на который осуществляется переход при мягкой потере устойчивости синфазного 2-х цикла.

Рассматриваемый *N*-лист склеен с *S*-листом по линии, определяемой формулами (26) и (28): $4B^2(1 - \lambda + \alpha + \alpha^2) = -1$, $\lambda < 1,25$. При переходе через нее снизу вверх происходит бифуркация рождения устойчивого 4-х цикла, которому соответствует движение обеих подсистем, сдвинутое по фазе друг относительно друга на половину периода:

$$x_{n+2} = y_n, \quad y_{n+2} = x_n \quad \text{или} \quad \xi_{n+2} = \xi_n, \quad \eta_{n+2} = -\eta_n, \quad (30)$$

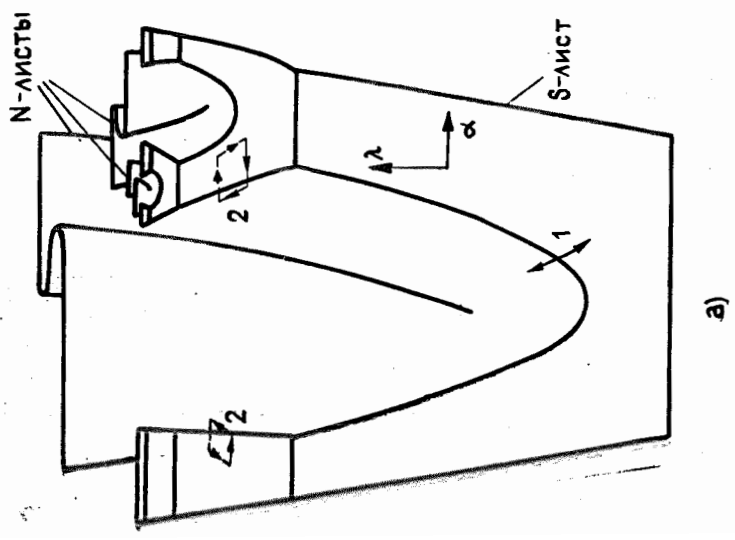
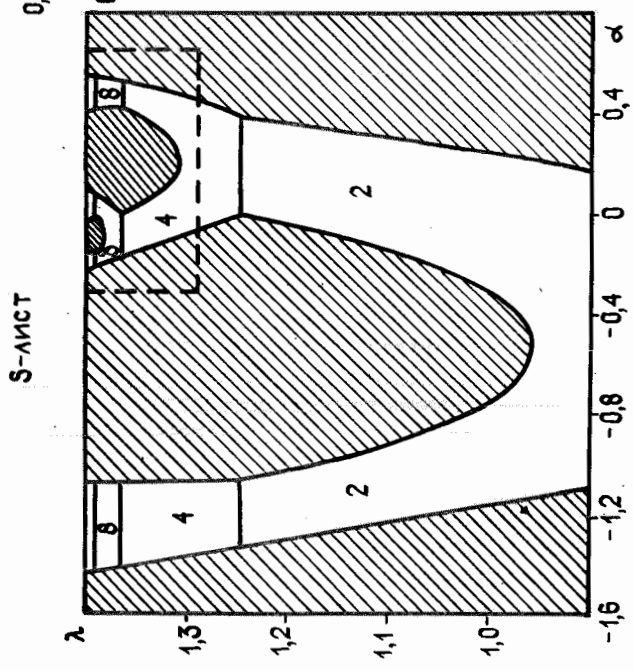
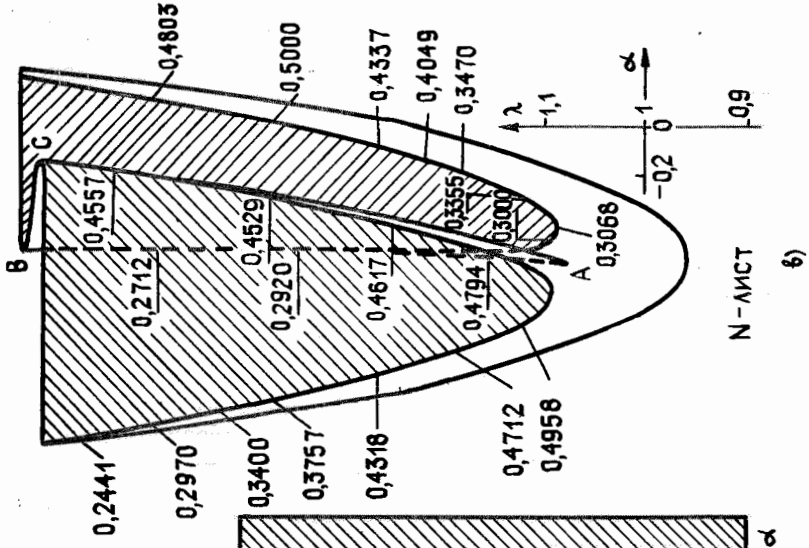


Рис. 4.

Этот цикл можно исследовать аналитически: если ввести величину $\zeta = \xi_1 + \xi_2 + 2\alpha$, то элементы цикла и параметр λ выражаются через ζ :

$$\xi_{1,2} = (1/2)(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 + B^{-2}}) - \alpha, \quad \eta_{1,2} = \sqrt{C(1 + \alpha A + A\xi_{1,2})}; \quad (31)$$

$$\lambda = C + \zeta + 1/4B^2 + \alpha^2 - \alpha, \quad (32)$$

где $A = -(\zeta + 1/2\zeta B^2)^{-1}$, $B = F(\alpha, \lambda)$, $C = (1 + 2\alpha - \zeta)/A^*$. Мультипликаторы вычисляются по общим формулам (21)–(23). С циклом (30) могут происходить различные бифуркации, которые мы теперь рассмотрим.

1) *Точка сборки и линии складок.* На рис. 5 показано, как эволюционирует кривая $\lambda = \lambda(\zeta)$ (32) при изменении параметра α . Для $\alpha < -0,5634$ существует одно, а для $\alpha > -0,5634$ и $\lambda_{\min} < \lambda < \lambda_{\max}$ — три значения ζ для одного λ . Следовательно, в первом случае имеется один, а во втором — три различных 4-х цикла типа (30). Из этих циклов один всегда неустойчив (ему отвечает среднее значение ζ), а два других устойчивы в определенной области параметров и могут наблюдаться как аттракторы. Таким образом, в точке $\alpha = -0,5634$, $\lambda = 1,0829$ имеет место бифуркация сборки [16]. К этой точке поверхности (α, λ) подходят две линии складок [16], которые соответствуют на рис. 5

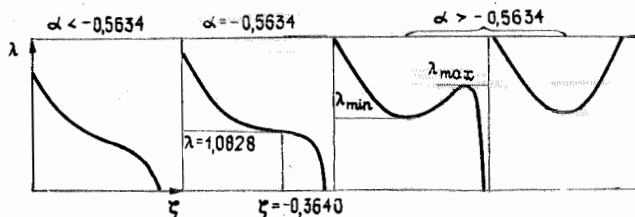


Рис. 5.

экстремумам кривой $\lambda(\zeta)$. Эти линии можно найти, дополняя уравнение (32) условием $\partial\lambda/\partial\zeta = 0$. На рис. 4в, изображающем структуру N -листа, точка A есть точка сборки, а линии BA и CA — линии складок. При обходе вокруг точки A по часовой стрелке аттрактор (4-х цикл) эволюционирует непрерывным образом до пересечения линии CA , после чего происходит скачкообразная смена режима. Это вновь 4-х цикл, подчиняющийся условиям (30), но отличающийся от старого уровнем антисимметричной моды η . При обходе вокруг точки A против часовой стрелки скачок происходит при пересечении линии BA . Как можно проверить, на линиях складок один из мультипликаторов 4-х цикла обращается в $+1$. В точке сборки мультипликаторы таковы: $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0,1472$.

2) *Линия бифуркации Андронова—Хопфа и переход к квазипериодическому аттрактору.* На рис. 4в можно видеть две заштрихованные области, лежащие на двух частях поверхности N -листа, сшитых в точке сборки. В этих областях детерминант матрицы монодромии 4-х цикла (30) превышает единицу, т. е. цикл неустойчив (п.3.1). На границах заштрихованных областей детерминант равен единице, что соответствует бифуркации Андронова—Хопфа (переход пары комплексно-сопряженных мультипликаторов через единичную окружность) с рождением квазипериодического аттрактора. Рядом с бифуркацион-

* В силу того, что $B = F(\alpha, \lambda)$, соотношение (32) представляет собой уравнение относительно λ . Однако зависимость $B(\lambda)$ слабая, поэтому для практически точного определения λ достаточно один—два раза проинтерировать формулу (32).

ной линией цифрами указаны значения числа вращения—отношения периодов исходного и вновь возникшего движений.

Заштрихованные области имеют тонкую структуру в виде языков синхронизации, упирающихся остриями в точки бифуркационной линии с рациональными числами вращения, и остаточного множества, которому отвечают собственно квазипериодические движения [17]. Эта структура в деталях нами не исследовалась и на рисунке не показана.

3) *Края N-листа: линии касательной бифуркации.* На боковых границах изображенного на рис. 4в N -листа один из мультипликаторов 4-х цикла (30) обращается в $+1$. При пересечении какой-либо из этих границ в точке $(\alpha, \lambda < \lambda_c)$ происходит скачкообразный переход в синфазный режим, изображаемый точкой с теми же самыми координатами, но на S -листе. При этом имеется гистерезис: обратный перескок на N -лист произойдет только при пересечении боковой границы области устойчивости синфазного режима, которая не совпадает с краем N -листа.

Благодаря закону подобия явления, аналогичные описанным в пп. 1) —3), должны иметь место и на N -листах, приклеенных к нижним дугообразным границам малых заштрихованных на рис. 4б областей. На рис. 6 приводятся результаты количественной проверки подобия формы бифуркационных линий на различных N -листах. Эти линии должны совпадать в координатах $(\alpha \alpha^m, (\lambda - \lambda_c) \delta^m)$, где 2^m — период цикла, рождающегося при мягком переходе на рассматриваемый лист. Как видно из рис. 6, результаты для $m=2, 5$ и 6 хорошо согласуются. Тем самым все выводы о поведении системы на N -листе, полученные для $m=2$, распространяются и на остальные N -листы; отличие состоит только в изменении временного масштаба движений.

Построенная «географическая карта» поверхности параметров (α, λ) дает достаточно полное представление о различных возможных путях перехода к хаосу в системе с инерционным типом связи. Пусть за исходное состояние выбрана некоторая точка на S -листе при $\lambda < \lambda_c$.

Рис. 6.

Тогда, двигаясь по поверхности (α, λ) в общем направлении возрастания λ , можно наблюдать, например, такие сценарии возникновения хаоса:

- 1) Бесконечная последовательность удвоений периода синфазных движений (рис. 7, путь 1).
- 2) Произвольное конечное число удвоений периода синфазных циклов, затем удвоение периода с появлением несинфазного цикла и двумя вариантами дальнейшей эволюции:
 - а) бифуркация Андронова—Хопфа с рождением квазипериодического движения, его разрушение и переход к хаосу (рис. 7, путь 2),
 - б) скачкообразный переход на S -лист и далее повторение явлений, описанных в пп. 1) или 2) (рис. 7, пути 3 и 4).

3.4. Система с комбинированной связью. В случае комбинированной связи количество существенных параметров задачи возрастает до трех, так что наглядное изображение структуры пространства параметров

становится затруднительным. Ограничимся поэтому лишь качественным его описанием.

Представим, что в систему с чисто инерционным типом связи вносятся дополнительная, диссипативная связь, и проследим за эволюцией картины областей на поверхности (α, λ) . Расчеты показывают, что при малой диссипативной связи структура этой поверхности в виде склеенных S - и N -листов, а также общее расположение областей на этих листах, сохраняется. По мере увеличения диссипативной связи сначала малые, а потом большие языки зон неустойчивости синфазных режимов поднимаются вверх и уходят в область $\lambda > \lambda_c$. Для того, чтобы исчез каждый последующий язык, параметр диссипативной связи должен быть увеличен в два раза. В конце концов, увеличение диссипативной связи приводит к тому, что докритическое поведение системы и характер перехода к хаосу становятся такими, как описано в п.3.2.

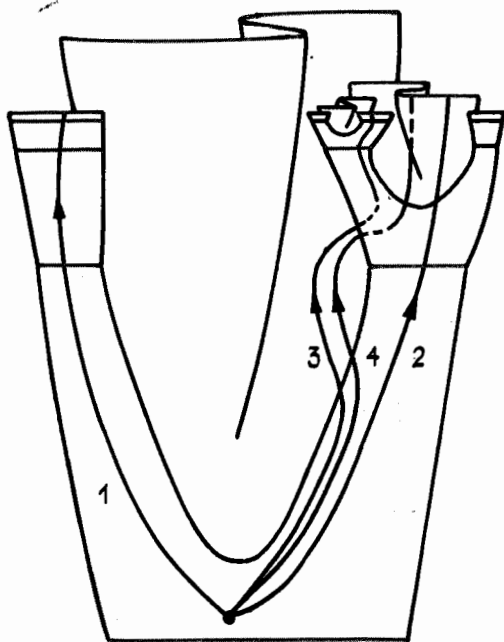


Рис. 7.

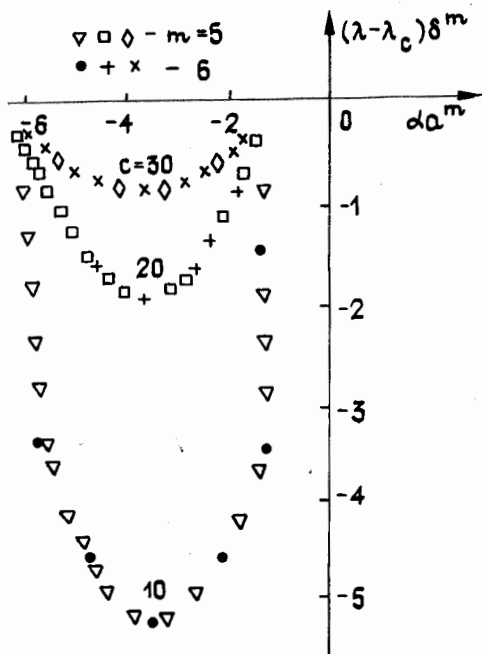


Рис. 8.

Для проверки соотношений подобия рассмотрим сечение пространства параметров (λ, α, β) поверхностью

$$\beta = c |\lambda - \lambda_c|^{\log \delta^2}, \quad (33)$$

где c — произвольная постоянная. При изменении масштаба по оси λ в δ раз и по оси α в a раз величина β изменяется в два раза и поэтому конфигурация областей на данной поверхности должна перейти в себя. На рис. 8 изображены линии потери устойчивости синфазных 2^m -циклов на поверхностях (33) при нескольких значениях c в координатах $(\alpha \delta^m, (\lambda - \lambda_c) \delta^m)$. Видно хорошее совпадение данных для различных m .

На основании проведенного выше исследования можно заключить:

1) Существование фейгенбаумовских свойств у составляющих элементов приводит к тому, что закономерности универсальности и подобия проявляются также и в динамике связанных систем.

2) Универсальность выражается в том, что любая слабая связь, вводимая с помощью произвольной гладкой функции состояний элементов, полностью характеризуется двумя константами α и β — коэффициентами инерционного и диссипативного типов связи. Поэтому полное описание связанных систем вблизи точки перехода к хаосу достигается заданием трех параметров λ , α , β , где λ — фейгенбаумовский параметр подсистем.

3) Структура бифуркационных множеств в пространстве параметров λ , α , β подчиняется закону подобия и переходит в себя при изменении масштабов по трем осям координат соответственно в $\delta=4,6692$, $a=-2,5029$ и $b=2$ раз. Эта универсальная трехмерная структура содержит поверхности бифуркаций удвоения, касательных бифуркаций и бифуркаций рождения квазипериодических движений.

В силу универсальности рассмотренных закономерностей, полученные результаты могут быть отнесены к широкому кругу связанных систем различной природы, описываемых как отображениями, так и дифференциальными уравнениями.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Для численного решения задачи на собственные функции оператора \hat{M} (см. (15)) был применен метод итераций, состоящий в следующем. Как нетрудно проверить, результат N -кратного действия оператора \hat{M} на функцию $\varphi(x, y)$ можно вычислить по формулам

$$\hat{M}^N \varphi = a^N \xi_2^N, \quad \xi_{n+1} = g'(x_n) \xi_n + \varphi(x_n, y_n), \quad x_{n+1} = g(x_n), \quad y_{n+1} = g(y_n), \\ x_0 = x/a^N, \quad y_0 = y/a^N, \quad \xi_0 = 0,$$

где $n=0, 1, \dots, 2^N-1$. Задавая произвольную затравочную функцию $\varphi(x, y)$ и вычисляя $\hat{M}^N \varphi$ при различных x , y и N , можно ожидать, что $\hat{M}^N \varphi \xrightarrow{N \rightarrow \infty} v^N \Phi(x, y)$. Здесь $\Phi(x, y)$ — собственная функция, отвечающая собственному значению v , максимальному по модулю среди присутствующих в $\varphi(x, y)$ компонент.

Такие расчеты были выполнены для $N=2 \div 6$; функции $g(x)$ и $g'(x)$ вычислялись с помощью полиномиальной аппроксимации [2]. В качестве затравочных задавались функции $\varphi(x, y) = (x-y) \psi(x, y)$, где $\psi(x, y) = 1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3$. (Как известно, линейной комбинацией степенных одночленов — рядом Тейлора можно представить любую гладкую функцию.) При задании $\psi(x, y) = 1$ результатом итерационной процедуры является собственная функция $\Phi_1(x, y)$ (табл. 1) и собственное значение $v_1 = a = -2,5029$. Для остальных $\psi = x^m y^n$ итерации приводили к собственной функции $\Phi^2(x, y)$ (табл. 2) с собственным значением $v_2 = b = 2$. Можно показать, что равенства $v_1 = a$ и $v_2 = 2$ являются точными. Из уравнения $v\Phi = \hat{M}\Phi$ с учетом (15) для функции $F(x) = \left[\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \right]_{y=x}$ имеем

$$vF(x) = g'(g(x/a))F(x/a) + g'(x/a)F(g(x/a))$$

— уравнение, достаточное для определения собственных значений. Это уравнение анализировалось в [13], и было строго показано, что старшие собственные значения есть $v_1 = a$ и $v_2 = 2$.

Таблица 1

Собственная функция $\Phi_1(x, y)$

y	x									
	-1,00	-0,75	-0,50	-0,25	0	0,25	0,50	0,75	1,00	
-1,00	0,0000	-0,1713	-0,3447	-0,5133	-0,6723	-0,8158	-0,9322	-1,0024	-1,0000	
-0,75	0,1611	0	-0,1676	-0,3334	-0,4916	-0,6358	-0,7550	-0,8311	-0,8389	
-0,50	0,3110	0,1611	0	-0,1638	-0,3199	-0,4650	-0,5875	-0,6702	-0,6890	
-0,25	0,4506	0,3128	0,1589	0	-0,1562	-0,3025	-0,4285	-0,5183	-0,5494	
0	0,5804	0,4556	0,3097	0,1549	0	-0,1475	-0,2777	-0,3755	-0,4196	
0,25	0,7006	0,5898	0,4526	0,3024	0,1489	0	-0,1348	-0,2413	-0,2994	
0,50	0,8110	0,7151	0,5875	0,4424	0,2904	0,1399	0	-0,1160	-0,1890	
0,75	0,9111	0,8311	0,7136	0,5740	0,4238	0,2716	0,1261	0	-0,0889	
1,00	1,0000	0,9368	0,8302	0,6966	0,5482	0,3941	0,2427	0,1057	0	

Остаточный член, получаемый при аппроксимации $\hat{M}^N \Phi$ линейной комбинацией функций $\Phi_1(x, y)$ и $\Phi_2(x, y)$, состоит из двух частей — затухающей при $N \rightarrow \infty$ и незатухающей. Последняя дается собственной функцией $\Phi_3(x, y) = g'(x)(y-x) - g(y) + g(x)$ с собственным значением $v_3 = 1$ и устраняется заменой переменной $x \rightarrow x + (y-x)\text{const}$, $y \rightarrow y + (x-y)\text{const}$.

Собственная функция $\Phi_2(x, y)$

Таблица 2

y	x				
	0	0,25	0,50	0,75	1,00
0	0	-0,0658	-0,2584	-0,5598	-0,9316
0,25	0,0659	0	-0,1931	-0,4958	-0,8697
0,50	0,2612	0,1948	0	-0,3064	-0,6871
0,75	0,5774	0,5102	0,3126	0	-0,3921
1,00	1,0000	0,9316	0,7280	0,4082	0

Примечание. Функция $\Phi_2(x, y)$ четная по обоим аргументам.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Как оказывается, в системе (4) реализуется чисто диссипативная связь, а в системе (5) — комбинация двух типов связи, понимаемых в смысле разд. 2. Систему с чисто инерционным типом связи можно сконструировать, задавая в (7) зависимость параметра $B = F(\alpha, \lambda)$ так, чтобы наилучшим образом выполнялся характерный для случая инерционной связи закон подобия. Используем эту идею для приближенного вычисления функции $F(\alpha, \lambda)$. Рассмотрим синфазный цикл периода 2:

$$\xi_1 = \lambda - \xi_0^2, \quad \xi_2 = \lambda - \xi_1^2, \quad \eta_0 = \eta_1 = 0, \quad (\text{П.2.1})$$

мультипликаторы которого определяются формулами (28). Потребуем, чтобы при некотором значении параметра λ_1 и уменьшении связи в a раз, т. е. при $\alpha_1 = \alpha/a$, $B_1 = B^{1/a}$, существовал синфазный 4-х цикл $\bar{\xi}_0, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3$, $\bar{\eta}_n \equiv 0$, подчиняющийся соотношениям подобия $\bar{\xi}_0 = \bar{\xi}_0/a$, $\bar{\xi}_2 = \bar{\xi}_1/a$ и обладающий численно теми же мультипликаторами, что и 2-х цикл (П.2.1). Для мультипликаторов 4-х цикла имеем

$$\mu_1 = 16(\bar{\xi}_0/a)(\bar{\xi}_1/a)(\lambda_1 - \bar{\xi}_0^2/a^2)(\lambda_1 - \bar{\xi}_1^2/a^2); \quad (\text{П.2.2})$$

$$\mu_2 = 16(B^{4/a}/a^2)(\bar{\xi}_0 + \alpha)(\bar{\xi}_1 + \alpha)(\lambda_1 - \bar{\xi}_0^2/a^2 + \alpha/a) \times \\ \times (\lambda_2 - \bar{\xi}_1^2/a^2 + \alpha/a). \quad (\text{П.2.3})$$

Приравнивая значения μ_1 (П.2.2) и (28), получаем соотношение между λ и λ_1 , которое с большой точностью сводится к формуле

$$\lambda_1 = \lambda_c + (\lambda - \lambda_c)\delta^{-1}. \quad (\text{П.2.4})$$

Требование равенства мультипликаторов μ_2 с учетом (П.2.1) — (П.2.4) и (28) приводит к выражению

$$B = [1 + 8(\lambda_1 - \lambda/a^2)\alpha a^{-3} + 4\alpha a^{-4}(\alpha + 1/a)]^{a/(2a-4)}.$$

Отсюда, используя (П.2.4) и подставляя численные значения a , δ и λ_c , приходим к формуле (20). Полагая в (7) $B = e^{-\beta} F(\alpha, \lambda)$, получаем систему, в которой инерционная и диссипативная связь регулируется независимо параметрами α и β .

ЛИТЕРАТУРА

1. Фейгенбаум М. — УФН, 1983, 141, № 2, с 343.
2. Feigenbaum M. J. — J. Stat. Phys., 1978, 19, № 1, p. 25; 1979, 21, № 6, p. 669.
3. Eckmann J. P. — Rev. Mod. Phys., 1981, 53, № 4, p. 643.
4. Testa J., Perez J., Jeffries C. — Phys. Rev. Lett., 1982, 48, № 11, p. 714.
5. Libchaber A., Fauve S., Laroche C. — Physica, 1983, 7D, p. 73.
6. Kai T. — Phys. Lett., 1981, 86A, № 5, p. 263.
7. May R. — Nature, 1976, 261, p. 459.
8. Кузнецов С. П. — Письма в ЖЭТФ, 1984, 39, № 3, с. 113.
9. Капеко К. — Progr. Theor. Phys., 1983, 69, № 5, p. 1427.
10. Yuan Jian-Min, Tung Mingwei, Feng Da Hsuan, Norducci Lorenzo M. — Phys. Rev., 1983, A28, № 3, p. 1662.
11. King R., Barchas J. D., Huberman B. In Book: Synergetics of the Brain, Springer — Verlag, 1983, p. 352.
12. Кузнецов С. П. — Письма в ЖТФ, 1983, 9, № 2, с. 94.
13. Кузнецов С. П. — Изв. вузов — Физика, 1984, 27, № 6, с. 87.
14. Пиковский А. С. Препринт № 79 ИПФ АН СССР. — Горький, 1983, 21с.
15. Geisel T., Nierwetberg J., Keller J. — Phys. Lett, 1981, 86A, № 2, p. 75.
16. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф. — М.: Мир, 1980. — 607с.
17. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 304с.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию
14 мая 1984 г.,
после доработки
22 октября 1984 г.

UNIVERSALITY AND SCALING IN BEHAVIOUR OF COUPLED FEIGENBAUM SYSTEMS

S. P. Kuznetsov

The behaviour of two symmetrically coupled identical period doubling systems is investigated. The scaling relations are stated, which are the generalization of Feigenbaum scaling laws for coupled systems. The universal configuration of zones of different regimes is found in a space of three parameters: Feigenbaum control parameter and coefficients of inertial and dissipative types of coupling.