

УДК 534.015; 537.86:519

РЕНОРМГРУППА, УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ И СКЕЙЛИНГ В ДИНАМИКЕ ОДНОМЕРНЫХ АВТОВОЛНОВЫХ СРЕД

С. П. Кузнецов

Методом ренормгруппы изучается поведение определенного класса одномерных автоволновых сред у порога возникновения динамического хаоса. Установлены свойства универсальности и масштабной инвариантности пространства параметров, изучены различные типы бифуркаций и характерные режимы динамики рассматриваемых сред.

Понятия скейлинга и ренормгруппы (РГ), сформировавшиеся в квантовой теории поля и в теории фазовых переходов, в последнее время привлекаются для изучения поведения нелинейных колебательных систем вблизи порога возникновения динамического хаоса [1-4]. О скейлинге говорят в тех случаях, когда при некоторых значениях параметров системы в ней реализуется иерархия образований, подобных друг другу и характеризующихся различными пространственными и (или) временными масштабами. Точка пространства параметров, в которой это имеет место, называется критической точкой. Ясно, что скейлинг означает инвариантность динамических уравнений системы относительно некоторого преобразования, включающего изменение масштаба пространственных координат, времени и динамических переменных. Это и есть преобразование РГ. Предметом РГ анализа является, во-первых, нахождение динамических уравнений, инвариантных относительно преобразования РГ, и, во-вторых, изучение влияния возмущений параметров, выводящих систему из критической точки, на форму этих уравнений.

Если вид динамических уравнений в критической точке однозначно определяется требованием инвариантности по отношению к преобразованию РГ, то это означает универсальность скейлинговых закономерностей: они оказываются обусловленными свойствами РГ, а не конкретным видом исходных уравнений, описывающих динамику в области малых пространственных и временных масштабов.

В настоящей статье с помощью метода РГ рассматривается поведение некоторого класса распределенных систем вблизи порога возникновения динамического хаоса. Это исследование представляет собой развитие подхода, намеченного в предыдущих работах [5-7].

Представим себе распределенную среду, в которой каждая точка есть нелинейная диссипативная система (автоколебательная или возбуждаемая внешним воздействием) и имеется локальная связь между пространственно разделенными элементами. В таких средах возможны волновые процессы, характеристики которых в какой-то мере не зависят от начальных и граничных условий и которые, следуя Р. В. Холлову, называют автоволнами.

Основное предположение, выделяющее рассматриваемый далее класс сред, состоит в том, что индивидуальные элементы, из которых строится среда, — это системы, демонстрирующие при изменении некоторого параметра фейгенбаумовскую последовательность удвоений временного периода [1,2]. Поскольку это один из типичных сценариев возникновения хаоса в простых системах, то автоволновые среды данного типа тоже широко распространены. К ним относятся, например, 1) решетка из нелинейных диссипативных осцилляторов под внешним

периодическим воздействием, которая является моделью кристалла в поле оптической или акустической волны, 2) распределенный контакт Джозефсона при воздействии на него СВЧ колебаний, 3) радиотехнические генераторы с запаздывающей обратной связью и ряд других [7].

1. ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ СРЕДЫ

В качестве исходного элемента для построения распределенной среды выберем простейшую систему, демонстрирующую переход к хаосу через удвоения периода, описываемую рекуррентным уравнением

$$u_{n+1}(x) = f(u_n). \quad (1)$$

Здесь u_n — переменная, характеризующая состояние среды в момент времени n , $f(u)$ — гладкая функция, зависящая от параметра λ , которая отображает отрезок оси u в себя и имеет на этом отрезке один простой экстремум, например, $f(u) = \lambda - u^2$ при $0 \leq \lambda \leq 2$. (Для удобства всегда будем отсчитывать величину u от точки экстремума.)

Рассмотрим теперь одномерную среду, состояние которой в n -й момент дискретного времени задается функцией пространственной координаты $u_n(x)$. Пусть изменение состояния за один временной шаг определяется уравнением

$$u_{n+1}(x) = F[u_n], \quad (2)$$

где F — нелинейный оператор, инвариантный по отношению к пространственным сдвигам. Чтобы среду можно было рассматривать как совокупность элементов, описываемых уравнением (1), потребуем, чтобы при действии на не зависящее от x состояние u оператор F сводился к функции $f(u)$, удовлетворяющей сформулированным ранее условиям. Предположения, конкретизирующие характер связи между пространственно разделенными элементами среды, будут сделаны ниже.

Согласно [1, 8], уравнение (1) можно применять для количественного описания перехода к хаосу в любых типичных нелинейных диссипативных системах, демонстрирующих удвоения периода, в том числе и в системах, описываемых дифференциальными уравнениями; при этом необходимо лишь придать надлежащую трактовку переменной u и дискретному времени n^* . Можно ожидать, что в таком же смысле модель (2) применима к широкому классу распределенных сред, в том числе к системам, описываемым нелинейными уравнениями с частными производными.

2. РЕНОРМГРУППОВОЙ АНАЛИЗ

2.1. Построение преобразования РГ. По аналогии с [1] перейдем от оператора (2) к оператору, описывающему эволюцию среды за два временных шага и выполним дополнительно преобразование масштаба S :

$$Su(x) = au(bx), \quad (3)$$

где a и b — константы, подлежащие определению. В результате получим оператор $F_1[u] = SFFS^{-1}[u]$. Повторяя эту процедуру многократно, приходим к рекуррентному соотношению [7]

* Процедура перехода от дифференциальных уравнений к отображению (1) состоит в следующем. Сначала выполняют сечение фазового пространства некоторой поверхностью и ограничиваются рассмотрением дискретного набора состояний системы в те моменты, когда фазовая траектория пересекает поверхность. Из-за диссипативности системы любой элемент фазового объема претерпевает за большое время сильное сжатие. Поэтому при описании динамики на больших временных интервалах отображение секущей поверхности в себя сводится к уравнению типа (1), причем переменная u отвечает тому направлению в фазовом пространстве, по которому степень сжатия минимальна. (В области стохастических режимов следует говорить уже о растяжении по направлению u .) Если полученная в результате этой процедуры функция $f(u)$ удовлетворяет сформулированным условиям, то это и означает существование в системе фейнбаумовского сценария перехода к хаосу.

$$F_n[u] = SF_{n-1}F_{n-1}S^{-1}[u]. \quad (4)$$

Это и есть уравнение РГ. Оператор F_n представляет собой оператор эволюции среды за 2^n шагов времени (с пересчитанными масштабами величин u и x). Далее мы используем уравнение (4) для изучения поведения операторов F_n в асимптотике больших n . Тем самым будет получена информация об эволюции системы на больших временах, что и составляет основной предмет исследования в задаче о переходе к хаосу.

2.2. Неподвижная точка РГ преобразования. Рассмотрим случай, когда «затравочный» оператор эволюции за один шаг имеет вид

$$F_0[u] = \hat{l}f(u), \quad (5)$$

где \hat{l} — линейный интегральный оператор: $\hat{l}u(x) = \int l(x-\xi)u(\xi)d\xi$.

Потребуем, чтобы спектр этого оператора $l(k) = \int l(x)e^{-ikx}dx$ был четной аналитической функцией волнового числа k и при всех действительных $k \neq 0$ удовлетворял неравенству $|l(k)| < 1$. При малых k

$$l(k) = 1 - D^2k^2 + O(k^4), \quad (6)$$

где D — константа. Выбор оператора эволюции в форме (5) отвечает введению между пространственно разделенными элементами среды такой связи, которая стремится выровнять их мгновенные состояния, т. е. способствует затуханию коротковолновых возмущений. Этот тип связи естественно назвать диффузионным. Величина D определяет масштаб длины, на который распространяется влияние связи за один временной шаг, и может быть названа диффузионной длиной.

Пусть параметр λ равен фейгенбаумовскому критическому значению λ_c , а масштабные константы a и b выбраны равными соответственно $-2,5029\dots$ и $\sqrt{2}$ (λ_c — точка накопления бифуркаций удвоения, a — одна из универсальных констант Фейгенбаума [1,2]). Тогда последовательность операторов F_n , порождаемая уравнением (4) с начальным условием (5), имеет регулярный предел $G = \lim F_n$. Это утверждение доказано в работе [7] для частного случая, когда операторы F_n действуют на слабонеоднородные состояния

$$u(x) = u + \varepsilon v(x), \quad (7)$$

где u не зависит от x , ε — бесконечно малая величина. Мы считаем, однако, что оно справедливо и для произвольных неоднородных состояний. Как будет видно из численных результатов (разд. 3), это предположение приводит к правильным представлениям о скейлинговых свойствах рассматриваемых сред.

Предельный оператор G удовлетворяет операторному уравнению

$$G[u] = S G G S^{-1}[u] \quad (8)$$

и, согласно [7], приближенно выражается в виде

$$G[u] = \exp(D^2\partial^2/\partial x^2)g(u), \quad (9)$$

где g — функция Фейгенбаума [1]. Оператор G — это неподвижная точка уравнения РГ в пространстве операторов. Он универсален в том смысле, что не зависит от конкретного выбора функции f и оператора \hat{l} в затравочном операторе (5).

2.3. Решение уравнения РГ вблизи неподвижной точки. Пусть имеется среда с диффузионной связью между составляющими ее элементами при критическом значении параметра λ_c . Пусть, далее, мы слегка «испортили» ее, введя дополнительную слабую связь иного типа

или изменив λ . (Возмущения не нарушают трансляционную инвариантность задачи!) Как изменится вид оператора эволюции за большое число шагов?

Будем искать решение уравнения (4), близкое к G , в виде

$$F_n[u] = G[u] + \mu H_n[u], \quad \mu \ll 1. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (4) и пренебрегая членами порядка μ^2 , получим

$$H_n[u] = SG'(GS^{-1}u)H_{n-1}S^{-1}[u] + SH_{n-1}GS^{-1}[u], \quad (11)$$

где $G'(GS^{-1}u)$ — производная Фреше от оператора G . Уравнение (11)

имеет структуру $H_n[u] = \hat{M}H_{n-1}[u]$, где \hat{M} — линейный оператор. Асимптотика его решения при больших n будет определяться суперпозицией тех собственных векторов оператора \hat{M} , которым отвечают собственные числа, превышающие по модулю единицу и которые будем называть существенными*. Итак, мы приходим к операторной задаче на собственные векторы и собственные значения

$$\hat{v}H[u] = SG'(GS^{-1}u)HS^{-1}[u] + SHGS^{-1}[u]. \quad (12)$$

Как показано в Приложении 1, оператор \hat{M} имеет четыре существенных собственных вектора $h_i[u]$, $i=0, 1, 2, 3$, которым соответствуют собственные числа $v_0 = \delta = 4,6692 \dots$, $v_1 = -1,7698 \dots$, $v_2 = 1,4142 \dots$, $v_3 = -1,2512 \dots$. Поэтому для оператора эволюции за 2^n шагов получаем выражение

$$F_n[u] = G[u] + \Lambda \delta^n h_0[u] + \alpha v_1^n h_1[u] + \beta v_2^n h_2[u] + \gamma v_3^n h_3[u], \quad (13)$$

причем вид начального возмущения $\epsilon H_0 = F - G$ определяет только значения констант Λ , α , β , γ . Эти константы играют роль существенных параметров задачи. Величина Λ характеризует отклонение управляющего параметра λ от критической точки: $\Lambda = \lambda - \lambda_c$, а параметры α , β , γ — различные типы связи между элементами среды, которые могут существовать в дополнение к диффузионной связи (см. Приложение). Из соотношения (13) вытекают следующие важные выводы.

Универсальность. Если исходный оператор эволюции F близок к неподвижной точке G , то оператор эволюции за большое число временных шагов полностью определяется четырьмя константами Λ , α , β , γ . Поэтому области различных режимов динамики среды в пространстве этих параметров имеют универсальную структуру, не зависящую от конкретного вида исходного оператора.

Масштабная инвариантность. Как видно из (13), вид оператора эволюции не меняется при выполнении замены $n \rightarrow n+k$, $\Lambda \rightarrow \Lambda \delta^{-k}$, $\alpha \rightarrow \alpha v_1^{-k}$, $\beta \rightarrow \beta v_2^{-k}$, $\gamma \rightarrow \gamma v_3^{-k}$, где k — любое целое число. Следовательно, в точке $\Lambda \delta^{-k}$, αv_1^{-k} , βv_2^{-k} , γv_3^{-k} должны реализоваться такие же режимы динамики среды, как и в точке Λ , α , β , γ , но с увеличенным в $2^{k/2}$ раз пространственным и в 2^k раз временным масштабом.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ: РЕШЕТОЧНЫЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В силу установленной в предыдущем разделе универсальности для выявления структуры пространства параметров вблизи критической точки $(\lambda_c, 0, 0, 0)$ можно исследовать любую конкретную систему рассматриваемого класса. Для численных экспериментов наиболее удобны решеточные модели, в которых дискретизирована не только временная, но и пространственная координата.

* Как и в теории Фейгенбаума [1, 2], из числа существенных собственных векторов надо исключить те, которые связаны с инфинитезимальными заменами переменных. Далее это сделано без дополнительных оговорок.

Модель среды с чистой диффузионной связью между составляющими ее элементами ($\alpha = \beta = \gamma = 0$) можно получить, задавая на дискретной решетке оператор эволюции вида (5). Подходящим примером является модель, описываемая уравнением

$$u_{n+1, m} = \hat{l}(\lambda - u_{n, m}^2), \quad (14)$$

где m — дискретная пространственная координата, n — дискретное время, \hat{l} — оператор усреднения по трем узлам решетки:

$$\hat{l}v_m = (1/3)(v_{m-1} + v_m + v_{m+1}). \quad (15)$$

Динамика моделей такого типа изучалась в [5, 7]. Здесь будут рассматриваться более сложные модели сред, в которые последовательно вводится каждый из типов связи, характеризующихся параметрами α , β , γ . Общий принцип конструирования таких моделей состоит в том, чтобы добавлять в уравнение (14) дополнительные члены, обращающиеся в нуль в случае пространственно-однородных состояний. Структура этих членов выбирается на основании результатов Приложения 1 соответственно свойствам операторов $h_i[u]$ (характер зависимости от u , симметрия или антисимметрия по отношению к изменению ориентации координатной оси). Ограничимся анализом систем асимптотически большой длины, выбирая ее так, чтобы она не влияла на бифуркационные значения остальных параметров.

3.1. Рассмотрим среду, в которой присутствует тип связи, характеризующийся параметром α . Чтобы ввести связь этого типа в модель (14), нужно добавить к выражению в скобках нелокальный член, меняющий знак при изменении ориентации координатной оси и зависящий от u соответственно собственной функции $\Phi_A(u)$ (Приложение 1). Итак, обратимся к изучению следующей модели:

$$u_{n+1, m} = \hat{l}[\lambda - u_{n, m}^2 + \alpha(1 - 0,176u_{n, m})(u_{n, m+1} - u_{n, m-1})], \quad (16)$$

где \hat{l} — оператор усреднения (15). Граничные условия зададим в виде

$$u_{n, 0} = c_1, \quad u_{n, L} = c_2, \quad (17)$$

где L — длина системы, c_1 и c_2 — константы («закрепленные концы»).

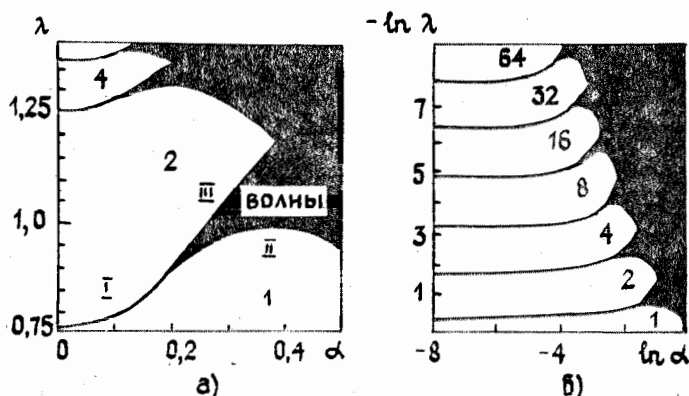


Рис. 1. Плоскость параметров модели (16). Светлым показаны области режимов, обладающих пространственной однородностью вдали от краев среды. Закрашены области существенно неоднородных режимов. Те же обозначения приняты на рис. 4 и 7.

Результаты численного исследования модели (16) представлены на рис. 1, 2. На рис. 1 показана часть плоскости параметров (α, λ) , прилегающая к критической точке $(0, \lambda_c)$. Рис. 2 иллюстрирует прост-

ранственно-временную динамику среды в различных областях плоскости параметров. Анализ этих результатов выявляет три типа бифуркаций.

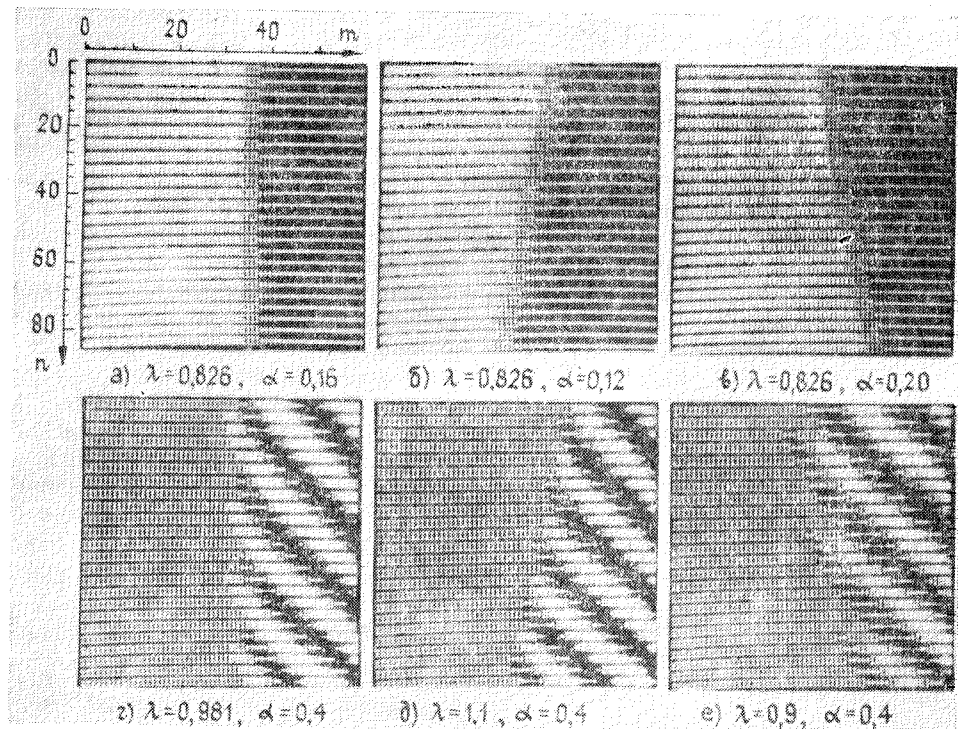


Рис. 2. Пространственно-временные диаграммы, иллюстрирующие динамику среды. Координата отсчитывается по горизонтали, время — по вертикали вниз. Значения n в различных точках характеризуются яркостью символов.

Если мы находимся на бифуркационной линии I (рис. 1), то возможна ситуация, когда слева от узкой переходной области элементы пребывают в состоянии с временным периодом 1, а справа — с временным периодом 2 (рис. 2а). Если сдвинуться с бифуркационной линии влево или вверх, то переходная область начнет смещаться справа налево, так что в конце концов вся среда окажется в состоянии с периодом 2 (рис. 2б). Если же сдвинуться с этой линии вправо или вниз, то переходная область начнет смещаться направо и вся среда придет в состояние с временным периодом 1 (рис. 2в).

Если мы находимся на бифуркационной линии II, возможна ситуация, когда в среде имеется область, в которой элементы находятся в состоянии периода 1 (слева), и область бегущих волн (справа), рис. 2г. Они разделены переходной областью, которая играет роль внутреннего источника бегущих направо волн. При увеличении λ область-источник начинает двигаться влево, так что в конечном итоге вся среда оказывается вовлеченной в движение типа бегущих волн (рис. 2д). При уменьшении λ область-источник начинает двигаться вправо, и в конце концов среда оказывается в состоянии периода 1 (рис. 2е).

Бифуркационная линия III разделяет режим бегущих волн и режим периода 2. Проследим, как происходит смена режима при переходе через эту линию. Пусть сначала значение α больше бифуркационного. Тогда, как уже говорилось, в среде имеется область-источник, которая испускает волны направо, а сама движется налево. Дойдя до границы среды, источник останавливается, но не исчезает, так что режим бегущих волн продолжает существовать. Когда параметр α приближается к точке бифуркации, длина волн, которые испускаются источником, находящимся у границы среды, увеличивается и стремится к бесконечности. После прохождения точки бифуркации бегу-

щие волны более не испускаются, а среда остается в состоянии с временным периодом 2.

В Приложении 2 показано, что бифуркации I и II обусловлены сменой неустойчивости пространственно-однородного состояния с конвективной на абсолютную [8] и, таким образом, не имеют точных аналогов в теории сосредоточенных систем. В частности, для этих бифуркаций характерно необычное сочетание свойств мягких и жестких переходов: с одной стороны, они обратимы (нет гистерезиса), а с другой, — сопровождаются конечным изменением состояния среды при малом изменении управляющих параметров. Бифуркация III связана с явлениями на краю среды, где отклонение от пространственной однородности существенно и поэтому не обнаруживается в рамках проведенного в Приложении анализа на неустойчивость.

Заметим, что изменение знака параметра α эквивалентно изменению ориентации оси координат; при этом форма бифуркационных линий остается той же.

Согласно результатам РГ анализа, плоскость параметров должна обладать масштабно-инвариантной структурой вблизи критической точки $(0, \lambda_c)$. Действительно, из рис. 1 можно видеть, что обсуждавшаяся конфигурация областей и бифуркационных линий многократно повторяется в уменьшающихся масштабах при приближении к критической точке. В асимптотике форма областей становится универсальной, что особенно наглядно видно в логарифмических координатах (рис. 1б). Коэффициенты подобия соответствуют ожидаемым (δ по оси λ и ν_1 по оси α).

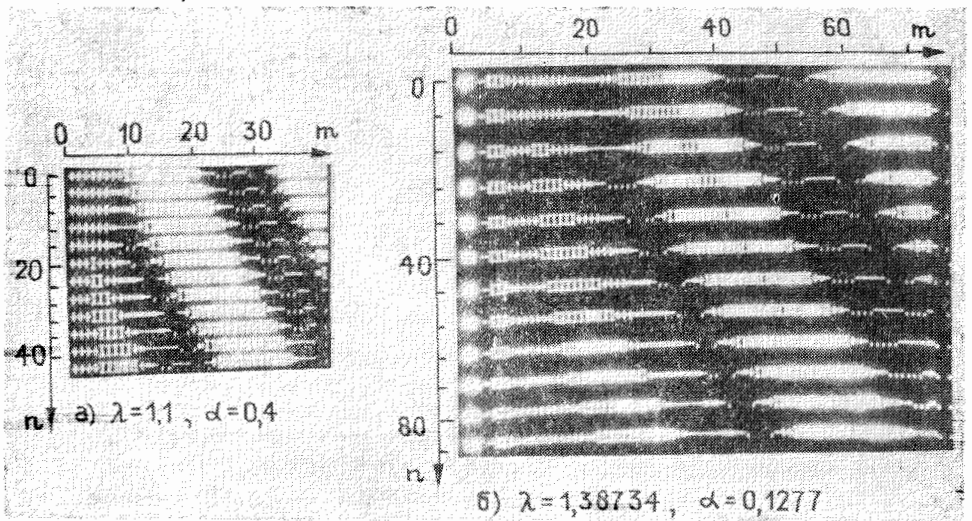


Рис. 3.

Рис. 3 демонстрирует скейлинг режимов динамики среды, реализующихся в двух точках плоскости параметров, для которых значения $\lambda - \lambda_c$ отличаются в δ^2 раз, а значения α в ν_1^2 раз. Как показывает сравнение рис. 3а и 3б, возникающие в среде структуры подобны, причем пространственный масштаб отличается в два, а временной в четыре раза. Заметим, что если бы проводилось преобразование параметров в δ^r и ν_1^r раз с нечетным r , то его нужно было бы дополнить изменением ориентации координатной оси. (Последнее связано с тем, что $\nu_1 < 0$ и при r -кратной перенормировке α меняет знак.)

3.2. Перейдем к изучению среды, в которой имеется тип связи, характеризуемый параметром β . Введение этого типа связи отвечает такой ситуации, когда кроме диффузии имеется снос с постоянной скоростью. Фигурирующий в (5) линейный оператор должен быть заменен при этом на $\hat{\Delta}_\beta$, где $\hat{\Delta}_\beta$ — оператор сдвига: $\hat{\Delta}_\beta v(x) = v(x - \beta)$.

Спектр оператора \hat{L}_β будет иметь вид $l(k)e^{i\beta h} = 1 + i\beta k - (D^2 + \beta^2/2)k^2 + O(k^2)$. Чтобы сконструировать решеточную модель, модифицируем оператор \hat{L} в уравнении (14) так, чтобы его спектр соответствовал при малых k приведенному выражению. Для этого можно положить

$$\hat{L}v_m = p_1 v_{m-1} + (1 - p_1 - p_2) v_m + p_2 v_{m+1}, \quad (18)$$

где

$$p_{1,2} = (1/2) ((1/2) \mp \beta + \beta^2), \quad D = (1/2).$$

Граничные условия на концах среды по-прежнему зададим в виде (17).

На рис. 4 показана структура плоскости параметров (β, λ) вблизи критической точки $(0, \lambda_c)$. Как и в предыдущем случае, цифрой I отмечены бифуркационные линии, отвечающие изменению направления движения фронта переключения между состояниями с различным временным периодом. Эта бифуркация сопровождается сменой характера неустойчивости пространственно-однородного режима с конвективной на абсолютную (Приложение 2). Цифрой IV отмечена бифуркация, которая состоит в следующем. Если мы находимся слева от бифуркационной линии, то в пограничной зоне вблизи левого края среды зависимость величины u от координаты имеет вид колебаний, затухающих при удалении от края. По мере приближения к бифуркационной линии пространственный декремент затухания уменьшается и на самой линии обращается в нуль. После бифуркации вся среда оказывается в неоднородном состоянии, которое вдали от левой границы является пространственно-периодическим. Временной период режима остается тем же, что и до бифуркации.

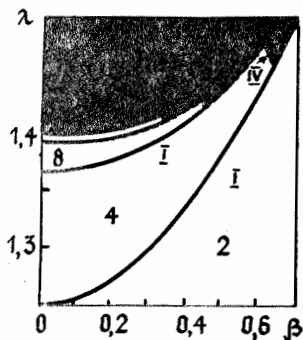


Рис. 4.

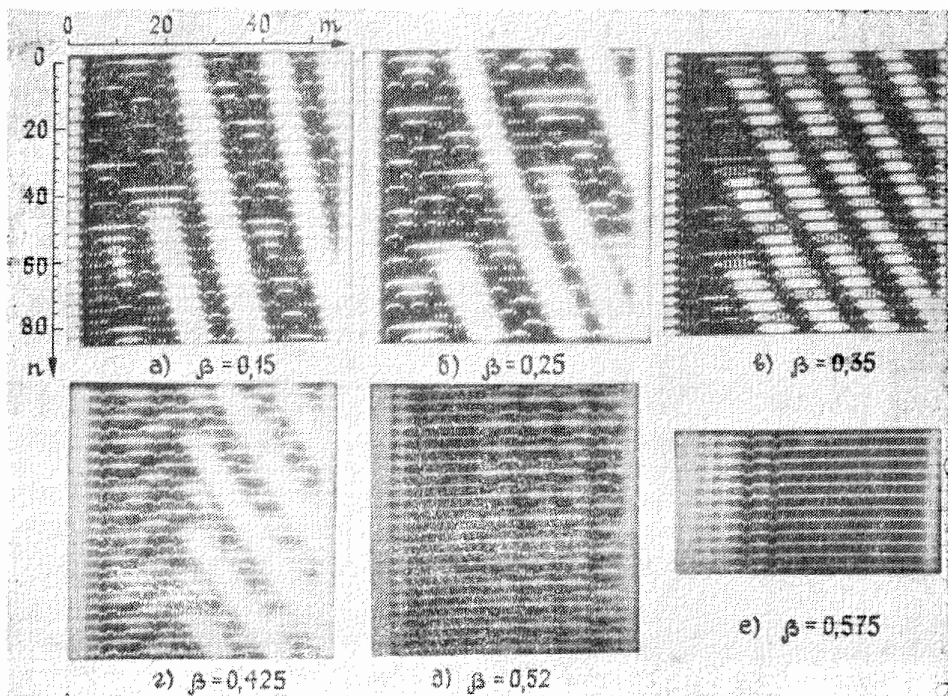


Рис. 5.

Общее представление о пространственно-временной динамике среды в различных областях плоскости параметров (β, λ) дает рис. 5. Все рисунки (а—е) относятся к одному и тому же значению $\lambda=1,45$ и расположены в порядке возрастания параметра β . При $\beta=0$ имеем среду с симметричной диффузионной связью, в которой реализуется стохастический режим [7]. Стохастическая динамика сохраняется и при малых β , отличных от нуля (хаотические бегущие волны на рис. 5а и б). При увеличении β хаос исчезает и появляется квазипериодический режим бегущих волн (рис. 5в, г), которые генерируются у левого края среды и уходят направо. При дальнейшем увеличении β бегущие волны также исчезают и возникает состояние среды с временным периодом 4, которое характеризуется сложной пространственной структурой (рис. 5д). После пересечения бифуркационной линии I реализуется однородное вдали от края состояние с временным периодом 2 (рис. 5е). Заметим, что замена $\beta \rightarrow -\beta$ эквивалентна изменению направления координатной оси.

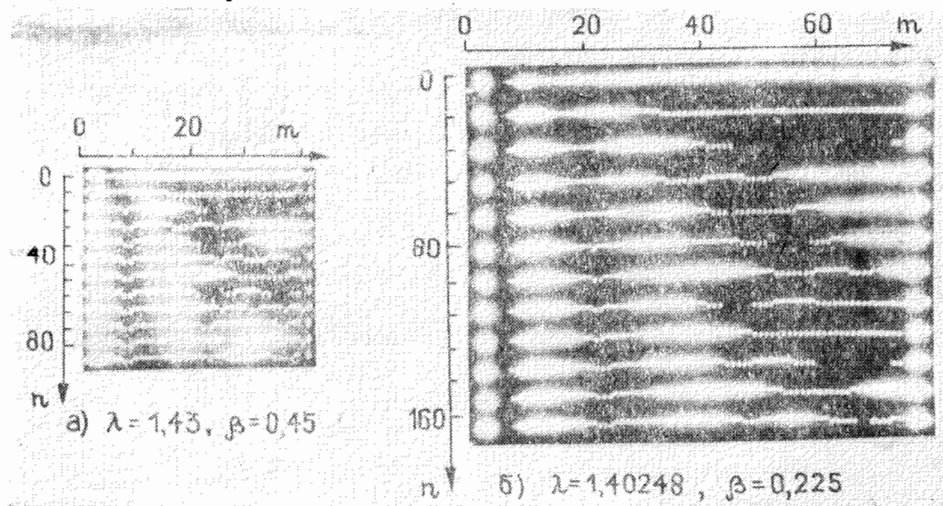


Рис. 6.

Из рис. 4 видно, что картина областей вблизи критической точки имеет масштабно-инвариантную структуру. Она воспроизводится при изменении масштаба по осям координат λ и β в δ и v_2 раз в соответствии с результатами РГ анализа*. Рис. 6 иллюстрирует подобие структур, реализующихся в среде в двух точках плоскости параметров, для которых значения $\lambda - \lambda_c$ отличаются в δ^2 раз, а значения β в v_2 раз.

3.3. Последний случай, который осталось обсудить, — это среда со связью, определяемой параметром γ . Для введения этого типа связи в модель (14) следует добавить к выражению в скобках симметричный нелокальный член, зависимость которого от u соответствует собственной функции $\Phi_A(u)$ (Приложение 1). Рассмотрим модель

$$u_{n+1, m} = \hat{l} [\lambda - u_{n, m}^2 + \gamma(1 - 0,176u_{n, m}) (u_{n, m+1} - 2u_{n, m} + u_{n, m-1})], \quad (19)$$

где

$$\hat{l} = \hat{l}_1^2, \quad \hat{l}_1 v_m = (1/3)(v_{m-1} + v_m + v_{m+1}).$$

Граничные условия, в отличие от предыдущих случаев, зададим в виде $u_{n, 0} = u_{n, 1}$, $u_{n, L+1} = u_{n, L}$ (свободные концы)**.

* Отметим отличие от предыдущего случая (п.3.1): поскольку $v_2 > 0$, то при преобразовании подобия ориентация пространственной координаты не меняется.

** Для системы (19) с симметричной связью результаты, аналогичные описанным ниже, получаются и в случае закрепленных концов. При этом, однако, приходится увеличивать длину системы для выявления асимптотического по L поведения.

На рис. 7 показана часть плоскости параметров (γ, λ) , прилегающая к критической точке $(0, \lambda_c)$. Большая светлая область в центре рисунка — это область пространственно-однородного режима с временным периодом 4. Поясним характер бифуркаций, наблюдаемых при выходе из этой области через различные границы.

Переход через верхнюю границу соответствует бифуркации удвоения временного периода пространственно-однородного решения, а переход через нижнюю границу — уменьшению периода в два раза.

При переходе через боковые границы области происходят бифуркации потери симметрии с появлением пространственно-неоднородных режимов. Имеется три различных варианта этих бифуркаций (на рис. 7 — линии $a, б, в$). Первая бифуркация (a) сопровождается возникновением периодической стоячей волны, временной период которой вдвое больше, чем у исходного режима (рис. 8а). Эта бифуркация является мягкой, гистерезис отсутствует. Две другие линии ($б, в$) отвечают жестким бифуркациям потери симметрии. В результате скачком появляются более коротковолновые, чем в случае (a), пространственные структуры (рис. 8 б, в). Возникающий пространственно-неоднородный режим имеет в случае ($б$) тот же временной период, как и исходный, а в случае ($в$), по-видимому, сразу оказывается стохастическим.

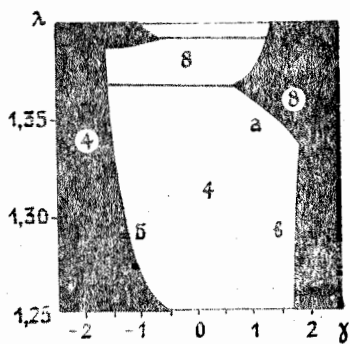


Рис. 7.

Вблизи точки пересечения бифуркационных линий (a) и ($в$) могут реализоваться режимы конкуренции между коротковолновыми и длинноволновыми возмущениями. В некоторой области конечной ширины на плоскости (γ, λ) оба типа возмущений сосуществуют, будучи пространственно разделенными (рис. 9а). За пределами этой области один из них вытесняет другой (рис. 9б).

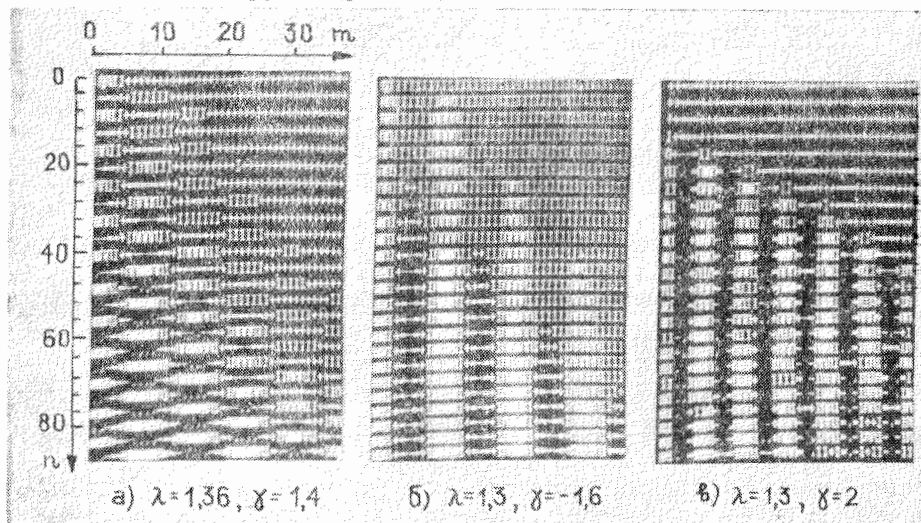


Рис. 8.

В соответствии с ожидаемым свойством масштабной инвариантности структура плоскости параметров (γ, λ) переходит в себя при изменении масштаба в δ раз по оси λ и в ν_3 раз по оси γ . Поскольку $\nu_3 < 0$, то изменение масштаба сопровождается зеркальным отражением картины областей относительно вертикальной оси. Рис. 10 демонстрирует скейлинг структур, реализующихся в среде в сходственных точках плоскости (γ, λ) , в которых величины $\lambda - \lambda_c$ отличаются в δ^2 раз, а γ в ν_3^2 раз.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитый подход применим к распределенным средам, удовлетворяющим двум условиям: 1) в пространственно-однородном случае среда демонстрирует фейгенбаумовскую последовательность удвоений временного периода; 2) основной (но возможно не единственный) фактор, обеспечивающий связь между элементами среды, — это диффузия, способствующая сглаживанию коротковолновых возмущений.

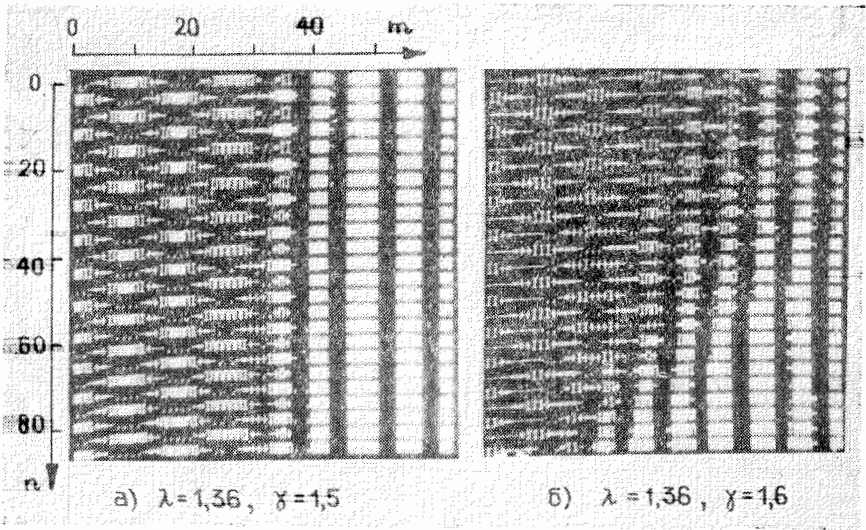


Рис. 9.

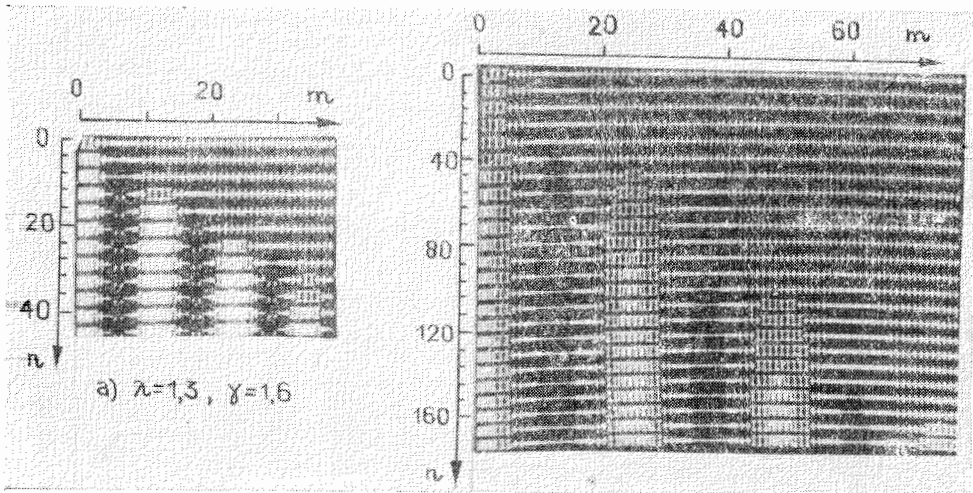


Рис. 10.

Роль построенной теории в отношении данного класса сред подобна той, которую играет теория Фейгенбаума для конечномерных систем. Однако предпринятое развитие метода РГ делает его содержание более глубоким, приводя, например, к представлению о скейлинге пространственных структур на пути к хаосу. В методологическом плане это сближает концепции теории динамических систем с концепциями теории фазовых переходов и квантовой теории поля, что способствует формированию общефизических понятий ренормгруппы и скейлинга.

Может показаться несколько обескураживающим наличие в теории большого числа (четырех) свободных параметров. На самом деле это следствие общности подхода; при анализе конкретных задач существенными могут быть не все параметры. Например, если связь между элементами среды симметрична по отношению к изменению

ориентации пространственной координаты, то $\alpha = \beta = 0$ и остается всего два свободных параметра γ и λ .

Возможные направления дальнейших исследований включают математическое обоснование подхода (строгий анализ операторных уравнений (8) и (12)), а также проведение экспериментальных исследований распределенных систем у порога возникновения хаоса с точки зрения найденных здесь закономерностей критического поведения. Представляет интерес распространение ренормгруппового подхода на двумерные и трехмерные задачи, а также изучение сред, построенных из элементов, обладающих иными типами критического поведения [3, 4].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Как уже говорилось, в рассматриваемых здесь средах всегда предполагается существование диффузионной связи, способствующей затуханию коротковолновых возмущений. Поэтому для понимания особенностей эволюции этих сред полезно рассмотреть некоторые вопросы динамики состояний, близких к пространственно-однородным. В первой части Приложения применительно к этому классу состояний изучаются полученные в основном тексте операторные уравнения. Результаты этого анализа оказываются достаточными, чтобы однозначно сформулировать гипотезы универсальности и подобия (П.2) и сконструировать модели, на основе которых можно выполнить численную проверку этих гипотез (П.3). Во второй части Приложения проводится исследование пространственно-однородных состояний на неустойчивость. Это дополняет результаты проведенных численных экспериментов: выясняется природа наблюдаемых бифуркаций и указывается метод нахождения бифуркационных линий.

П.1. Анализ операторных уравнений на классе слабонеоднородных состояний. Введем следующую форму записи слабонеоднородных состояний типа (7):

$$u(x) = \begin{bmatrix} u \\ v_k e^{ikx} \end{bmatrix} = u + \varepsilon \int v_k e^{ikx} dk, \quad (\text{П.1})$$

где для переменной части $v(x)$ использовано представление Фурье.

Рассмотрим для примера действие на это состояние оператора $G[u] = \exp(D^2 \partial^2 / \partial x^2) g(u)$. Используя введенную форму записи, имеем

$$G \begin{bmatrix} u \\ v_k e^{ikx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(u) \\ v_k g'(u) e^{-D^2 k^2 + ikx} \end{bmatrix}. \quad (\text{П.2})$$

Убедимся, что оператор (П.2) удовлетворяет уравнению (8). В самом деле, действуя на любое слабонеоднородное состояние оператором, стоящим в правой части (8), получаем тот же результат, как и при

$$\begin{aligned} \text{действию оператором } G: & SGG S^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v_k e^{ikx} \end{bmatrix} = SGG \begin{bmatrix} u/a \\ a^{-1} v_k \exp(ikx/\sqrt{2}) \end{bmatrix} = \\ & = SG \begin{bmatrix} g(u/a) \\ a^{-1} v_k g'(u/a) \exp(-D^2 k^2/2 + ikx/\sqrt{2}) \end{bmatrix} = \\ & = S \begin{bmatrix} g(g(u/a)) \\ a^{-1} v_k g'(u/a) g'(g(u/a)) e^{-D^2 k^2/2 + ikx/\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(u) \\ v_k g'(u) e^{-D^2 k^2 + ikx} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что согласно определению функции $g(u)$, $ag(g(u/a)) = g(u)$ и $g'(u/a)g'(g(u/a)) = g'(u)$.

Обратимся теперь к уравнению (12). Предварительно заметим, что результат действия оператора H на такое состояние будет иметь вид

$$H[u(x)] = \begin{bmatrix} h(u) \\ \varphi(k, u) v_k e^{ikx} \end{bmatrix}, \quad (\text{П.3})$$

где $h(u)$ и $\varphi(k, u)$ — функции, определяемые структурой оператора $H[u]$. Не нарушая общности, наложим на функцию $\varphi(k, u)$ условие $\varphi(0, u) = 0^*$. Далее, вычислим входящую в (12) производную Фреше, используя ее определение [10]:

$$G[u(x) + \tilde{u}(x)] = G[u] + G'[u]\tilde{u} + O(\tilde{u}). \quad (\text{П.4})$$

В результате получаем

$$G'[u] = \begin{bmatrix} g'(u) & 0 \\ 0 & e^{-D^2 k^2 + i b x} g'(u) \end{bmatrix}. \quad (\text{П.5})$$

Учитывая (П.3) и (П.5), из (12) имеем

$$\gamma \begin{bmatrix} h(u) \\ \varphi(k, u) e^{i k x} \end{bmatrix} = \quad (\text{П.6})$$

$$= \begin{bmatrix} a g'(g(u/a)) h(u/a) + a h(g(u/a)) \\ e^{-D^2 k^2 + i k x} \left(\varphi\left(\frac{k}{\sqrt{2}}, \frac{u}{a}\right) g'\left(g\left(\frac{u}{a}\right)\right) + \varphi\left(\frac{k}{\sqrt{2}}, g\left(\frac{u}{a}\right)\right) g'\left(\frac{u}{a}\right) \right) \end{bmatrix}.$$

Отсюда видно, что существует два класса собственных векторов: 1) $h \neq 0$, $\varphi = 0$ и 2) $h = 0$, $\varphi \neq 0$. Собственные векторы первого класса не содержат зависимости от волнового числа k ; они отвечают таким возмущениям неподвижной точки (оператора G), которые влияют на индивидуальные элементы среды, но не на характер связи между ними. Напротив, возмущения второго класса модифицируют характер связи между элементами, о чем говорит наличие зависимости от k .

Рассматривая векторы первого класса, получаем для функции h такое же уравнение, как в теории Фейгенбаума [4] (верхняя строка в (П.6)). Оно дает единственную существенную собственную функцию $h(u)$ с собственным числом $\nu_0 = \delta = 4,6692\dots$ и собственный вектор

$$h_0[u] = \begin{bmatrix} h(u) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В случае векторов второго класса решение уравнения для функции $\varphi(k, u)$ (нижняя строка в (П.6)) будем искать в виде $\Psi(k)\Phi(u)$. Тогда переменные разделяются и можно записать

$$\eta \Phi(u) = g'(g(u/a)) \Phi(u/a) + g'(u/a) \Phi(g(u/a)), \quad (\text{П.7})$$

$$\xi \Psi(k) = e^{-D^2 k^2 / 2} \Psi(k/\sqrt{2}).$$

Первое уравнение имеет существенные собственные функции $\Phi_A(u)$ и $\Phi_B(u)$, которые ведут себя вблизи начала координат соответственно как $1 + O(u)$ и $u + O(u^3)$ [6]. Им отвечают собственные числа $\eta_A = a$ и $\eta_B = 2$ (это нетрудно проверить, рассматривая уравнение в области малых u). С этими двумя собственными функциями ассоциируются два различных способа введения связи между элементами среды, которые будем обозначать как A и B [6] (их качественную трактовку см. в [11]).

Собственные функции второго уравнения (П.7) имеют вид $\Psi_m(k) = (ik)^m e^{-D^2 k^2}$, $m = 1, 2, 3, \dots$. Здесь мы учли наложенное условие $\varphi(0, u) = 0$, а также то, что $\Psi(k) = \Psi^*(-k)$, так как $\varphi(k, u)$ есть фурье-образ действительной функции. Подставляя $\Psi_m(k)$ в уравнение, можно видеть, что собственные числа есть $\xi_m = 2^{-m/2}$. Собственные функции с четными m отвечают связи симметричной по отношению к изменению направления координатной оси, а с нечетными — антисимметричной.

* Если $\varphi(0, u) \neq 0$, то можно переопределить функции h и φ следующим образом: $h'(u) = h(u) - \varphi(0, u)$, $\varphi'(k, u) = \varphi(k, u) - \varphi(0, u)$.

Комбинируя результаты анализа двух уравнений (П.7), находим, что существенные собственные векторы второго класса $h, [u] = \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_s e^{ikx} \end{bmatrix}$ характеризуются следующими собственными числами и собственными функциями $\varphi(k, x)$ *.

1) Антисимметричная связь типа A: $v_1 = \eta_A \xi_1 = (a/\sqrt{2})$, $\varphi_1 = ike^{-D^2 k^2} \Phi_A(u)$.

2) Антисимметричная связь типа B: $v_2 = \eta_B \xi_1 = \sqrt{2}$, $\varphi_2 = ike^{-D^2 k^2} \Phi_B(u)$.

3) Симметричная связь типа A: $v_3 = \eta_A \xi_2 = (a/2)$, $\varphi_3 = -k^2 e^{-D^2 k^2} \times \Phi_A(u)$

П.2. Исследование пространственно-однородных режимов на характер неустойчивости. Пусть при некотором значении λ в протяженной среде может существовать однородное решение с временным периодом N :

$$u_{n+1} = f(u_n), \quad u_{n+N} = u_n. \quad (\text{П.8})$$

Рассмотрим динамику малого локализованного возмущения этого решения $v(x)$. Нас будут интересовать условия реализации абсолютной неустойчивости, при которой возмущение нарастает и охватывает все больший участок среды, включающий область его первоначальной локализации.

Чтобы проследить за эволюцией возмущения, необходимо решить совместно (П.8) и получаемое путем линеаризации (2) уравнение в вариациях. Последнее удобно решать в фурье-представлении, полагая $v(x) = \int v(k) e^{ikx} dk$. Рассматривая возмущение вида $v(k) e^{ikx}$, найдем изменение его амплитуды за период $v_{n+N}(k) = \mu v_n(k)$, где

$$\mu = \mu(k). \quad (\text{П.9})$$

Соотношение (П.9) — это дисперсионное уравнение, поскольку оно связывает волновое число k и величину μ , определяющую временную эволюцию возмущения. Для нахождения условий возникновения абсолютной неустойчивости используем метод [12]. Он состоит в том, что сначала ищутся поверхности в пространстве параметров, которые могут служить границами абсолютной неустойчивости и задаются уравнениями

$$|\mu(k)| = 1, \quad \mu'(k) = 0. \quad (\text{П.10})$$

При этом пространство параметров разбивается на области, характер решения внутри которых следует определить из дополнительных соображений (например, из топологии контура интегрирования в k -плоскости). В нашем случае оказалось более удобным сделать это путем прямого исследования эволюции возмущений в численном эксперименте.

Был проведен анализ на неустойчивость пространственно-однородных решений с временным периодом $N = 2^r$, $r = 0, 1, \dots, 6$ для моделей (16), (18), (19).

Для модели (16) дисперсионное уравнение имеет вид

$$\mu = \left(\frac{1 + 2 \cos k}{3} \right)^N \prod_{n=1}^N [-2u_n + 2i\alpha(1 - 0,176u_n) \sin k]. \quad (\text{П.11})$$

* Диффузионная связь не включена в этот перечень, так как играет в нашем анализе особую выделенную роль, определяя характерный пространственный масштаб оператора эволюции — диффузионную длину. В соответствии с введенной классификацией диффузионная связь — это симметричная связь типа B; ей отвечает собственное число $v_4 = 1$ и собственная функция $\varphi_4 = k^2 e^{-D^2 k^2} \Phi_B(u)$. Определяемое этой собственной функцией возмущение оператора эволюции с очевидностью эквивалентно введению поправки к диффузионной длине.

При фиксированном α методом Ньютона численно подбирались значения k и λ , обеспечивающие выполнение соотношений (П. 10). Найдено два возможных варианта возникновения абсолютной неустойчивости:

$$\mu = -1, \quad \mu' = 0, \quad k \text{ — чисто мнимое;} \quad (\text{П.12})$$

$$|\mu| = 1, \quad \mu' = 0, \quad \mu, k \text{ — комплексные.} \quad (\text{П.13})$$

В первом случае на пороге абсолютной неустойчивости $\mu = -1$, поэтому возникающий после бифуркации режим будет иметь удвоенный временной период. Во втором случае величина μ комплексная и рождающийся режим носит характер бегущих волн. Изображенные на рис. 1 на плоскости (α, λ) бифуркационные линии I рассчитаны с помощью (П.12) а линии II — с помощью (П.13).

Для модели (18) дисперсионное уравнение таково:

$$\mu = [1/2 - \beta^2 + (1/2 + \beta^2) \cos k + i\beta \sin k]^N \prod_{n=1}^N (-2u_n). \quad (\text{П.14})$$

Отсюда численно найдены линии на плоскости (β, λ) , на которых выполнены соотношения (П.12). Они отмечены на рис. 4 цифрой 1*.

Дисперсионное уравнение для модели (19) выглядит так:

$$\mu = \left(\frac{1 + 2 \cos k}{3} \right)^{2N} \prod_{n=1}^N [-2u_n + 2\gamma(1 - 0,176u_n)(\cos k - 1)]. \quad (\text{П.15})$$

В отличие от двух предыдущих случаев, оно имеет действительные коэффициенты. При этом условия (10) оказываются выполненными при действительных μ и k . Реализуются следующие варианты бифуркаций:

$\mu = -1, \quad k = 0$ (верхняя горизонтальная граница области устойчивости на рис. 7),

$\mu = 1, \quad k = 0$ (нижняя горизонтальная граница),

$\mu = -1, \quad k \neq 0$ (линия а на рис. 7),

$\mu = 1, \quad k \neq 0$ (линии б и в).

ЛИТЕРАТУРА

1. Фейгенбаум М. — УФН, 1983, 141, № 2, с. 343.
2. Вул Е. Б., Синай Я. Г., Ханин К. М. — УМН, 1984, 39, № 3, с. 3.
3. Hu B., Rudnik J. — Phys. Rev. Lett., 1982, 48, № 24, p. 1645.
4. Ostlund S., Rand D., Sethna J., Siggia E. — Physica, 1983, D 8, № 3, p. 303.
5. Кузнецов С. П. — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, 25, № 11, с. 1364.
6. Кузнецов С. П. — Изв. вузов — Физика, 1984, 27, № 6, с. 87.
7. Кузнецов С. П., Пиковский А. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1985, 28, № 3, с. 308.
8. Collet P., Eckmann J. P., Koch H. — J. Stat. Phys., 1981, 25, № 1, p. 1. 1979, с. 320.
9. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. — М.: Наука, 1981.
10. Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов. — М.: Мир, 1983, с. 136.
11. Кузнецов С. П. — Изв. вузов — Радиофизика, 1985, 28, № 8, с. 991.
12. Кузнецов А. П. Письма в ЖТФ, 1982, 8, № 15, с. 941.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию
13 июня 1985 г.

RENORMALIZATION GROUP, UNIVERSALITY AND SCALING IN DYNAMICS OF ONE-DIMENSIONAL AUTO-WAVE MEDIA

S. P. Kuznetsov

The behaviour of a certain class of one-dimensional auto-wave media near a threshold of onset of dynamical chaos is investigated by a renormalization group technique. The properties of universality and scaling of parameter space are stated, different types of bifurcations and typical regimes are studied.

* Линии, отмеченные на рис. 4 цифрой IV, имеют иную природу, но также могут быть найдены из анализа дисперсионного уравнения $\mu = \mu(k)$. Соответствующие условия очевидны из приведенного в основном тексте описания этой бифуркации: $\mu = 1, \text{Im } k = 0$.