

Б.П. БЕЗРУЧКО, академик Ю.В. ГУЛЯЕВ,
С.П. КУЗНЕЦОВ, Е.П. СЕЛЕЗНЕВ

НОВЫЙ ТИП КРИТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ ПРИ ПЕРЕХОДЕ К ХАОСУ

1. Сейчас уже хорошо известно, что простые нелинейные колебательные системы могут демонстрировать хаотическую динамику в отсутствие какого-либо внешнего случайного воздействия. В последнее время в понимании этого феномена произошел существенный прогресс, связанный с исследованиями закономерностей перехода от регулярного поведения к хаосу при изменении параметров системы [1–3]. Критические явления (т.е. явления вблизи точки перехода) связаны с большими временными масштабами, намного превышающими прочие характерные времена системы. Благодаря этому обстоятельству критические явления обладают свойствами универсальности и подобия, которые определяются только качественным типом перехода, но не детальным видом уравнений системы, с которым связаны локальные во времени особенности динамики.

Наиболее хорошо изученный тип критического поведения соответствует переходу порядок–хаос через последовательность бифуркаций удвоения временного периода движений [1]. Простейший пример такой системы – одномерное рекуррентное отображение [1, 4]

$$(1) \quad x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2,$$

где x_n – переменная, задающая состояние системы в момент дискретного времени, n , λ – параметр. Критическое значение параметра для системы (1) есть $\lambda_c = 1,40116$. Основное свойство подобия критических явлений состоит в том, что при приближении параметра λ к критической точке в $\delta = 4,6692$ раза в системе реализуется режим, подобный исходному, но с увеличенным в 2 раза временным масштабом (как при $\lambda < \lambda_c$, так и при $\lambda > \lambda_c$). Иными словами, разбиение оси λ на области различных режимов обладает свойством масштабной инвариантности и переходит в себя при изменении масштаба относительно точки λ_c в δ раз. Аналогичные закономерности перехода к хаосу, характеризующие той же самой универсальной масштабной константой δ , демонстрируют разнообразные системы, описываемые дифференциальными уравнениями, в том числе нелинейный диссипативный осциллятор, возбуждаемый внешним периодическим воздействием [6]. Вследствие универсальности критических явлений для описания любой системы вблизи точки перехода к хаосу через удвоения периода всегда можно использовать модель (1), если придать надлежащий смысл переменной x_n и параметру λ [1].

В настоящей работе сообщается об обнаружении нового типа критического поведения в системе, состоящей из двух подсистем, способных демонстрировать удвоения периода, при односторонней связи между ними (первая подсистема воздействует на вторую, но вторая не влияет на первую). В последнее время подобные модели привлекают внимание в связи с исследованием турбулентности, развивающейся вниз по потоку [5].

2. Рассмотрим следующую модельную систему для связанных отображений:

$$(2) \quad x_{n+1} = 1 - \lambda_1 x_n^2, \quad y_{n+1} = 1 - \lambda_2 y_n^2 - \beta \varphi(x_n),$$

где x_n и y_n – переменные, характеризующие состояния соответственно первой и второй подсистем, λ_1 и λ_2 – управляющие параметры подсистем, β – параметр связи. Функция $\varphi(x)$ характеризует способ введения связи и в простейшем случае может быть выбрана в виде x или x^2 .

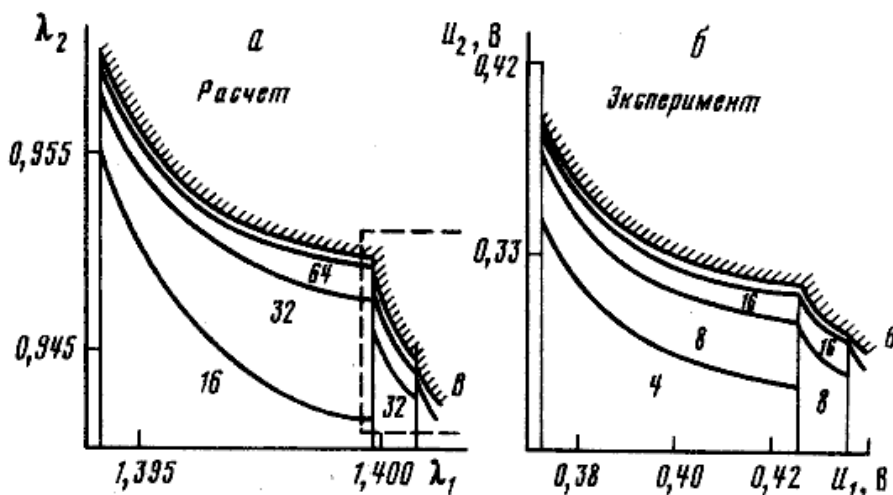


Рис. 1. Плоскость параметров для отображения (2) (а) и связанных нелинейных колебательных контуров (б). В – бикритическая точка

На рис. 1 показана найденная численно конфигурация областей на плоскости параметров (λ_1, λ_2) для случая $\varphi(x) = x$, $\beta = 1/4$. При увеличении параметра λ_1 первая подсистема демонстрирует фейгенбаумовскую последовательность бифуркаций удвоения периода устойчивых циклов. Соответствующие бифуркационные линии изображаются на рис. 1 вертикальными прямыми. При малых значениях параметра λ_2 период движения второй подсистемы такой же, как у первой (вынужденные колебания). Если увеличивать λ_2 при фиксированном λ_1 , то наблюдается последовательность бифуркаций удвоения периода второй подсистемы. Бифуркационные значения λ_2 зависят от λ_1 (кривые на рис. 1). Числами внутри различных областей указан период колебаний во второй подсистеме, штриховкой отмечены линии возникновения хаоса.

На рис. 1 видно, что пространство параметров системы обладает масштабно инвариантной структурой: вся изображенная картина областей воспроизводится в уменьшенном виде внутри прямоугольника, показанного штриховыми линиями. Соответствующее изменение масштаба по оси λ_1 пропорционально фейгенбаумовской константе $\delta_1 = 4,6692$, а по оси λ_2 определяется новой константой, которая найдена нами численно, $\delta_2 = 2,39$.

Центр подобия картины областей на плоскости (λ_1, λ_2) будем называть бикритической точкой. В этой точке система имеет бесконечное счетное множество (неустойчивых) циклов периода 2^N . Ближайшие к нулю элементы циклов в первой подсистеме изменяются пропорционально α_1^{-N} , $\alpha_1 = 2,5029$, а во второй подсистеме – пропорционально α_2^{-N} , $\alpha_2 = -1,52$. Мультипликаторы 2^N -циклов при больших N одинаковы: малое возмущение переменной x за период цикла изменяется в $\mu_1 = -1,6012$, а переменной y – в $\mu_2 = -1,176$ раза.

Аттрактор системы в бикритической точке отвечает движению с бесконечным периодом. На рис. 2 приведены соответствующие спектры колебаний подсистем. Первая подсистема демонстрирует классический фейгенбаумовский спектр с перепадом около $\gamma_1 = 13,6$ дБ между спектральными составляющими каждого последующего уровня. В спектре второй подсистемы соотношение между уровнями субгармоник совершенно иное и характеризуется константой $\gamma_2 \sim 6$ дБ.

Заметим, что от величины связи (параметр β) и от вида гладкой функции $\varphi(x)$ зависит положение бикритической точки на линии $\lambda_1 = 1,40116$, но не зависят приведенные выше масштабные константы. Это позволяет предположить, что значения δ_2 , α_2 , μ_2 , γ_2 являются универсальными, так же как и фейгенбаумовские константы δ_1 , α_1 , μ_1 , γ_1 . Следовательно, эти константы должны фигурировать

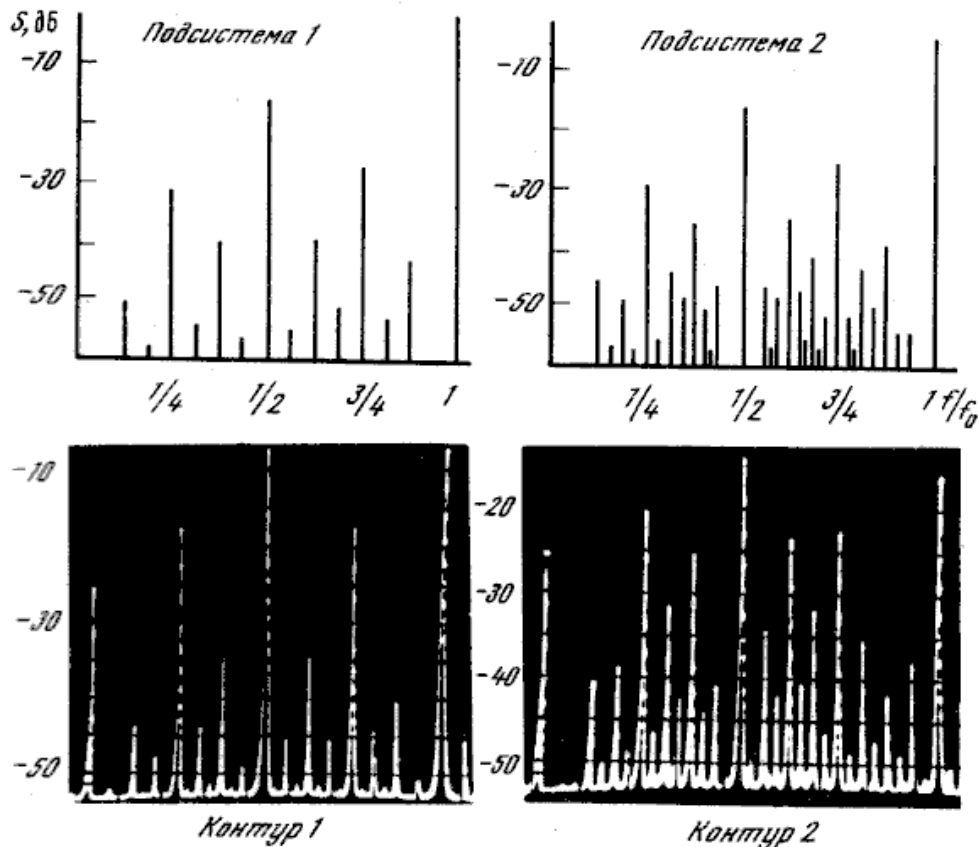


Рис. 2. Спектры колебаний в двух подсистемах в бикритической точке: вверху — расчет для отображения (2), внизу — эксперимент на связанных нелинейных колебательных контурах

во всех случаях, когда имеет место воздействие одной системы, демонстрирующей удвоения периода, на другую, независимо от того, описываются ли эти системы отображениями или дифференциальными уравнениями. Чтобы проверить это предположение, обратимся к эксперименту с конкретной системой связанных нелинейных осцилляторов (колебательных контуров), возбуждаемых периодическим внешним воздействием.

3. Исследуемая система состояла из двух одинаковых нелинейных колебательных контуров, образованных катушками индуктивности и нелинейными емкостями p - n -переходов двух транзисторов КП903. Связь между контурами осуществлялась с помощью специального усилителя, так что было обеспечено воздействие первого контура на второй и отсутствие влияния второго на первый. Оба контура возбуждались синфазными синусоидальными сигналами от внешнего генератора, амплитуды которых можно было регулировать независимо.

В отсутствие связи каждый контур демонстрировал при увеличении амплитуды воздействующего сигнала U последовательность бифуркаций удвоения периода, завершающуюся переходом к хаосу при некотором критическом значении $U = U_c$. В области $U < U_c$ можно было уверенно различить 5 бифуркаций удвоения, что соответствует появлению колебаний периода $32T_0$ (T_0 — период внешнего воздействия). При увеличении параметра U в области $U > U_c$ дискретные спектральные линии последовательно исчезали (с образованием на их месте участков сплошного спектра) в порядке, обратном порядку их появления. Наблюдались также "окна устойчивости" — зоны в области $U > U_c$, в которых реализовались периодические режимы колебаний с периодами $3 \cdot 2^N T_0$, $5 \cdot 2^N T_0$ и т.п. Характер эволюции спектра колебаний в зависимости от параметра U , а также выполненные оценки масштабных констант соответствуют результатам теории Фейгенбаума.

Введение связи не вносило каких-либо изменений в колебания первого кон-

тура. Динамика второго контура определялась параметрами U_1 и U_2 — амплитудами внешнего воздействия на каждый из двух контуров, а также величиной связи между контурами. На рис. 1 справа показаны найденные экспериментально области различных режимов колебаний на плоскости параметров (U_1, U_2) при определенном фиксированном уровне связи. Указаны значения периода колебаний, выраженные в единицах T_0 , штриховкой отмечена граница возникновения хаоса. Картина областей, полученная в эксперименте, находится в хорошем качественном соответствии с найденной для модельного отображения (2), хотя ожидаемые свойства масштабной инвариантности справедливы лишь приблизительно. Последнее, очевидно, связано с тем, что в эксперименте разрешающая способность аппаратуры позволяет фиксировать сравнительно небольшое число удвоения периода N , тогда как универсальные свойства подобия справедливы в асимптотике по N .

Варьируя два параметра U_1 и U_2 , в эксперименте легко можно было найти бикритическую точку, характерным свойством которой является переход к хаосу в первом контуре при сколь угодно малом увеличении параметра U_1 и переход к хаосу во втором контуре при сколь угодно малом увеличении параметра U_2 . Здесь приведены фотографии спектров колебаний каждого контура в бикритической точке (рис. 2). Они демонстрируют замечательное сходство с рассчитанными спектрами для модельного отображения (2). Бикритическую точку с присущими ей свойствами спектра сигнала и характерной структурой прилегающих областей пространства параметров можно было наблюдать при изменении уровня связи контуров в широких пределах.

Результаты данной работы наглядно показывают, что универсальность закономерностей критического поведения выражается не только в динамике индивидуальной системы, демонстрирующей переход к хаосу через удвоения периода, но и в явлениях, возникающих при взаимодействии таких систем.

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
Академии наук СССР
Саратовский государственный университет
им. Н.Г. Чернышевского

Поступило
22 VI 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. Фейгенбаум М. — УФН, 1983, т. 141, вып. 2, с. 343–374.
2. Pomeau Y., Manneville P. — Comm. Math. Phys., 1980, vol. 74 (2), p. 189–197.
3. Rand D., Ostlund S., Sethna J., Siggia E. — Phys. Rev. Lett., 1982, vol. 49 (2), p. 132–135.
4. Шарковский А.Н. — Укр. матем. журн., 1964, т. 16, № 1, с. 61–71.
5. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И., Старобинец И.И. — Письма ЖЭТФ, 1984, т. 39, вып. 12, с. 561–564.
6. Testa J., Perez J., Jaffries C. — Phys. Rev. Lett., 1982, vol. 48 (11), p. 714–717.