

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

СТРУКТУРЫ
И БИФУРКАЦИИ

Ответственные редакторы
академик
А. В. ГАПОНОВ-ГРЕХОВ
доктор физико-математических наук
М. И. РАВИНОВИЧ



МОСКВА «НАУКА»

1987

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СИСТЕМ СО СТОХАСТИЧЕСКИМ ПОВЕДЕНИЕМ

С. П. КУЗНЕЦОВ, А. С. ПИКОВСКИЙ

Введение

В последнее время достигнуты значительные успехи в понимании стохастического поведения динамических систем. Наиболее подробно изучены хаотические режимы в простых системах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями или дискретными отображениями. В частности, выявлены и исследованы типичные сценарии перехода от регулярного поведения к хаотическому в простых моделях: через последовательность бифуркаций удвоения периода, перемежаемость, квазипериодический режим [1—6]. В этой связи все большее внимание стали привлекать стохастические режимы в более сложных системах, например в многомерных и распределенных. Здесь можно использовать хорошо известный в теории колебаний методологический прием: если подробно изучена динамика какой-нибудь системы, то, конструируя на ее основе сложные составные модели, можно продвинуться в понимании поведения более широкого класса систем. Например, от гармонического осциллятора мы переходим к связанным осцилляторам, затем к распределенной среде из осцилляторов и изучению волновых процессов.

В данной статье излагаются результаты применения такого подхода к системам со стохастическим поведением. Основное внимание уделяется задаче о переходе к хаосу. Рассматривается взаимодействие двух систем, демонстрирующих переход к хаосу через удвоения периода, и исследуется сплошная среда, составленная из таких систем. Описывается также взаимодействие систем, в каждой из которых переход к хаосу осуществляется через перемежаемость.

1. Взаимодействие двух систем, демонстрирующих переход к хаосу через удвоения периода

Один из наиболее распространенных и, во всяком случае, самый изученный сценарий перехода простых диссипативных систем к хаосу связан с бесконечной последовательностью бифуркаций удвоения временного периода. Как показал М. Фейгенбаум [1, 2], любая система, демонстрирующая этот сценарий, вблизи точки перехода к хаосу (критической точки) характеризуется универсальными свойствами подобия или скейлингом. Он состоит в следующем: если мы изобразим на оси параметра λ , управляющего динамикой системы, области различных режимов, то вся картина областей переходит сама в себя при уменьшении масштаба относительно критической точки в $\delta = 4,6692\dots$ раз с увеличением вдвое временных масштабов движений. Замечательным свойством универсальности является то, что поведение всех таких систем вблизи критической точки можно адекватно описать в деталях с помощью одномерного отображения, зависящего от параметра $u_{n+1} = f(u_n)$ (например, $u_{n+1} = \lambda - u_n^2$).

Рассмотрим систему из двух элементов, каждый из которых описывается одномерным отображением указанного вида. Связь введем наиболее общим способом с помощью функции двух переменных:

$$u_{n+1} = f(u_n) + \varphi(u_n, v_n), \quad v_{n+1} = f(v_n) + \varphi(v_n, u_n). \quad (1)$$

Связь будем считать слабой ($|\varphi| \ll 1$) и потребуем, чтобы она не влияла на динамику при синфазном движении элементов: $\varphi(u, u) = 0$.

Применим к системе (1) тот же аппарат, который позволил Фейгенбауму установить свойства универсальности и подобия в динамике индивидуальных элементов, — метод ренорм-группы (РГ). Первый шаг состоит в получении уравнения РГ. Применяя отображение (1) два раза и изменяя масштаб $u \rightarrow u/a$, $v \rightarrow v/a$, получим отображение того же вида, но с новыми функциями f и φ :

$$u_{n+2} = f_1(u_n) + \varphi_1(u_n, v_n), \quad v_{n+2} = f_1(v_n) + \varphi_1(v_n, u_n). \quad (2)$$

Переход старых функций к новым — это и есть ренорм-преобразование.

Выполняя его N раз, получим функции, определяющие эволюцию системы за 2^N временных шагов. Обозначив пару функций через $G = \{f, \varphi\}$, мы можем записать уравнение РГ в символической форме

$$G_N = R[G_{N-1}]. \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что уравнение РГ имеет неподвижную точку, отвечающую невзаимодействующим системам: $G^0 = \{g(u), 0\}$, где

$g(u)$ — введенная Фейгенбаумом функция, получаемая из решения функционального уравнения

$$g(u) = ag(g(u/a)), \quad a = -2,503... \quad (4)$$

Линеаризуем уравнение РГ вблизи этой неподвижной точки, т. е. подставим в (3) решение в виде $G_N = G^0 + \varepsilon H_N$, $\varepsilon \ll 1$. Тогда для H_N получится линейное уравнение $H_N = \hat{M}H_{N-1}$. Введенное выше условие малости приводит к тому, что линейные уравнения для компонент $H_N = \{h_N, \varphi_N\}$ «расцепляются»:

$$h_N(u) = a [g'(g(u/a)) h_{N-1}(u/a) + h_{N-1}(g(u/a))],$$

$$\varphi_N(u, v) = a [g'(g(u/a)) \varphi_{N-1}(u/a, v/a) + \varphi_{N-1}(g(u/a), g(v/a))].$$

Если искать решения этих уравнений вида $h_N \sim hv^N$, $\varphi_N \sim \varphi v^N$, то получаем задачу на собственные функции и собственные значения:

$$vh(u) = a [g'(g(u/a)) h(u/a) + h(g(u/a))], \quad (5)$$

$$v\varphi(u, v) = a [g'(g(u/a)) \varphi(u/a, v/a) + \varphi(g(u/a), g(v/a))]. \quad (6)$$

Заметим, что уравнение (5) изучалось Фейгенбаумом [1, 2]. Что касается уравнения (6), то для определения собственных значений достаточно рассмотреть его в области $|u - v| \ll 1$. Тогда $\varphi(u, v) \approx \Phi(u)(u - v)$, и относительно функции Φ получается уравнение, детально проанализированное в [7]. Суммируя результаты анализа уравнений (5) и (6), заключаем, что существенные собственные значения, превышающие по модулю единицу, есть $\delta = 4,6692...$, $\delta_A = a = -2,503...$, $\delta_B = 2$. Соответствующие собственные векторы таковы: $H_0 = \{h, 0\}$, $H_A = \{0, \varphi_A\}$, $H_B = \{0, \varphi_B\}$. Таким образом, эволюция решения уравнения РГ вблизи неподвижной точки за большое число шагов N определяется выражением

$$G_N = G^0 + \Lambda \delta^N H_0 + A \delta_A^N H_A + B \delta_B^N H_B, \quad (7)$$

содержащим три произвольные постоянные: Λ , A и B . Это существенные параметры задачи. Смысл их таков: Λ — это отклонение управляющего параметра точечной системы λ от критического значения $\lambda_{кр}$, A и B — коэффициенты связей двух типов, различающихся трансформационными свойствами по отношению к преобразованию РГ. Можно показать, что параметр B отвечает связи диссипативного, или диффузионного, типа, которая стремится выровнять мгновенные состояния систем; параметр A естественно трактовать тогда как параметр связи инерционного типа.

Итак, если исходное затравочное отображение близко к неподвижной точке G^0 ($u_{n+1} = g(u_n) +$ малая добавка, $v_{n+1} = g(v_n) +$ малая добавка), то форма отображения, описывающего динамику за достаточно большое число итераций, полностью определяется тремя константами: Λ , A , B . Поэтому структура бифуркационных множеств в пространстве этих трех параметров универсальна

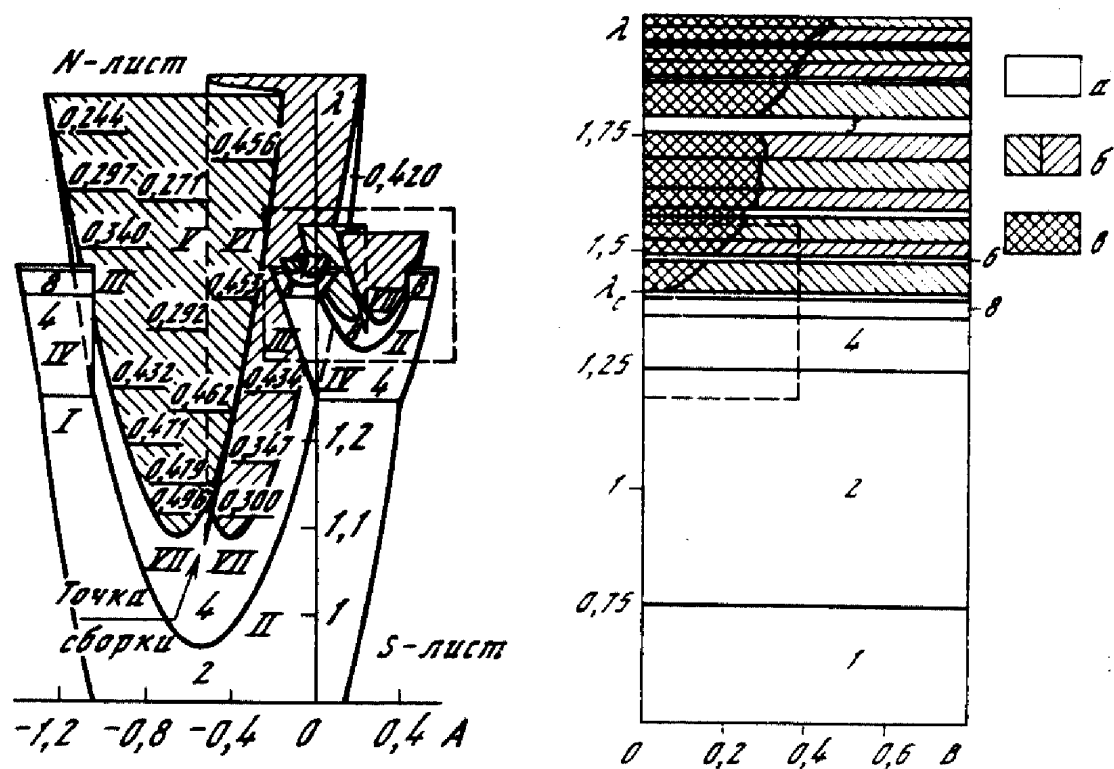


Рис. 1. Поверхность параметров (λ, A) для системы с чистой связью инерционного типа

Многолиственность поверхности отражает возможность жестких переходов и гистерезиса. Лист S отвечает синфазным движениям связанных систем, а листы N — несинфазным; светлые области соответствуют устойчивым циклам, период которых указан цифрами. Римскими цифрами отмечены бифуркационные линии: I — линия удвоения периода синфазных циклов; II — линии удвоения периода с мягким рождением несинфазного цикла, по которым склеены S - и N -листы; III — края S -листа, при пересечении которых происходит перескок на N -лист; IV — края N -листов, при пересечении которых происходит перескок на S -лист; V, VI — линии складок на N -листах, сходящиеся в точках сборки; VII — линия бифуркаций Андронова—Хопфа (указаны числа вращения для рождающегося квазипериодического аттрактора)

Рис. 2. Плоскость параметров (λ, B) для системы с чистой связью диссипативного типа

a — области устойчивости синфазных циклов (цифры означают их период); b — зоны синфазных хаотических колебаний; v — области несинфазных режимов

и не зависит от конкретного вида добавок в затравочном отображении. Эта структура обладает свойством масштабной инвариантности и переходит сама в себя при изменении параметров λ, A и B в δ, δ_A и δ_B раз и удвоении временного масштаба соответствующих режимов.

Хотя РГ-анализ не дает информации о конкретных режимах динамики связанных систем, из него вытекает, что для их исследования можно рассмотреть любую конкретную модель, лишь бы она допускала независимое управление тремя указанными параметрами. Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \hat{l} \begin{pmatrix} \lambda - u_n^2 + A(1 - 0,176u_n)(u_n - v_n) \\ \lambda - v_n^2 + A(1 - 0,176v_n)(v_n - u_n) \end{pmatrix},$$

$$\hat{l} = \begin{vmatrix} 1-B & B \\ B & 1-B \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Специальный вид уравнений выбран с той целью, чтобы фигурирующие здесь параметры A и B точно соответствовали введенным при РГ-анализе.

Поскольку изобразить структуру трехмерного пространства параметров трудно, ограничимся двумя его сечениями: (λ, A) и (λ, B) (рис. 1, 2). В зависимости от траектории движения в пространстве параметров возможны различные бифуркации: удвоения периода без потери или с потерей синфазного характера колебаний подсистем, жесткие бифуркации рождения квазипериодических движений. Хорошо видна отмечавшаяся выше масштабно-инвариантная структура пространства параметров.

2. Динамика одномерной распределенной среды, построенной из точечных систем, способных демонстрировать удвоения периода

Существует множество ситуаций, когда распределенную среду можно рассматривать как набор элементов, каждый из которых может претерпевать переход к хаосу через последовательность удвоений временного периода. В качестве примеров таких сред укажем распределенные экологические популяции, химические реакции, цепочки нелинейных радиотехнических осцилляторов [8]. Ясно, что динамика такой среды определяется способом введения связи между элементами. Как следует из разд. 1, можно ожидать существования двух универсальных типов связи. Однако, как будет видно ниже, каждый из них может осуществляться двумя способами — симметричным (правый и левый соседи действуют на данный элемент одинаково) и антисимметричным (правый и левый соседи действуют в противофазе).

Пусть состояние среды задается функцией пространственной координаты $u(x)$, а эволюция во времени определяется нелинейным оператором \hat{F} :

$$u_{n+1}(x) = \hat{F}[u_n]. \quad (9)$$

Будем считать, что при действии на не зависящее от x состояние u оператор $\hat{F}u$ сводится к функции $f(u)$, например $f(u) = \lambda - u^2$. Следуя схеме Фейгенбаума, проведем РГ-анализ задачи.

Применим уравнение (9) два раза и в полученном соотношении выполним масштабное преобразование S , изменив масштаб по u в a раз и масштаб по x в b раз:

$$Su(x) = au(bx). \quad (10)$$

В результате получим новый оператор \hat{F}_1 :

$$u_{n+2}(x) = \hat{F}_1(u_n), \quad \hat{F}_1 = S\hat{F}\hat{F}S^{-1} \equiv R[\hat{F}].$$

Процедура нахождения оператора F_1 по исходному оператору F и есть операция РГ-преобразования. Повторяя ее N раз, получим оператор \hat{F}_N , определяющий эволюцию системы за 2^N временных шагов. Он выражается из рекуррентного уравнения

$$\hat{F}_N = R [\hat{F}_{N-1}], \quad (11)$$

которое и представляет собой уравнение РГ.

Как и раньше, найдем сначала неподвижную точку уравнения РГ. Пусть затравочный оператор имеет следующий частный вид: $\hat{F} = \hat{l}f$, где f — нелинейная функция, зависящая от параметра λ , а \hat{l} — линейный оператор, определяемый выражением

$$\hat{l}u(x) = \int L(\xi) u(x - \xi) d\xi,$$

где ядро L подчинено требованиям симметрии ($L(\xi) = L(-\xi)$), нормировки ($\int L(\xi) d\xi = 1$) и локальности ($\int \xi^2 L(\xi) d\xi = 2D^2$). Тогда можно показать, что при критическом значении параметра $\lambda_{кр}$ и выборе масштабных констант $a = -2,503\dots$, $b = \sqrt{2}$ последовательность операторов \hat{F}_N имеет регулярный предел \hat{G} . Оператор \hat{G} является неподвижной точкой уравнения РГ (11) и поэтому не зависит от конкретного выбора f и \hat{l} в затравочном операторе. Это значит, что оператор \hat{G} универсален. Если рассматривать его действие только на слабонеоднородные состояния, то можно написать его явный вид:

$$\hat{G}[u] = \exp\left(D^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) g(u). \quad (12)$$

Рассмотрим теперь решение уравнения РГ в окрестности неподвижной точки, т. е. положим $\hat{F}_N = \hat{G} + \varepsilon \hat{H}_N$, $\varepsilon \ll 1$. Тогда из (11) можно получить для \hat{H}_N линейное уравнение, структура которого такова: $\hat{H}_N = \hat{M}[\hat{H}_{N-1}]$. Асимптотика решения при больших N определяется собственными векторами оператора \hat{M} , собственные числа которых превышают по модулю единицу. Их оказывается четыре:

$$\begin{aligned} v_0 &= \delta = 4,6692\dots, & v_1 &= a/\sqrt{2} = -1,770\dots, \\ v_2 &= \sqrt{2} = 1,4142\dots, & v_3 &= a/2 = -1,251\dots \end{aligned}$$

Поэтому оператор эволюции за 2^N шагов выражается следующим образом:

$$\hat{F}_N = \hat{G} + \Lambda \delta^N \hat{h}_0 + \alpha v_1^N \hat{h}_1 + \beta v_2^N \hat{h}_2 + \gamma v_3^N \hat{h}_3. \quad (13)$$

Это соотношение содержит четыре произвольных параметра Λ , α , β , γ . Как и раньше, Λ характеризует отклонение параметра λ от критического значения; величины α , β , γ задают характер связи между пространственными элементами среды. Если положить $\alpha = \beta = \gamma = 0$, то получается система с симметричной диффузион-

ной связью между точечными элементами. Коэффициенты α и γ управляют соответственно антисимметричной и симметричной инерционной связями, а коэффициент β — антисимметричной диффузионной связью. Отметим, что ренормализационные константы ν_i отличаются от полученных в разд. 1 констант δ_A и δ_B вследствие перенормировки пространственной переменной.

Следующий шаг состоит в том, чтобы изучить, какие режимы поведения реализуются в среде при различных значениях параметров Λ , α , β , γ . Для этого можно использовать любую конкретную модель среды исследуемого класса, допускающую управление всеми четырьмя параметрами, например

$$u_{n+1, m} = \hat{l}(\beta) \{ \lambda - u_{n, m}^2 + (1 - 0,176u_{n, m}) \times \\ \times [\alpha(u_{n, m+1} - u_{n, m-1}) + \gamma(u_{n, m+1} - 2u_{n, m} + u_{n, m-1})] \}, \quad (14)$$

$$\hat{l}(\beta) = 1/3 [(1 + \beta)u_{m+1} + u_m + (1 - \beta)u_{m-1}].$$

Здесь индекс m отвечает пространственной координате, n — дискретное время. Вид уравнения подобран так, чтобы смысл входящих в него параметров соответствовал проведенному РГ-анализу. Граничные условия на концах среды будем задавать в виде

$$u_{n, 0} = \text{const}, \quad u_{n, L} = \text{const}, \quad (15)$$

что соответствует закрепленным концам. Здесь L — длина системы.

Обсудим сначала простейший случай среды с симметричной диффузионной связью ($\alpha = \beta = \gamma = 0$).

Если среда безгранична, то динамика определяется единственным параметром λ . При $\lambda < \lambda_{\text{кр}}$ реализуются устойчивые пространственно-однородные состояния, временной период которых удваивается при тех же значениях λ , как и в точечной системе. При $\lambda > \lambda_{\text{кр}}$ возникает пространственно-временной хаос, причем радиус корреляции вблизи критической точки подчиняется универсальному закону

$$r \sim (\lambda - \lambda_{\text{кр}})^{-\kappa}, \quad \kappa = \lg \sqrt{2} / \lg \delta. \quad (16)$$

Соотношение (16) следует из сформулированных выше свойств подобия оператора эволюции: при приближении λ к критической точке в δ раз пространственный масштаб возникающих в среде образований должен возрасти в $\sqrt{2}$ раз.

Рассмотрим теперь систему большой, но конечной длины L с закрепленными концами:

$$u_0 = \text{const}, \quad u_L = \text{const}.$$

В этом случае задача содержит два существенных параметра: λ и LD^{-1} . В докритической области при увеличении λ происходят последовательные бифуркации удвоения временного периода, сначала практически при тех же значениях λ , что и в точечной (или бесконечной однородной) системе. При этом структура распределения поля по длине такова.



Рис. 3. Зависимость относительной интенсивности спектральных компонент, возникающих после n -й бифуркации удвоения, от безразмерной координаты $y = xD^{-12^{-n/2}}$

В середине имеется протяженный участок пространственной однородности, а вблизи границ — области неоднородности («хвосты»). При каждом удвоении периода длина хвостов возрастает в $b = \sqrt{2}$ раз. Наблюдается подобие хвостов, возникающих при последовательных удвоениях (рис. 3), что связано, разумеется, со свойством подобия оператора эволюции. После достаточно большого числа удвоений периода длина хвостов возрастает настолько, что хвосты, простирающиеся от левой и правой границ в глубь среды, начинают перекрываться. При этом наступает существенное отклонение бифуркационных значений λ от соответствующих значений точечной системы. В дальнейшем удвоения продолжают, но уже в таких условиях, когда характерный пространственный масштаб, связанный с оператором эволюции за период цикла, превышает длину системы. При этом система ведет себя как сосредоточенная, и бифуркационные значения λ даются формулой Фейгенбаума $\lambda_n = \lambda_{кр} - K\delta^{-n}$, $\delta \simeq 4,6692$, константы K и $\lambda_{кр}$ теперь другие, нежели в точечной системе. Картина бифуркационных линий на плоскости параметров $(\Lambda, D/L)$ показана на рис. 4. В соответствии с результатами РГ-анализа она подчиняется закону подобия:

$$\Lambda_n = \delta^{-n} \Psi\left(\frac{D}{L} 2^{n/2}\right),$$

где Ψ — универсальная функция.

Перейдем к изучению влияния дополнительных типов связи α , β , γ на динамику среды (14). Чтобы облегчить анализ и изложение, будем включать эти типы по отдельности и рассмотрим только систему асимптотически большой длины, задавая граничные условия в форме (15) (будем выбирать длину системы L настолько

большой, чтобы она не влияла на бифуркационные значения остальных параметров).

1. $\alpha \neq 0$. На рис. 5 показана структура плоскости параметров (λ, α) вблизи критической точки $(\lambda_{кр}, 0)$. Характер режимов и бифуркаций проиллюстрирован на рис. 6 с помощью пространственно-временных диаграмм. Заметим, что переходы, отмеченные на рис. 5 буквами a и b , связаны не с потерей устойчивости однородного состояния, а со сменой характера неустойчивости с конвективной на абсолютную (переход a отвечает удвоению временного периода, а переход b — возникновению бегущих волн). Внешне они выглядят как изменение направления движения по среде волны переключения, разделяющей два разных режима (см. рис. 6, a, b). Эти переходы характеризуются необычным сочетанием свойств мягких и жестких бифуркаций: они сопровождаются конечным изменением состояния среды, однако гистерезис отсутствует. В этом проявляется специфика распределенной среды. Что касается линии c , то при приближении к ней из области бегущих волн период этих волн, возникающих у левого края среды и уходящих направо, стремится к бесконечности. После перехода через линию волны более не испускаются и среда остается в состоянии с удвоенным временным периодом (см. рис. 6, c).

2. $\beta \neq 0$. Структура плоскости параметров (λ, β) показана на рис. 7, а пространственно-временные диаграммы, иллюстрирующие характер различных режимов, — на рис. 8. Система обозначений та же, что и на рис. 5, 6. На линии, обозначенной буквой a , реализуется переход к пространственно однородному режиму с удвоенным временным периодом, аналогичный рассмотренному в предыдущем пункте (см. рис. 6, a). При переходе через линию a_1 вновь возникающий режим также имеет удвоенный временной период, но обладает сложной пространственной структурой, зависящей от того, в какой точке линии осуществляется переход (рис. 8, a). Вблизи b (слева от нее) у левого края среды возникает осциллирующий в пространстве хвост, затухающий в глубь среды. При приближении к этой линии декремент затухания уменьшается и длина хвоста стремится к бесконечности. После перехода реализуется состояние, являющееся пространственно периодическим вдали от края среды; временной период остается неизменным (рис. 8, b).

3. $\gamma \neq 0$. На рис. 9 показана плоскость параметров (λ, γ) , рис. 10 иллюстрирует динамику среды в разных областях. Большая светлая область в центре рис. 9 отвечает пространственно однородному (вдали от краев среды), периодическому во времени режиму. При выходе из этой области через верхнюю горизонтальную границу происходит удвоение временного периода с сохранением пространственной однородности (рис. 10, a). При выходе через участок боковой границы b возникает пространственно неоднородный режим типа стоячих волн с удвоенным временным периодом (рис. 10, b). Этот переход мягкий, гистерезис отсутствует. При

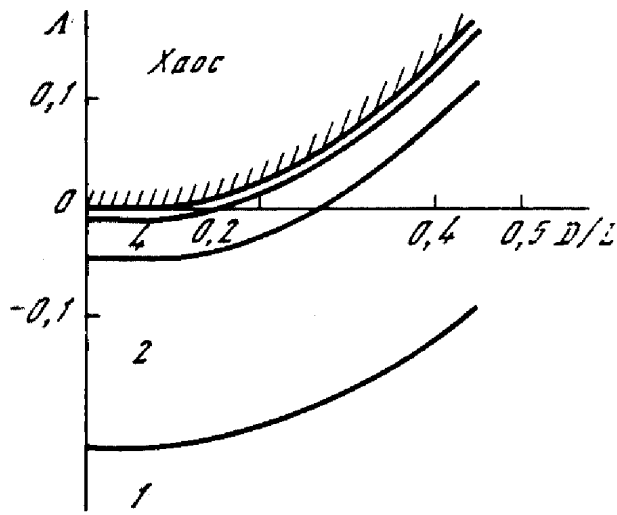


Рис. 4. Плоскость параметров пространственно ограниченной среды с симметричной диффузионной связью ($\alpha = \beta = \gamma = 0$)

Цифры 1, 2, 4 обозначают области существования циклов соответствующих периодов

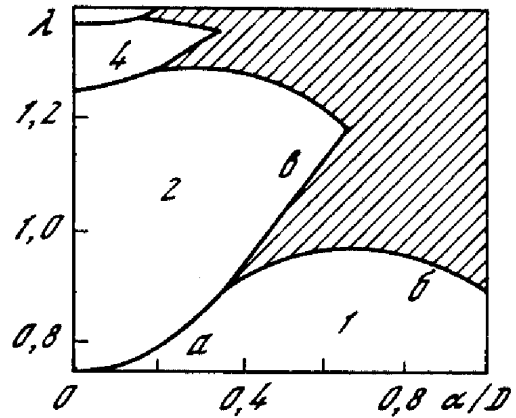


Рис. 5. Плоскость параметров среды с закрепленными концами при наличии симметричной диффузионной и антисимметричной инерционной связей ($\alpha \neq 0$, $\beta = \gamma = 0$, $L \rightarrow \infty$)

Светлые области соответствуют пространственно однородным режимам, временной период которых указан цифрами; заштрихована область существования бегущих волн

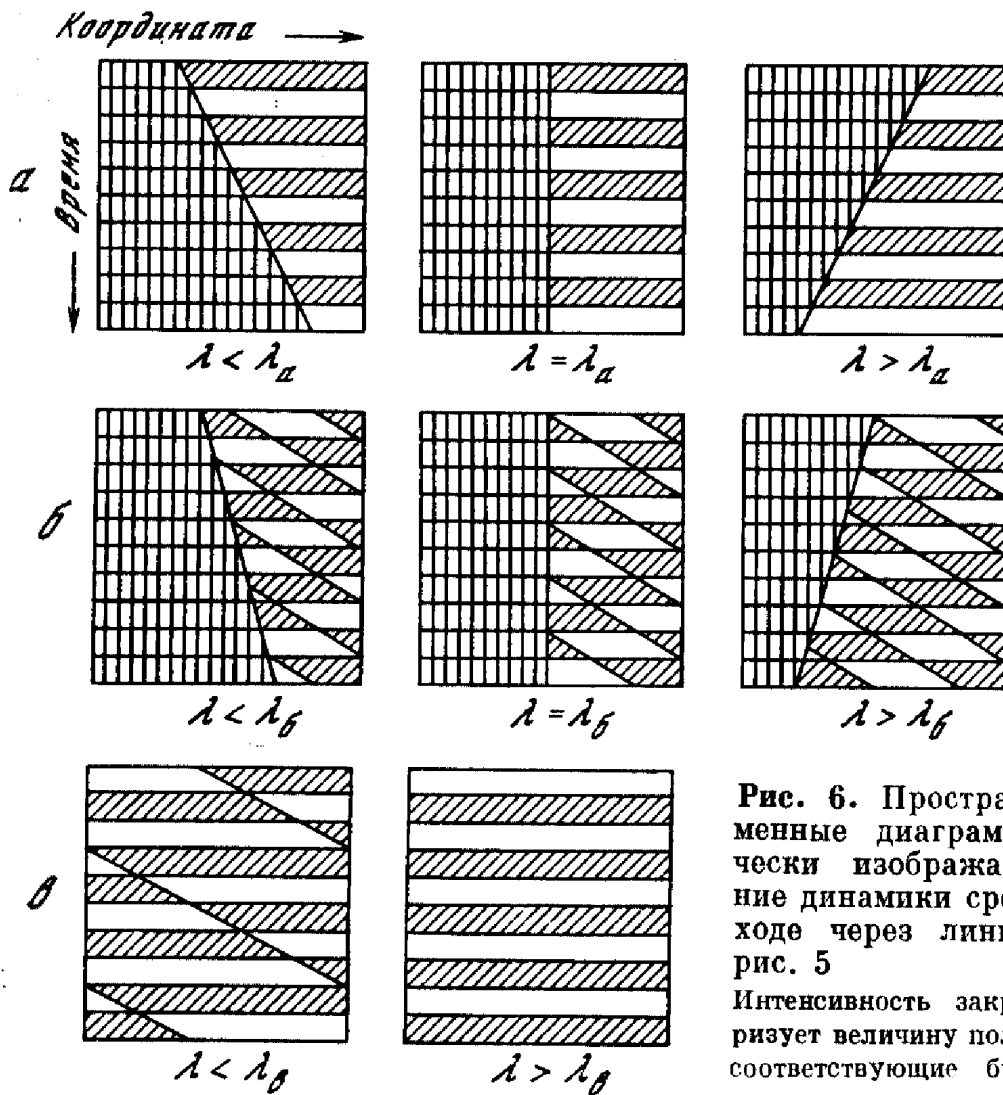


Рис. 6. Пространственно-временные диаграммы, схематически изображающие изменение динамики среды при переходе через линии $a, б, в$ на рис. 5

Интенсивность закрашки [характеризует величину поля u ; $\lambda_a, б, в$ — соответствующие бифуркационные значения параметра λ

Рис. 7. Плоскость параметров среды с закрепленными концами при наличии симметричной и антисимметричной диффузионных связей ($\alpha = 0, \beta \neq 0, \gamma = 0, L \rightarrow \infty$)

Светлые области соответствуют пространственно однородным, а заштрихованные — неоднородным режимам

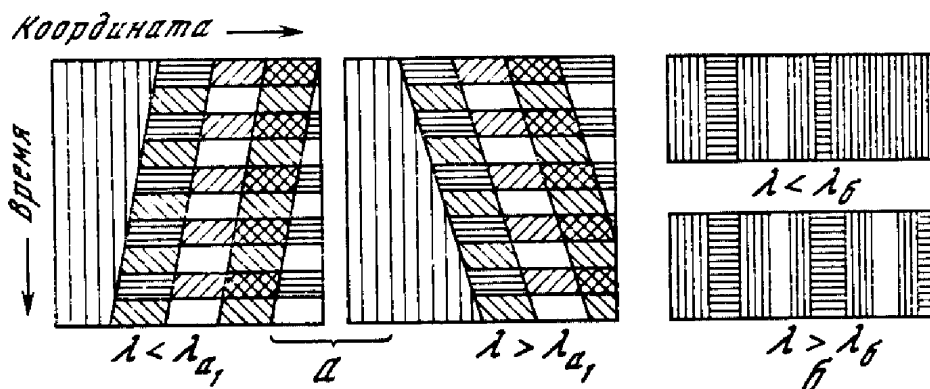
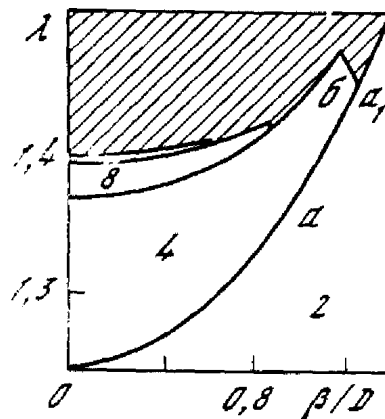


Рис. 8. Пространственно-временные диаграммы, иллюстрирующие изменение динамики среды при переходе через линии a_1 и b на рис. 7. Интенсивность закрашки характеризует величину поля u

Рис. 9. Плоскость параметров среды при наличии симметричных диффузионной и инерционной связей ($\alpha = \beta = 0, \gamma \neq 0, L \rightarrow \infty$)

Светлые области соответствуют пространственно однородным режимам, а темные — неоднородным режимам стоячих волн

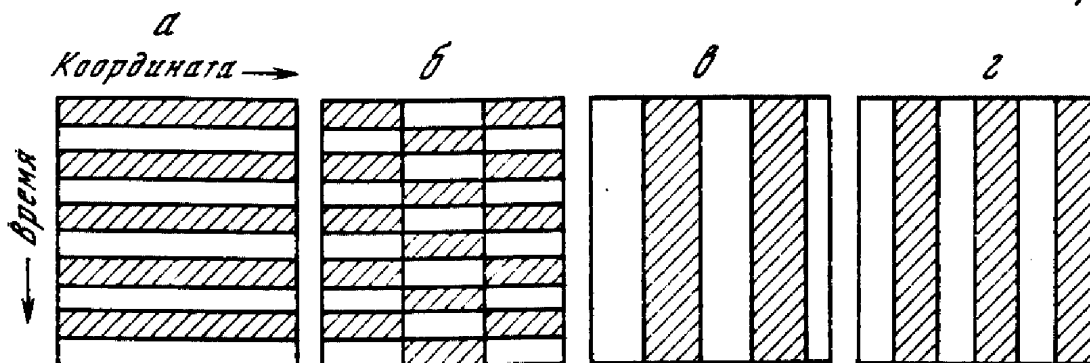
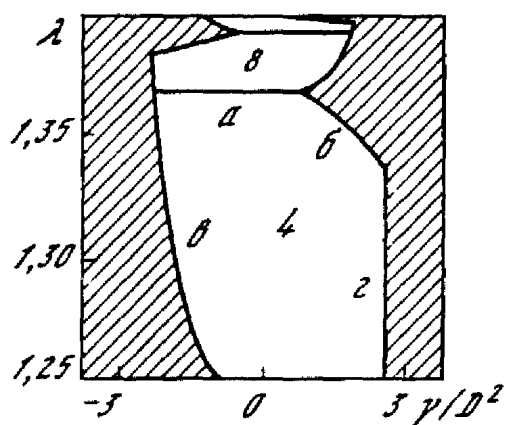


Рис. 10. Пространственно-временные диаграммы режимов, реализующихся при выходе из области устойчивости однородного режима через линии $a, б, в, г$ на рис. 9

Временной шаг на всех картинках одинаков и равен периоду исходного режима; окраска отражает разную интенсивность поля u

пересечении границ v и z жестким образом возникают более коротковолновые пространственные стоячие структуры (рис. 10, v , z), при этом имеет место сильный гистерезис.

Обратим внимание, что на всех приведенных рисунках хорошо виден скейлинг: структура областей многократно воспроизводится в уменьшающихся масштабах при приближении к критической точке $(\lambda_{кр}, 0, 0, 0)$. Это вытекает из соотношения (13), которое не меняется при замене $N \rightarrow N + k$, $\Lambda \rightarrow \Lambda \delta^{-k}$, $\alpha \rightarrow \alpha v_1^{-k}$, $\beta \rightarrow \beta v_2^{-k}$, $\gamma \rightarrow \gamma v_3^{-k}$. Поэтому в точках пространства параметров $(\Lambda \delta^{-k}, \alpha v_1^{-k}, \beta v_2^{-k}, \gamma v_3^{-k})$ реализуются такие же динамические режимы, как и в точке $(\Lambda, \alpha, \beta, \gamma)$, но с увеличенным в 2^k раз временным и в $2^{k/2}$ раз пространственным масштабами.

3. Взаимодействие двух систем, демонстрирующих переход к хаосу через перемежаемость

Одним из распространенных сценариев возникновения хаоса является переход через перемежаемость, когда после потери устойчивости периодического движения появляется стохастический режим, в котором относительно кратковременные стадии хаотической динамики (турбулентные) перемежаются длительными стадиями почти периодического движения (ламинарными). Мы рассмотрим перемежаемость двух типов (I и III) по классификации И. Помо и П. Манневилла [3]. Бифуркация, которая приводит к перемежаемости I типа, состоит в том, что устойчивый предельный цикл сливается с неустойчивым и исчезает. В случае перемежаемости III типа в устойчивый цикл «влипает» неустойчивый цикл удвоенного периода. В обоих случаях после бифуркации в фазовом пространстве возникает область, через которую изображающая точка путешествует очень долго (тем дольше, чем мы ближе к точке бифуркации), что соответствует ламинарным стадиям. Затем система уходит в удаленные области фазового пространства, где динамика является сложной и неустойчивой по отношению к возмущению начальных условий (турбулентная стадия). Для реализации перемежаемости необходимо, чтобы потом изображающая точка обязательно возвращалась и вновь попадала в область ламинарных движений.

Так же как и переход через удвоения периода, при описании динамики систем, демонстрирующих перемежаемость, можно использовать одномерные отображения, а также выявить свойства универсальности и подобия на основании метода РГ. В формулировке работ [4, 5] РГ-анализ по существу повторяет по форме фейгенбаумовский, отличаясь только характером дополнительных условий, налагаемых на функцию g при нахождении неподвижной точки уравнения РГ (4). Так, для перемежаемости I типа $a = 2$, $g(u) = u(1-u)^{-1}$; для перемежаемости III типа $a = \sqrt{2}$, $g(u) = u(1-u^2)^{-1/2}$. Таким образом, переходя к изу-

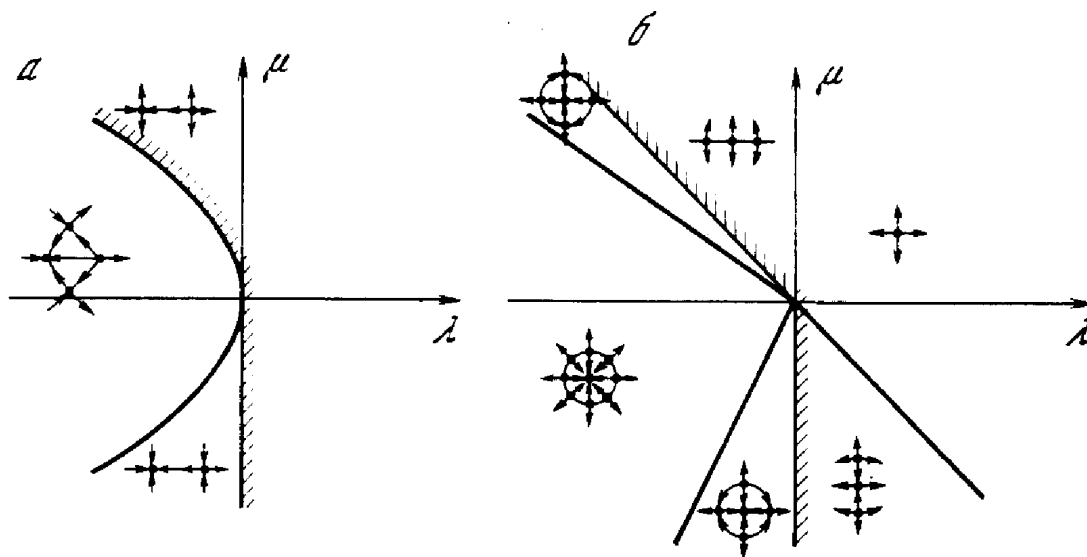


Рис. 11. Бифуркационные диаграммы для взаимодействия двух систем с перемежаемостью I типа (а) и III типа (б)

Линия перехода заштрихована

чению связанных систем, демонстрирующих переход через перемежаемость, мы можем использовать те же формулы, что и в разд. 1, подставляя в них соответствующие выражения для $g(u)$ ¹.

Для перемежаемости I типа уравнения (5) и (6) принимают вид

$$\nu h(u) = 2h\left(\frac{u}{2-u}\right) + 2\frac{u}{(2-u)^2}h\left(\frac{u}{2}\right), \quad (17)$$

$$\nu\varphi(u) = \frac{4}{(2-u)^2}\varphi\left(\frac{u}{2-u}\right) + \frac{(2-u)^2}{4(1-u)^2}\varphi\left(\frac{u}{2}\right). \quad (18)$$

Отыскивая решения $h, \varphi \sim c_0 + c_1u + c_2u^2 + \dots$, находим собственные значения $\nu_1 = 4$ для уравнения (17) и $\nu_2 = 2$ для уравнения (18). Остальные собственные значения не превосходят по модулю единицу и поэтому несущественны. Аналогичный расчет для перемежаемости III типа дает три существенных собственных значения: $\nu_1 = 2$ для возмущений типа h и $\nu_2 = 2, \nu_3 = \sqrt{2}$ для возмущений типа φ .

Таким образом, в случае перемежаемости I типа следует учитывать лишь один тип взаимодействия между связанными системами. Всего существенных параметров два: λ (бифуркационный параметр точечной системы) и μ (параметр связи). Плоскость параметров (λ, μ) должна обладать вблизи точки $(0, 0)$ масштабно-инвариантной структурой, которая переходит в себя при изменении λ в 4 раза и μ в 2 раза. Для перемежаемости III типа надо рассматривать два типа взаимодействия, характеризуемого параметрами μ_1 и μ_2 , т. е. анализировать трехмерное пространство параметров (λ, μ_1, μ_2) . Оно также имеет масштабно-инвариантную

¹ Соотношения, получаемые при РГ-анализе перехода через перемежаемость, относятся к ламинарным стадиям. Что касается турбулентных стадий, то при анализе малой окрестности критической точки зависимостью динамики от параметра на этих стадиях можно пренебречь.

структуру, переходящую в себя при изменении масштабов по осям координат соответственно в 2, 2 и $\sqrt{2}$ раз.

Конкретные бифуркационные диаграммы («циферблаты») показаны на рис. 11. Из рис. 11, а видно, что в системе связанных элементов, демонстрирующих перемежаемость I типа, включение связи делает возможной потерю устойчивости с разрушением симметрии через перемежаемость III типа. Для возникновения перемежаемости в связанных системах, как и в индивидуальных элементах, обязательным является условие возвращаемости траекторий в область потерявшего устойчивость регулярного режима.

Заключение

РГ-анализ оказался мощным инструментом для изучения динамики связанных систем и распределенных сред, построенных из элементов, демонстрирующих переход к хаосу. Он показывает, что закономерности универсальности и подобия при переходе к хаосу свойственны не только индивидуальным элементам, но проявляются также и при взаимодействии этих элементов. Применительно к распределенным средам РГ-анализ выявляет принципиально важный новый тип скейлинговых закономерностей при возникновении динамического хаоса — подобие пространственно-временных структур, формирующихся в среде на пути к хаосу. Представляет очевидный интерес дальнейшее развитие предложенного нами подхода (см. также [9—11]), в частности обобщение анализа на двумерные и трехмерные среды, поиск установленных универсальных закономерностей в конкретных системах, в том числе в эксперименте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Feigenbaum M. J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // J. Stat. Phys. 1978. Vol. 19, N 1. P. 25—52.
2. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // УФН. 1983. Т. 141, № 2. С. 343—374.
3. Pomeau Y., Manneville P. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems // Commun. Math. Phys. 1980. Vol. 74, N 2. P. 189—197.
4. Hu B., Rudnick J. Exact solution to the Feigenbaum renormalization-group equations for intermittency // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 48, N 24. P. 1645—1648.
5. Hirsh J. E., Nauenberg M., Scalapino D. Intermittency in the presence of noise: a renormalization group formulation // Phys. Lett. A. 1982. Vol. 87, N 8. P. 391—393.
6. Jensen M. H., Bak P., Bohr T. Transition to chaos by interaction of resonances in dissipative systems // Ibid. 1984. Vol. 30, N 4. P. 1960—1981.
7. Кузнецов С. П. О модельном описании цепочки связанных динамических систем вблизи точки перехода порядок—беспорядок // Изв. вузов. Физика. 1984. Т. 27, № 6, С. 87—96.
8. Кузнецов С. П., Пиковский А. С. Универсальность бифуркаций удвоения периода в одномерной диссипативной среде // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28, № 3. С. 308—319.
9. Pikovsky A. S. On the interaction of strange attractors // Ztschr. Phys. B. 1984. Bd. 55, N 2. S. 149—154.

10. Кузнецов С. П. Бифуркации удвоения периода в простой модели распределенной системы // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25, № 11. С. 1364—1368.
11. Кузнецов С. П. Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // Там же. 1985. Т. 28, № 8. С. 991—1007.

