

РАДИОФИЗИКА

Том XXXIV

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

ИЗДАНИЕ ГОРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
И НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО
РАДИОФИЗИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
1991

УДК 534.015; 537.86:519

**КРИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА РЕШЕТОК СВЯЗАННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ
У ПОРОГА ХАОСА**

А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов

(Обзор)

Содержание

1. Концепции универсальности и скейлинга в теории динамических систем
 2. Индивидуальная система, демонстрирующая переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода
 3. Двухпараметрический скейлинг в системах с удвоениями периода
 4. Система двух связанных отображений с однонаправленной связью
 5. Система двух связанных отображений со взаимной связью
 6. Критические явления в одномерной решетке
 7. Критические явления в континуальном пределе
 8. Развитие турбулентности в потоковых системах
 9. Динамика структур в двумерной решетке
 10. Сеть глобально связанных отображений
- Заключение
Приложение

Задача описания турбулентности как динамического процесса в распределенных системах давно привлекает внимание исследователей. Достиженные к настоящему времени успехи в понимании природы хаоса в системах с малым числом степеней свободы создали надежную основу для конструктивных размышлений в этом направлении. После первых обнадеживающих результатов стало ясно, что речь идет не просто о выборе того или иного сценария возникновения турбулентности (Ландау, Рюэля - Такенса или какого-либо другого) или разработке адекватной модели для конкретных ситуаций (например, описание течения Куэтта, образования ячеек Тейлора - Бенара и т. д.), а о формировании обширной и разветвленной области знания, охватывающей вопросы сложной пространственно-временной динамики в системах различной физической природы и включающей свои систему моделей, свой "зоопарк" феноменов, свою интуицию и систему представлений, свои теоретические построения и определенные связи с конкретными областями физики - гидродинамикой, физикой твердого тела, теорией фазовых переходов и т. д.

В качестве моделей сложной пространственно-временной динамики могут привлекаться дифференциальные уравнения в частных про-

изводных, решеточные структуры из систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, решетки связанных отображений, клеточные автоматы. Как с концептуальной, так и с вычислительной точки зрения предпочтительнее иметь дело не с распределенными (континуальными), а с решеточными моделями пространственно-развитых систем, если они допускают реализацию интересных феноменов. В некоторых случаях переход к решетке может рассматриваться как приближенный способ описания непрерывной системы, тогда решеточная модель должна иметь несингулярный континуальный предел при уменьшении пространственного шага (или при увеличении характерного размера рассматриваемых структур). В других случаях решеточная модель более подходит для описания реальных систем по самому существу задачи. Например, в гидродинамических течениях либо за счет собственной динамики, либо за счет конфигурации течения (скажем, в гофрированной трубе) могут образовываться структуры в виде локализованных подсистем (вихрей), допускающих маломерное описание и относительно слабо взаимодействующих друг с другом. В физике твердого тела естественная дискретизация обеспечивается кристаллической решеткой и т. д. Наконец, решеточные системы из элементов со сложной динамикой могут конструироваться искусственно, например в радиотехнике и оптике, с целью реализации устройств с новыми функциональными возможностями.

Существенную часть создаваемой картины составляют критические явления у порога хаоса. Критические явления хорошо известны в физике фазовых переходов, квантовой теории поля, теории перколяции (протекания), физике полимеров и т. д. [1 - 4]. Под критическими явлениями понимают совокупность феноменов, характеризующихся иерархией пространственных масштабов, когда весьма эффективными оказываются представления о масштабном подобии - скейлинге. Наглядные геометрические образы критического состояния - это иерархия капелек в точке перехода жидкость - газ, образование бесконечного кластера в задачах протекания и т. д. Единый взгляд на задачи со столь разнообразным физическим содержанием удается развить благодаря общему математическому аппарату - методу ренормализационной группы, адекватно описывающему иерархически организованные состояния. В теории динамического хаоса критические явления характеризуются наличием иерархии временных масштабов, формирующейся в окрестности точки возникновения хаоса. Наиболее изучен в таком контексте переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума через последовательность удвоений временного периода движения.

В настоящей работе мы дадим аналитический обзор исследований, относящихся к решеточным моделям, локальная динамика которых (т. е. поведение индивидуальных элементов, из которых строится решетка) описывается сценарием Фейгенбаума. В настоящее время именно для этого класса систем с определенной полнотой можно проследить развернутую картину критических явлений начиная с индивидуального элемента и простейших решеток из двух ячеек и кончая пространственно протяженными системами.

1. Концепции универсальности и скейлинга в теории динамических систем

Пусть имеется нелинейная диссипативная динамическая система, демонстрирующая при переходе некоторого параметра λ через критическое значение λ_c мягкое возникновение хаоса. В силу непрерывности динамических уравнений по параметру λ обнаружить различие между регулярным и хаотическим режимами, реализующимися в ϵ -окрестности точки перехода, можно только при их наблюдении за

достаточно большое время $T(\epsilon)$ (заметим, что $T(\epsilon) \rightarrow \infty$ при $\epsilon \rightarrow 0$). Итак, в данной ситуации динамика характеризуется наличием большого временного масштаба $T(\epsilon)$. Сужая рассматриваемую окрестность критической точки, можно добиться того, чтобы этот временной масштаб намного превышал все величины с размерностью времени, фигурирующие в уравнениях системы. Но тогда можно ожидать, что локальные во времени детали динамики системы не существенны с точки зрения закономерностей перехода к хаосу, которые должны носить универсальный характер. (Могут, впрочем, существовать различные классы универсальности, так что одни и те же закономерности справедливы лишь в пределах каждого класса.)

Аналогичная ситуация имеет место в теории фазовых переходов второго рода. При приближении температуры вещества к критической точке фазового перехода T_c корреляционная длина флуктуаций возрастает и становится большой по сравнению с межатомным расстоянием. В связи с этим поведение вещества вблизи критической точки оказывается универсальным, т. е. не зависит от конкретного вида межатомного взаимодействия. Свойство универсальности лежит в основе чрезвычайно плодотворного методологического приема в теории фазовых переходов, состоящего в их изучении с помощью модельных систем, огрубляющих детали локальных взаимодействий из соображений удобства анализа и сохраняющих интересующий тип критического поведения (модели Изинга, Гейзенберга, Гинзбурга - Ландау и др.) Из сказанного ясно, что такой же подход применим к динамическим системам, демонстрирующим переход к хаосу: для феноменологического описания их динамики можно использовать наиболее простые модели, обладающие нужным типом критического поведения. Ясно, что конструирование таких моделей само по себе представляет большой интерес и является одной из основных задач теории.

Вторым важным свойством критического поведения является скейлинг. При наличии скейлинга в окрестности критической точки пространство параметров обладает структурой типа вложенных друг в друга матрешек. Сходственным точкам пространства параметров отвечают подобные режимы динамики. Это означает, во-первых, совпадение характера реализующегося режима (периодический, квазипериодический, хаотический), а во-вторых, возможность определения характеристик одного режима по характеристикам другого с помощью надлежащего пересчета. Этот пересчет сопровождается изменением масштаба времени, так что характерный период движений возрастает при приближении к критической точке, а в ней самой обращается в бесконечность.

Математический аппарат теории критических явлений, позволяющий обосновать универсальность и скейлинг, - это так называемый метод ренормализационной группы (РГ). Он состоит в построении и исследовании специального преобразования динамических уравнений, соответствующего преобразованию подобия в пространстве параметров. Поскольку критическая точка при преобразовании подобия остается на месте, то уравнения, описывающие динамику системы в этой точке, должны быть инвариантны по отношению к преобразованию РГ. Иными словами, оператор эволюции системы на больших временах в критической ситуации представляет собой неподвижную точку уравнения РГ. В зависимости от структуры РГ-уравнения и от того, какая из неподвижных точек отвечает за рассматриваемый тип поведения, возникают различные классы универсальности, каждый из которых обладает своим набором количественных характеристик. К ним относятся, в частности, масштабные константы a_1, a_2, \dots, a_n , показывающие, во сколько раз меняется каждая из n существенных

динамических переменных, и константы скейлинга $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{N_p}$, определяющие, как изменяется при преобразовании подобия каждый из N_p существенных параметров, необходимых для полного описания поведения системы в окрестности рассматриваемой критической точки. Величина N_p определяет *корузмерность* критической точки, т.е. наименьшее число параметров семейства динамических систем, в котором она может встретиться *типичным образом*. Поэтому простейшая универсальная модель, демонстрирующая соответствующий тип критического поведения, должна содержать N_p управляющих параметров.

2. Индивидуальная система, демонстрирующая переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода

Начало количественной теории критических явлений в нелинейных динамических системах было положено работами Фейгенбаума, исследовавшего переход к хаосу через последовательность удвоений периода движения [5 - 9]. Наиболее простой и удобный для изучения класс систем, демонстрирующих такой переход, - это одномерные рекуррентные уравнения вида

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (1)$$

где $f(x)$ - гладкая функция, зависящая от параметра λ , отображающая некоторый отрезок оси x в себя и имеющая на этом отрезке единственный квадратичный экстремум. Примером может служить отображение

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad (2)$$

в интервале значений λ от 0 до 2. Одномерное пространство параметров этой модели устроено следующим образом. При значении параметра $\lambda_c = 1,40115518909$ располагается критическая точка. В докритической области реализуются периодические режимы (циклы), претерпевающие бифуркации удвоения периода при приближении параметра λ к критической точке (периоды 1, 2, 4, ..., 2^n , ...). В закритической области на оси λ имеет место сложная картина областей, которая содержит множество ненулевой меры, отвечающее хаотическим режимам [10], и бесконечное число "окон" периодических режимов, порядок появления которых устанавливается теоремой Шарковского [11, 12].

Обнаруженный Фейгенбаумом однопараметрический ($N_p = 1$) скейлинг состоит в том, что в окрестности критической точки λ_c вся картина областей на оси λ как в докритической, так и в закритической области переходит в себя при растяжении (сжатии) в $\delta_F = 4,6692016091$ раз, при этом временной масштаб изменяется в два раза, а масштаб динамической переменной x вблизи точки экстремума отображения (2) пересчитывается посредством множителя $\alpha_F = -2,502907876$. Свойство скейлинга работает с тем большей точностью, чем меньшая окрестность критической точки рассматривается, и является в этом смысле асимптотическим.

Идея ренормгруппового анализа Фейгенбаума состоит в следу-

щем. Обозначая правую часть (1) через $f_0(x)$, выполним отображение дважды и изменим масштаб x в некоторое число раз a . В результате получим

$$x_{n+2} = af_0(f_0(x_n/a)). \quad (3)$$

Функцию, стоящую в правой части, обозначим теперь через $f_1(x)$. Повторяя эту процедуру многократно, приходим к рекуррентному РГ уравнению

$$f_{n+1}(x) = af_n(f_n(x/a)), \quad (4)$$

которое связывает ренормализованные отображения f_n и f_{n+1} , определяющие эволюцию системы, соответственно, за 2^n и 2^{n+1} временных шагов.

Критическое поведение соответствует неподвижной точке уравнения (4):

$$g(x) = ag(g(x/a)). \quad (5)$$

Численное решение этого функционального уравнения [6, 13] позволяет получить функцию $g(x)$ в виде полиномиальной аппроксимации (см. Приложение), а также найти масштабную константу $a = \alpha_F$.

Рассмотрим решение уравнения РГ в линейном приближении около неподвижной точки $g(x)$. Полагая $f_n(x) = g(x) + \epsilon h_n(x)$, имеем

$$h_{n+1}(x) = \hat{M} h_n(x), \quad (6)$$

где линейный оператор \hat{M} определен соотношением

$$\hat{M} h(x) = a[g'(g(x/a))h(x/a) + h(g(x/a))].$$

Оператор \hat{M} имеет дискретный спектр, причем (для возмущений неустраиваемых инфинитезимальной заменой переменных) только одно собственное число $\delta = \delta_F$ превышает по модулю единицу. Это означает, что коразмерность данного типа критического поведения равна единице и при больших n отображение $f_n(x)$ имеет вид $f_n(x) = g(x) + C \delta^n h(x)$, где $h(x)$ - собственная функция оператора \hat{M} , отвечающая собственному числу δ_F , а коэффициент C пропорционален отклонению параметра λ от критической точки. Ясно, что при уменьшении этого отклонения в δ_F раз и увеличении n на единицу (что отвечает удвоению временного масштаба) вид f_n не изменится. Это и есть *фейгенбаумовский скейлинг*.

После работ Фейгенбаума описанный тип критического поведения со всеми присущими ему количественными закономерностями скейлинга в окрестности критической точки был обнаружен в огромном количестве реальных нелинейных физических систем и математических моделей [14 - 22]. Обоснование типичности фейгенбаумовского перехода

к хаосу для многомерных отображений, реально возникающих при описании динамики конкретных систем, содержится в [23].

Благодаря универсальности систему Фейгенбаума следует рассматривать как новый фундаментальный объект, который можно использовать для конструирования более сложных моделей различных систем подобно тому, как поступают в теории колебаний и волн с гармоническим осциллятором. Можно обратиться, например, к задачам о поведении связанных систем Фейгенбаума, о динамике решеток и распределенных сред, построенных из систем Фейгенбаума и т. д. Этот принцип и положен в основу дальнейшего изложения.

3. Двухпараметрический скейлинг в системах с удвоениями периода

Наиболее очевидное усложнение модели (2) состоит в том, чтобы добавить в правую часть рекуррентного уравнения член четвертой степени и рассмотреть отображение

$$x_{n+1} = 1 - \alpha x_n^2 - \beta x_n^4, \quad (7)$$

исследованное в работе [24].

На рис. 1 показана карта динамических режимов для этого отображения на плоскости параметров α , β . Светлые зоны отвечают периодическим режимам (период обозначен цифрами). Штриховкой показаны области хаоса. Отметим наличие точек сборки S . К каждой из них подходят две линии складок, при переходе которых имеет место жесткий скачок с гистерезисом. Мы можем представлять себе двумерное пространство параметров α , β в виде совокупности листов, склеенных в точках сборки, краями которых служат складки. Чтобы не загромождать рисунок, на нем показана только "лицевая" часть картины листов.

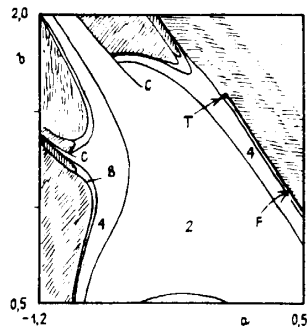


Рис. 1.

Линии бифуркаций удвоения периода в некоторых областях плоскости α , β накапливаются к критическим линиям F , причем характер сходимости соответствует фейгенбаумовскому однопараметрическому скейлингу с универсальной константой δ_F . Вне этих областей линии удвоений расходятся по берегам различных линий складок, так что

фейгенбаумовские критические линии оканчиваются в некоторых точках, получивших в [24] название *трикритических*. Одна из этих точек T , наиболее удобная для исследования, имеет координаты $\alpha = 0$, $\beta = 1,594901356$. Окрестность каждой трикритической точки устроена универсальным образом и характеризуется двухпараметрическим скейлингом с масштабными константами $\delta_1 = 2,857124135$ и $\delta_2 = 7,284686217$. Вдоль первого собственного направления к трикритической точке подходит фейгенбаумовская критическая линия F , а с противоположной стороны накапливаются точки сборки циклов возрастающих периодов. Именно наличие в окрестности рассматриваемой точки как мягких, так и жестких переходов дало основание авторам [24] именовать ее трикритической по аналогии с известным термином теории фазовых переходов. Так называют точку, в которой сходятся линии фазовых переходов второго и первого рода [4], ассоциирующихся, соответственно, с мягким возникновением хаоса и с жесткими скачками.

Ренормгрупповое уравнение для анализа трикритической ситуации совпадает с уравнением Фейгенбаума (5), однако полиномиальная аппроксимация функции $g_T(x)$ содержит только степени x , кратные четырем (см. Приложение). Масштабная константа, отвечающая за пересчет динамической переменной x , $\alpha_T = (g_T(1))^{-1} = -1,6903029714$.

Анализ линеаризованного уравнения РГ (6) вблизи неподвижной точки g_T выявляет два существенных собственных числа, превышающих по модулю единицу - это приведенные выше универсальные скейлинговые константы δ_1 и δ_2 . Следовательно, трикритическая точка имеет коразмерность $N_p = 2$, так что трикритическое поведение становится типичным при двухпараметрическом анализе перехода к хаосу в системах, демонстрирующих удвоения периода.

Благодаря универсальности и скейлингу обнаружение трикритического поведения при изучении конкретных систем было бы существенно для понимания устройства пространства параметров. Тем не менее среди большого количества теоретических и экспериментальных работ по фейгенбаумовскому переходу к хаосу в реальных системах мы не нашли сообщений о наблюдении трикритичности. Это объясняется, по-видимому, тем, что работа [24] не привлекла широкого внимания из-за достаточно абстрактной постановки задачи. Отметим еще, что поиск трикритических точек требует специально направленного к этой цели тщательного исследования, особенно в эксперименте.

4. Система двух связанных отображений с однонаправленной связью

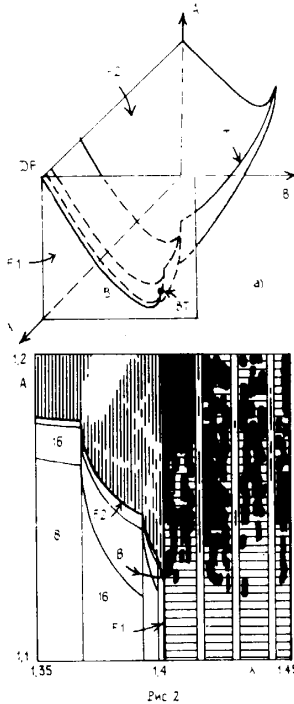
Обратимся теперь к анализу критических закономерностей, реализуемых при однонаправленной связи двух фейгенбаумовских систем, когда первая воздействует на вторую, а обратного воздействия нет [25 - 29]. Для этого рассмотрим следующую модельную систему:

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad y_{n+1} = 1 - \lambda y_n^2 - \beta x_n^2, \quad (8)$$

где x , y - динамические переменные, характеризующие состояния первой и второй подсистем, λ и λ - управляющие параметры, β -

константа связи.*

В пространстве λ, A, B модели (8) имеются две фэйгенбаумовские критические поверхности $F1$ и $F2$, являющиеся предельными для накапливающихся поверхностей удвоения периода (рис. 2а). Первая - это плоскость $\lambda = \lambda_c = 1,401155$, отвечающая переходу к хаосу в первой подсистеме. Вторая - поверхность сложной формы, при переходе через которую возникает хаос во второй системе. Поверхности $F1$ и $F2$ пересекаются по бикритической линии B , к которой накапливаются области гиперхаоса - сложного динамического режима с двумя положительными ляпуновскими показателями.



Вблизи бикритической линии в пространстве λ, A, B реализуется двухпараметрический скейлинг с константами $\delta_1 = \delta_F$, $\delta_2 = 2,39272443$. На рис. 2б показано сечение пространства параметров плоскостью

*Предположение о том, что влияние первой подсистемы на вторую определяется линейным членом, приводит к тем же самым результатам. Действительно, если модельное отображение выбрано в виде $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$, $y_{n+1} = 1 - \alpha y_n^2 + \epsilon x_n$, то, положив $X_n = x_{n-1}$, $Y_n = y_n / (1 + \epsilon)$, $A = \alpha(1 + \epsilon)$, $B = \epsilon\lambda / (1 + \epsilon)$, в переменных X_n , Y_n получаем уравнения (8).

$B = 0,375$. Бикритическая точка расположена при $\lambda = \lambda_c$, $A = 1,124981403$. Собственные направления скейлинга совпадают с осями координат λ и A . Вертикальной и горизонтальной штриховкой показаны области хаоса с одним положительным ляпуновским показателем, а сплошным черным - области гиперхаоса.

Анализ РГ бикритической ситуации развит в работах [26, 28]. Обозначая правые части (8) через $f_0(x)$ и $g_0(x, y)$, выполним отображение дважды и изменим масштабы x и y в a и b раз. В результате получим

$$x_{n+2} = ag_0(g_0(x_n/a)), \quad y_{n+2} = bf_0(g_0(x_0/a), f_0(x_n/a, y_n/b)). \quad (9)$$

Функции, стоящие в правых частях, обозначим теперь через $g_1(x)$ и $f_1(x, y)$. Повторяя эту процедуру, приходим к рекуррентным РГ уравнениям

$$g_{n+1}(x) = ag_n(g_n(x/a)), \quad f_{n+1}(x, y) = bf_n(g_n(x/a), f_n(x/a, y/b)). \quad (10)$$

Бикритическое поведение соответствует неподвижной точке этих уравнений:

$$g(x) = ag(g(x/a)), \quad f(x, y) = bf(g(x/a), f(x/a, y/b)), \quad (11)$$

где функция g и константа a совпадают с фэйгенбаумовскими. Численное решение второго уравнения позволяет найти функцию $f(x, y)$ в виде разложения по степеням x^2 и y^2 (см. Приложение), а также масштабную константу $b = (f(1, 1))^{-1} = -1,505318159$.

Продолжим обсуждение устройства пространства параметров модели (8). Поверхность $F2$ имеет границу - линию трикритических точек T . Трикритическая и бикритическая линии сходятся и оканчиваются в мультикритической точке BT , имеющей коразмерность 3. Точка BT имеет координаты $\lambda = 1,4011552$, $A = 1,066$, $B = 0,83505$. Ее окрестность характеризуется трехпараметрическим скейлингом с константами $\delta_1 = 4,669201$, $\delta_2 = 2,654654$ и $\delta_3 = 1,541721$. Собственное направление, связанное с константой δ_1 , - это ось λ , для δ_2 - линия, вдоль которой сходятся к BT трикритические точки, для δ_3 - направление вдоль бикритической линии.

Уравнение РГ для анализа этого типа критической динамики совпадает с уравнением (9), однако ему отвечает другое решение - разложение функции $f_{BT}(x, y)$ содержит целые степени x^2 и y^4 (см. Приложение). Соответствующие масштабные факторы $a = a_F$ и $b_{BT} = -1,2416604$.

Вторым концом бикритической линии является двойная фэйгенбаумовская точка $\lambda = A = 1,4011552$, $B = 0$. Вдоль оси A к ней накапливаются точки сборки с отходящими от них линиями складок, соответствующие жестким переходам. Скейлинговые константы $\delta_1 = \delta_2 = \delta_F$ и $\delta_3 = 2$ [27].

Таким образом, уже в простейшей потоковой системе, представляющей собой решетку всего из двух однонаправленно связанных систем, обнаруживается некоторая иерархия типов критической динамики. Как хорошо известно, одна из ключевых идей в теории бифуркаций, теории катастроф и отчасти в теории фазовых переходов - это идея "движения по коразмерности", восходящая к Пуанкаре [30]. В соответствии с ней в рассмотрении последовательно вводятся и анализируются ситуации, типичные сначала в однопараметрических семействах, затем в семействах с числом параметров 2, 3 и т.д. Изложенные здесь результаты наглядно показывают, что аналогичный подход плодотворен и в теории критических явлений у порога возникновения хаоса.

Заметим, что бикритическая динамика обнаружена в эксперименте с системой из двух связанных нелинейных колебательных контуров, образованных катушками индуктивности и нелинейными емкостями $p - n$ -переходов, возбуждаемых периодическим внешним воздействием [25, 29]. В эксперименте наблюдались описанная выше картина областей на плоскости управляющих параметров, а также характерные спектры в бикритической точке.

5. Система двух связанных отображений со взаимной связью

Динамику двух одинаковых симметрично связанных систем Фейгенбаума в общем случае можно описать отображением

$$x_{n+1} = f_0(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = f_0(y_n, x_n), \quad (12)$$

где f_0 - гладкая функция своих аргументов. Проводя традиционную схему ренормализации, приходим к рекуррентному РГ уравнению [31]

$$f_{n+1}(x, y) = af_n(f_n(x/a, y/a), f_n(y/a, x/a)). \quad (13)$$

Будем искать решение уравнения (13) в линейном приближении вблизи неподвижной точки $f(x, y) = g(x)$, полагая $a = \alpha_F$, $f_n(x, y) = g(x) + \varepsilon \varphi_n(x, y)$. Тогда получим

$$\varphi_{n+1}(x, y) = \hat{m} \varphi_n(x, y), \quad (14)$$

где линейный оператор \hat{m} определен соотношением

$$\hat{m} \varphi(x, y) = a[g'(g(x/a))\varphi(x/a, y/a) + \varphi(g(x/a), g(y/a))]. \quad (15)$$

Оператор \hat{m} имеет три существенные собственные функции. Одна из них зависит только от первого аргумента $\varphi_0(x, y) = h(x)$ и имеет собственное число $\nu_0 = \delta_F$ (см. разд. 2). Две другие зависят от обоих аргументов, это $\varphi_1(x, y)$ с собственным числом $\nu_1 = \alpha_F = -2, 5029...$ и $\varphi_2(x, y)$ с собственным числом $\nu_2 = 2$. Полиномиальные аппроксимации $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ приведены в Приложении.

Теперь можно написать явное выражение для оператора эволюции

системы f_n при больших n :

$$f_n(x, y) = g(x) + \varepsilon[(\lambda - \lambda_c)\delta^n h(x) + C_1 \alpha_F^n \varphi_1(x, y) + C_2 2^n \varphi_2(x, y)]. \quad (16)$$

Таким образом, динамика системы на больших временах будет полностью определяться в общем случае тремя параметрами $(\lambda - \lambda_c)$, C_1 и C_2 . Ясно, что величина $(\lambda - \lambda_c)$ задает отклонение фэйгенбаумовского управляющего параметра подсистем от критической точки накопления удвоенных периода, а C_1 и C_2 характеризуют связь. Наличие двух типов связи с разными трансформационными свойствами по отношению к РГ преобразованию заставляет ввести терминологию: будем называть первый тип *инерционной связью*, а второй - *диссипативной*.

Система с произвольным соотношением инерционной и диссипативной связи может быть выбрана в следующей форме:

$$x_{n+1} = f(x_n) + \varepsilon_1(x_n - y_n) + \varepsilon_2(f(y_n) - f(x_n)), \\ y_{n+1} = f(y_n) + \varepsilon_1(y_n - x_n) + \varepsilon_2(f(x_n) - f(y_n)). \quad (17)$$

Это *универсальная модель* связанных систем, демонстрирующих удвоения периода. Уравнение (17) содержит весь "зоопарк" феноменов идентичных произвольно связанных систем у порога хаоса.

Из (17) легко получить уравнения динамики системы с чисто диссипативной связью:

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \varepsilon(x_n^2 - y_n^2), \\ y_{n+1} = \lambda - y_n^2 + \varepsilon(y_n^2 - x_n^2). \quad (18)$$

Специальным выбором соотношения между коэффициентами можно также реализовать случай чистой инерционной связи [31 - 33]:

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \varepsilon(1 - 0, 176x_n)(x_n - y_n), \\ y_{n+1} = \lambda - y_n^2 + \varepsilon(1 - 0, 176y_n)(y_n - x_n). \quad (19)$$

Карта динамических режимов системы с диссипативной связью показана на рис. 3 [31 - 34]. В докритической области $\lambda < \lambda_c$ при любых значениях параметра связи $\varepsilon < 1$ наблюдается каскад удвоенных периода синфазных движений ($x = y$) (см. рис. 3а). В закритической области при достаточно больших значениях параметра связи реализуются синфазные режимы с хаотическим во времени поведением (область S). Если начать уменьшать диссипативную связь, то с некоторого момента ее сглаживающие свойства оказываются не в состоянии противостоять свойственному хаосу эффекту разбегания траекторий и происходит переход к несинфазному хаосу (область N). Процесс вблизи точки перехода характеризуется *пережимаемостью*

Ямада - Фуджисака [35, 36]: длительным нерегулярным возрастанием уровня несинфазной компоненты решения, затем сбросом до малой величины, вновь нарастанием и т.д. Характерная продолжительность стадий нарастания и средний уровень несинфазной компоненты зависят от надкритичности, т.е. от того, насколько параметр связи меньше порога возникновения несинфазного движения. При дальнейшем уменьшении параметра связи уровень несинфазной компоненты хаотического движения, флуктуируя, может стать настолько большим, что приведет к перебору системы на другие регулярные аттракторы, отвечающие несинфазным движениям. Им будут отвечать другие листы карты динамических режимов. Два из них показаны отдельно на рис. 3 б, в. Нижним краем этих листов служит линия жесткого перехода на синфазный лист. На несинфазных листах также можно наблюдать каскады удвоений периода с переходом к хаосу по Фейгенбауму. Новый момент состоит в том, что на некоторых из этих листов имеются области квазипериодических движений Q [37]. Механизм возникновения квазипериодичности разъясняется в [38].

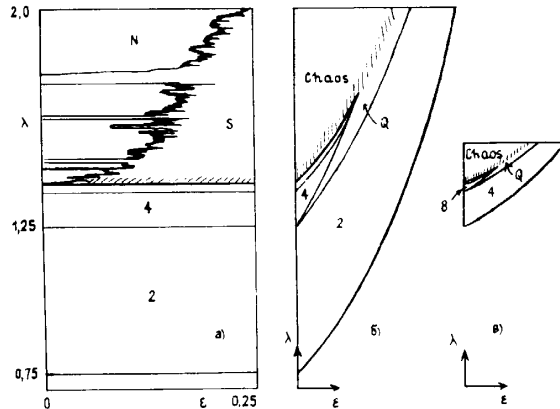


Рис. 3

В отличие от случая диссипативной связи, в системе с инерционной связью несинфазные периодические режимы возникают мягким образом из синфазных в результате бифуркации потери симметрии уже при $\lambda < \lambda_c$. С ростом λ возникший режим в свою очередь претерпевает бифуркацию и рождается квазипериодическое движение. Для более подробного ознакомления с динамикой систем с инерционной связью мы отсылаем читателя к работам [31 - 33].

Скейлинг для систем с чистой диссипативной связью состоит в том, что при уменьшении величины связи в 2 раза и при приближении по уровню надкритичности к точке λ_c в δ_F раз реализуются подобные режимы динамики. (В частности, подобны в этом смысле картинка, показанные на рис. 3 б, в.) Для системы с инерционной связью (19) скейлинг выражается в том, что карта динамических режимов на плоскости (λ, ϵ) повторяется при растяжении (сжатии) в δ_F раз по оси λ и в α_F раз по оси ϵ относительно точки $(\lambda_c, 0)$.

В общем случае, когда имеет место комбинация инерционной и диссипативной связи, можно утверждать, что структура окрестности

критической точки $(\lambda_c, 0)$ в достаточно малых масштабах устроена так же, как в случае инерционной связи, и характеризуется тем же фактором скейлинга α_F . Действительно, при больших n вклад инерционной компоненты связи в оператор эволюции (16), пропорциональный α_F^n , начинает доминировать над вкладом диссипативной компоненты, пропорциональным 2^n . Это относится, в частности, к широко обсуждаемому в литературе случаю *линейной связи* (см. [39 - 41]).

Экспериментальному исследованию связанных нелинейных неавтономных диссипативных осцилляторов, способных демонстрировать бифуркации удвоения периода и допускающих, следовательно, описание с помощью квадратичных отображений, посвящены работы [34, 37, 42, 43].

Как оказалось, практически чистая диссипативная связь легко реализуется в эксперименте. Например, в системе двух нелинейных колебательных контуров, находящихся под внешним периодическим воздействием, она достигается просто включением резистивного элемента. Для получения существенной инерционной связи в той же системе следует ввести в цепь связи LC-цепочку с постоянной времени порядка периода внешнего воздействия.

В эксперименте наблюдались все основные отмеченные выше феномены, характерные для динамики связанных систем - синфазные и несинфазные периодические и хаотические режимы, квазипериодические колебания, жесткие переходы с гистерезисом, перемежаемость Ямада - Фуджисака. Дальнейшие сведения относительно динамики связанных систем, демонстрирующих удвоения периода, можно найти в цитированных работах, а также в [44 - 50].

6. Критические явления в одномерной решетке

Перейдем теперь к рассмотрению одномерных решеток связанных отображений. Заметим, что для их обозначения в зарубежной литературе стала общепринятой аббревиатура СМЛ (coupled map lattice).

Ренормгрупповой анализ СМЛ можно развить по аналогии с двумя связанными системами [51 - 53]. Неподвижная точка РГ будет определяться набором несвязанных отображений вида

$$\{\dots g(x_{m-1}), g(x_m), g(x_{m+1}) \dots\}, \quad (20)$$

где m - пространственный индекс. Рассмотрим малое возмущение неподвижной точки (20), отвечающее введению связи, причем допустим асимметричное взаимодействие элемента решетки с левым и правым соседом:

$$x_{n+1, m} = g(x_{n, m}) + \epsilon [\phi(x_{n+1, m}, x_{n, m-1}) + \psi(x_{n, m+1}, x_{n, m})]. \quad (21)$$

Преобразование РГ для функций связи ϕ и ψ , отвечающее удвоению временного шага, получается снова в форме (13). В асимптотике больших n каждая из них превратится в линейную комбинацию собственных функций $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$, а коэффициенты при них определяют существенные параметры задачи. В итоге можно прийти к следующему представлению оператора эволюции решетки за 2^p -шагов в ренормализованных переменных:

$$x_{n,n+2^p} = g(x_{n,m}) + Aa^p [\varphi_1(x_{n,m}, x_{n,m+1}) - \varphi_1(x_{n,m}, x_{n,m-1})] +$$

$$+ B2^p [\varphi_2(x_{n,m}, x_{n,m+1}) - \varphi_2(x_{n,m}, x_{n,m-1})] +$$

$$+ Ca^p [\varphi_1(x_{n,m}, x_{n,m+1}) + \varphi_1(x_{n,m}, x_{n,m-1})] +$$

$$(22)$$

$$+ D2^p [\varphi_2(x_{n,m}, x_{n,m+1}) + \varphi_2(x_{n,m}, x_{n,m-1})] + (\lambda - \lambda_c) \delta_F^p h(x_{n,m}).$$

Здесь A, B, C, D - параметры, определяющие, соответственно, *антисимметричную инерционную связь*, *направленный перенос возмущений вдоль решетки*, *симметричную инерционную связь* и *диффузию*.

Используя рассмотренные в разделе 5 модели двух связанных систем, нетрудно сконструировать из них универсальную решеточную модель со всеми четырьмя типами связи:

$$x_{n,n+1} = \lambda - x_{n,m}^2 + A(1 - 0,176x_{n,m}) (x_{n,m+1} - x_{n,m-1}) + B(x_{n,m+1}^2 - x_{n,m-1}^2) +$$

$$+ C(1 - 0,176x_{n,m}) (x_{n,m+1} - 2x_{n,m} + x_{n,m-1}) - D(x_{n,m+1}^2 - 2x_{n,m}^2 + x_{n,m-1}^2). \quad (23)$$

Сформулируем теперь скейлинговое свойство решетки связанных отображений: в точке пространства параметров $(\lambda - \lambda_c)/\delta, A/a_F, B/2, C/a, D/2$ могут быть реализованы динамические режимы, подобные тем, которые имеют место в точке $(\lambda - \lambda_c), A, B, C, D$ с удвоенным временным масштабом и пересчитанным в a_F раз масштаб динамических переменных $x_{n,m}$. Это свойство будем называть *решеточным скейлингом*.

Рассмотрим динамику структур и проиллюстрируем решеточный скейлинг в системе с чистой диффузией. Возьмем динамическое уравнение в форме Канеко [54]:

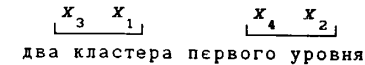
$$x_{n+1,m} = 1 - \lambda x_{n,m}^2 - (\epsilon\lambda/2) (x_{n,m+1}^2 - 2x_{n,m}^2 + x_{n+1,n}^2) \quad (24)$$

с граничными условиями периодичности $x_{n,0} = x_{n,N}$.

Многие авторы отмечают существование в системе (24) *доменов*, различающихся друг от друга фазой колебаний элементов решетки, причем при увеличении λ разнообразие и сложность возможных доменных структур возрастает. В основу их классификации положим типы структур, существующие при выключенной связи между ячейками решетки [55]. Выберем сначала λ так, чтобы реализовался цикл периода 2. Тогда каждая ячейка может совершать движение в одной из двух фаз: x_1, x_2, x_1, \dots или x_2, x_1, x_2, \dots . Области решетки, в пределах которых ячейки колеблются в одной фазе, будем называть *доменами первого порядка*.

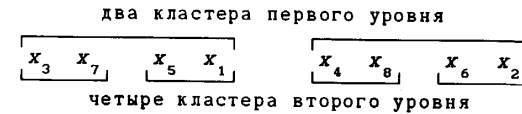
Пусть теперь параметр λ таков, что при выключенной связи реализуется цикл периода 4. Элементы цикла x_1, x_2, x_3, x_4 образуют два кластера, о которых будем говорить как о кластерах пер-

вого уровня:



Для областей решетки, в которых мгновенные состояния ячеек относятся к одному и тому же кластеру, сохраним термин *домены первого порядка*, а области, внутри которых состояния совпадают, назовем *доменами второго порядка*.

Структура цикла периода 8 представляется следующим образом:



Домены первого и второго порядка определим теперь как области решетки, где состояния ячеек попадают в один кластер, соответственно, первого или второго уровня, а домены третьего порядка - как области, где состояния совпадают.

При дальнейших удвоениях периода принцип классификации сохраняется, так что для цикла периода 2^p возможно одновременное существование доменов i -го порядка, где $i = 1, \dots, p - 1$. В критической точке $\lambda_c = 1,401155$ аттрактор индивидуального отображения принимает вид канторова множества, а в протяженной решетке могут быть реализованы домены произвольного порядка.

При включении диссипативной связи возможность существования доменных структур сохраняется, но накладываются ограничения на минимальный пространственный размер доменов, тем более сильные, чем выше порядок доменов (см. следующий раздел).

Свойство решеточного скейлинга позволяет утверждать, что если при некотором значении параметра λ и коэффициента связи ϵ возникла определенная доменная структура, то при пересчете параметров и динамической переменной $\lambda \rightarrow \lambda_c + (\lambda - \lambda_c)/\delta, \epsilon \rightarrow \epsilon/2, x \rightarrow x/a$ можно реализовать подобную же пространственную структуру с увеличенным на единицу порядком доменов и удвоенным характерным временным периодом.

На рис. 4 приведены примеры. Первая картинка получена для $\lambda = 1,444, \epsilon = 0,1$ со случайными начальными условиями. Показаны пространственные конфигурации для нескольких последовательных временных шагов после окончания переходного процесса. Далее производился пересчет λ, ϵ и x и вновь изображались устанавливающиеся через большое время пространственные конфигурации. Три уровня скейлинга представлены в левой колонке рис. 4. Чтобы сделать подобие структур наглядным, их части, попадающие внутрь выделенных прямоугольников, воспроизведены в правой колонке. Увеличение по вертикальной оси пропорционально a_F^n (n - номер уровня). Можно видеть

хорошее соответствие картинок.

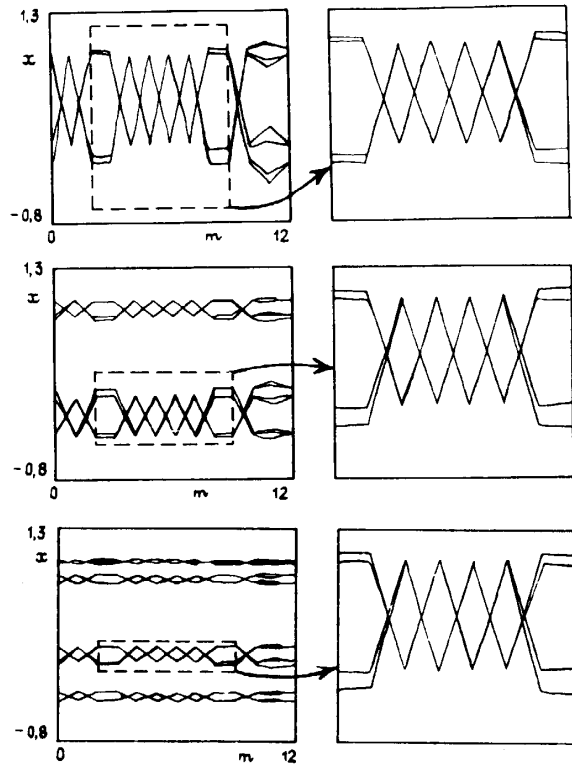


Рис 4

В закритической области параметра λ СМЛ с диффузионной связью демонстрирует богатое разнообразие типов поведения. На рис. 5 приведена фазовая диаграмма динамических состояний решеточной модели (24) [54]. Опишем основные феномены, которые отвечают различным областям диаграммы. Зафиксируем сначала некоторое небольшое значение параметра связи ϵ и будем постепенно увеличивать управляющий параметр λ . Оказывается, что каждый домен ведет себя как практически независимая от других доменов динамическая система, демонстрирующая переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. При этом бифуркационные значения параметра λ для каждого домена зависят от его длины: чем меньше длина домена, тем больше бифуркационные значения λ . Поэтому при наличии в среде большого числа доменов разного размера переход к хаосу будет происходить во всех доменах неодновременно, так что среда окажется разбитой на участки с периодической и хаотической динамикой во времени. При этом отдельные домены остаются по-прежнему практически неподвижными. Такая фаза названа в [54] фазой замороженных случайных структур (на фазовой диаграмме FRP - frozen random pattern).

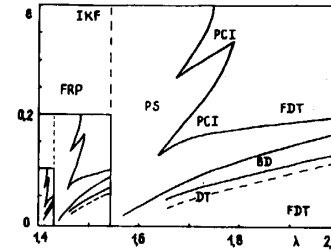


Рис. 5.

Если увеличить параметр связи в FRP-фазе, то при наличии развитого хаоса внутри некоторых доменов доменные стенки перестают быть неподвижными и начинают блуждать случайным образом, а размеры доменов медленно флуктуируют. По этой причине характер динамики внутри определенного домена может меняться и становится то регулярным, то хаотическим в зависимости от того, меньше или больше λ критического значения для этого домена в фиксированный момент времени. Таким образом, даже если первоначально была сформирована регулярная в пространстве доменная структура, то она постепенно становится нерегулярной. Это пространственная перемежаемость Киллера - Хармера [56] (IKF на фазовой диаграмме). Заметим, что отследиваемая динамику в фиксированном узле решетки, можно наблюдать и перемежаемость во времени.

При дальнейшем увеличении параметра λ мы попадаем в фазу селекции структур (на фазовой диаграмме PS - pattern selection). В этой фазе хаос внутри больших доменов развивается настолько, что происходит их разрушение. Возникают коротковолновые зигзаговые структуры. При селекции структур временной хаос оказывается подавленным, так как для коротких структур значения параметра λ являются докритическими. Состояние решетки все же не полностью упорядочено в пространстве за счет дефектов, представляющих собой фазы зигзаговой структуры.

Возникшие в результате селекции зигзаговые структуры и дефекты неподвижны в пространстве. При дальнейшем увеличении λ начинается случайное блуждание дефектов. Когда дефекты встречаются друг с другом, они аннигилируют. (Стадия броуновского движения дефектов, на фазовой диаграмме BD - brownian motion of defects.) При еще большем λ начинается также спонтанная генерация пар дефектов. Это стадия дефектной турбулентности (на фазовой диаграмме DT - defect turbulence). Решетка при этом еще содержит достаточно выраженные участки зигзаговых структур.

При несколько больших значениях параметра связи и при тех же значениях λ реализуется фаза перемежаемости конкурирующих структур (PCI - pattern competition intermitency). При этом в среде перемежаются участки как с регулярной, так и с хаотической динамикой во времени, причем пространственный период в областях регулярности - более двух шагов решетки. Данный режим похож на дефектную турбулентность, но размер "дефектов" теперь не мал и сравним с характерными размерами участков регулярности.

Наконец, при еще больших λ , движение дефектов становится интенсивным, зигзаговые структуры разрушаются и возникает состояние развитой турбулентности, когда на пространственно-временной диаграмме невозможно выделить упорядоченные пространственные структуры (на фазовой диаграмме FDT - fully developed turbulence).

се). В режиме развитой турбулентности реализуется локальный в пространстве хаос с быстрым спаданием пространственных корреляций. В этой фазе свойственная хаосу неустойчивость побеждает все тенденции к упорядочиванию.

Имея в виду результаты РГ-анализа, можно предположить, что вся описанная картина многократно повторяется (как показано на рис. 5) вблизи критической точки $\lambda = \lambda_c$, $\epsilon = 0$, ответственной за решеточный скейлинг. Действительно, компьютерное моделирование динамики системы в областях, лежащих внутри показанных на рис. 5 уменьшающихся прямоугольников, демонстрирует те же фазы Канеко. (При переходе от нулевого уровня к первому точного воспроизведения формы областей, конечно, нет, так как речь идет об области пространства параметров, не очень близкой к критической точке. Однако для последующих уровней степень количественного соответствия между конфигурациями областей улучшается в силу асимптотического характера скейлинга.)

В качестве иллюстрации скейлинга рассмотрим показанные на рис. 6 пространственные спектры для фаз Канеко FRP (а), PS (б), PCI (в), FDT (г), которые получены нами численно для модели (24) из 512 ячеек с периодическими граничными условиями. На каждом из рис. (а)-(г) приведены спектры для пяти подобных в смысле решеточного скейлинга режимов динамики решетки или, как мы будем говорить, для пяти уровней скейлинга $n = 0, 1, \dots, 4$. Для большей наглядности спектры, отвечающие четным n , показаны жирными линиями, а для нечетных n - тонкими. На нулевом уровне значения параметров соответствуют выбранным в работе Канеко [57]: $\epsilon = 0, 3$; $\lambda = 1, 53$ (а), $1, 69$ (б), $1, 78$ (в), $1, 93$ (г). В качестве начальных условий задавались случайные числа, равномерно распределенные в интервале $(0, 1)$. При переходе к следующим уровням коэффициент связи пересчитывался по правилу $\epsilon \rightarrow \epsilon \cdot 2^{-n}$, управляющий параметр по правилу $\lambda \rightarrow \lambda_c + (\lambda - \lambda_c) \delta_F^{-n}$, а амплитуда случайных начальных условий уменьшается пропорционально δ_F^{-n} . После достаточно большого числа предварительных итераций, исключая переходные эффекты, пространственный спектр определяется усреднением квадратов амплитуд фурье-компонент по нескольким десяткам временных шагов. Скейлинг должен проявляться в том, что изображенные в логарифмическом масштабе спектры, относящиеся к разным уровням n , должны совпадать по форме, различаясь только сдвигом по вертикальной оси на не зависящую от n величину. Из рисунка видно, что это действительно так.

Коснемся теперь кратко результатов анализа модели с линейной связью

$$x_{n+1, m} = 1 - \lambda x_{n, m}^2 + \gamma(x_{n, m-1} - 2x_{n, m} + x_{n, m+1}),$$

которая исследовалась в работах [58 - 60].

В этой модели еще в докритической области возникает зигзаговая неустойчивость, в результате которой формируется волнообразная структура с длиной волны в два шага решетки. Ее сравнивают с состоянием, характерным для антиферромагнетиков, в которых соседние спины имеют тенденцию ориентироваться в противоположных направлениях [59]. При увеличении управляющего параметра зигзаговая структура претерпевает бифуркацию типа Хопфа, и возникает квазипериодическое движение. При движении по параметру наблюдаются эффекты захвата ("языки Арнольда") и переход к хаосу,

который с ростом параметра λ становится все более развитым и сложным.

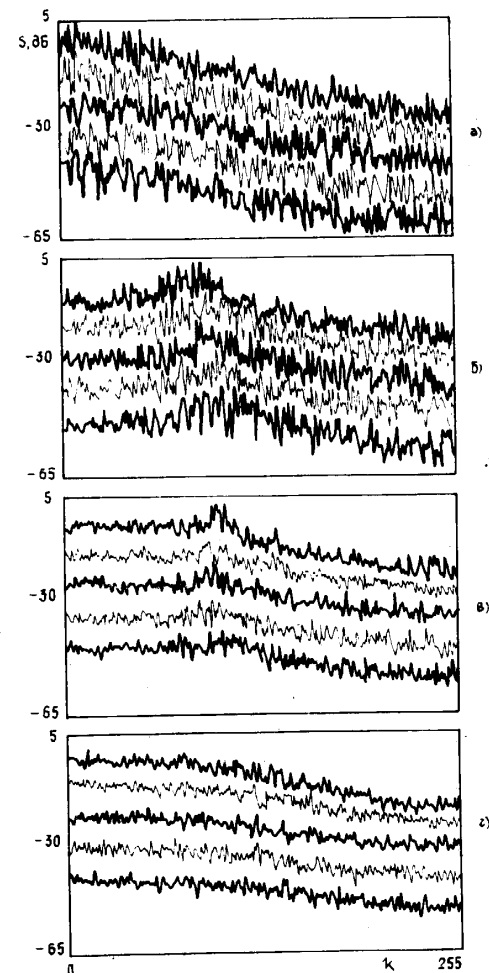


Рис 6

Как и в решетке с диссипативной связью, на базе зигзагообразных состояний возможно возникновение дефектов, отвечающих переходу в пространстве от одной фазы зигзага к противоположной, броуновского движения этих дефектов, дефектной турбулентности.

При определенном выборе параметров в решетке с линейной связью можно наблюдать также возникновение зигзагообразных структур с временными периодами 2, 4, 8, ... В работе [58] эмпирически обнаружен скейлинг соответствующих областей на плоскости λ, γ , характеризующийся масштабными константами Фейгенбаума, соответственно, δ_F и a_F . Это естественно, поскольку, как объясня-

лось в предыдущем разделе, линейная связь содержит доминирующую инерционную компоненту.

7. Критические явления в континуальном пределе

Обратимся теперь к ситуации, когда динамика структур в решетке связанных отображений может быть рассмотрена в континуальном пределе, т.е. можно перейти к непрерывной пространственной координате z . Оказывается, что это допустимо в окрестности критической точки, даже если сглаживающая возмущения диффузионная компонента связи не велика. Важно лишь, чтобы она доминировала над остальными типами связи. При этом возникает представление о новом типе скейлинга, который будем называть *континуальным скейлингом*.

Рассмотрим сначала решетку с чистой диффузионной связью между ячейками и предположим, что управляющий параметр равен фейгенбаумовскому критическому значению, а коэффициент диффузии D достаточно мал. Будем выполнять описанную в предыдущем разделе "решеточную" процедуру РГ преобразования многократно. На каждом новом шаге имеем дело с состояниями решетки, сосредоточенными на все более узком интервале динамической переменной ($x \approx 1/a^n$), а коэффициент диффузии увеличивается по закону $D \cdot 2^n$. Ясно, что для этих состояний из-за сильного влияния диссипации при больших n значения динамической переменной соседних элементов должны быть близки. Вернемся к описанию с помощью исходного уравнения. Тогда в нем можно перейти к непрерывному пределу, заменив разностный член второй производной по пространственной координате $z \approx m\sqrt{D}$:

$$x_{n+1}(z) = f(x_n(z)) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(x_n(z)). \quad (25)$$

Теперь пересчет параметра связи при ренормализации в 2 раза эквивалентен пересчету пространственной координаты z в $\sqrt{2}$ раз.

Для обсуждаемой ситуации можно переформулировать РГ анализ так, чтобы неподвижная точка уравнения РГ отвечала распределенной среде с диффузией, а не решетке несвязанных отображений, как раньше [61 - 64]. Обозначим исходный оператор эволюции через $G_0[x]$.

Применив его дважды и выполнив преобразование масштаба $\hat{S}x(z) = \alpha x(z\sqrt{2})$, получим оператор $G_1[x] = \hat{S}G_0\hat{S}^{-1}[x]$, описывающий эволюцию за два временных шага. Повторяя эту процедуру многократно, приходим к рекуррентному операторному уравнению

$$G_{n+1}[x] = \hat{S}G_n\hat{S}^{-1}[x], \quad (26)$$

где G_n - ренормализованный оператор эволюции за 2^n шагов.

Как показано в [62, 63], существует предельный оператор G , являющийся неподвижной точкой РГ уравнения

$$G[x] = \hat{S}G\hat{S}^{-1}[x]. \quad (27)$$

Оператор G универсален, т.е. совпадает для всех систем с диффузионной связью с точностью до пересчета масштаба пространственной координаты и динамической переменной. Подставляя в (27) $G_n[x] = G[x] + \epsilon h_n[x]$ и считая возмущение малым, получаем следующее операторное уравнение [64]:

$$h_{n+1}[x] = \hat{M}h_n[x] = \hat{S}G'(\hat{S}^{-1}[x])h_n\hat{S}^{-1}[x] + \hat{S}h_n\hat{S}^{-1}[x], \quad (28)$$

где $G'(\hat{S}^{-1}[x])$ - производная Фреше от оператора G . Линейный оператор \hat{M} имеет три существенных собственных вектора с собственными числами $\nu_1 = \alpha/\sqrt{2} = -1,7698$, $\nu_2 = \sqrt{2} = 1,4142$, $\nu_3 = \alpha/2 = -1,2512$. К ним нужно добавить, конечно, собственный вектор с $\nu_0 = \delta = 4,6692$, описывающий возмущение параметра индивидуальных элементов пространственной системы.

Можно построить и соответствующее универсальное модельное уравнение:

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \alpha(1 - 0,176x_n)\frac{\partial x}{\partial z} + \beta\frac{\partial(x_n^2)}{\partial z} + \gamma(1 - 0,176x_n)\frac{\partial^2 x_n}{\partial z^2} - \frac{\partial^2(x_n^2)}{\partial z^2}. \quad (29)$$

Дадим теперь формулировку свойства *континуального скейлинга*. В непрерывном пределе распределенная система характеризуется четырьмя параметрами $(\lambda - \lambda_c)$, α , β , γ . Пространство этих параметров обладает масштабной инвариантностью относительно замены $(\lambda - \lambda_c)/\delta$, α/ν_1 , β/ν_2 , γ/ν_3 , сопровождающейся пересчетом динамической переменной x с фактором $1/a^n$, удвоением временного масштаба и пересчетом пространственной координаты в $\sqrt{2}$ раз.

Проиллюстрируем свойство континуального скейлинга, рассматривая динамику той же решетки с чистой диффузионной связью (24), что и в предыдущем разделе. На рис. 7 показан вид пространственных спектров хаотических режимов в двойном логарифмическом масштабе при значениях параметра $\lambda_1 = 1,543689$, $\lambda_2 = 1,430357$, $\lambda_3 = 1,407405$, $\lambda_4 = 1,402492$, $\lambda_5 = 1,401442$, отвечающих точкам слияния полос аттрактора локального отображения. Решетка содержала $M = 512$ ячеек, в качестве граничных условий было задано условие периодичности. Начальные условия имели вид почти пространственно-однородного состояния с малыми случайными возмущениями. После некоторого большого числа предварительных итераций во всех случаях наблюдался развитый пространственно-временной хаос сохранившийся, однако, 2^n -полосную структуру, характерную для аттрактора локального отображения при значениях $\lambda = \lambda_n$. Отличие от предыдущего раздела состоит в том, что при переходе от уровня к уровню n параметр связи не пересчитывался. Как видно из рисунка,

форма спектра, полученная для разных n , с хорошей точностью повторяется, что подтверждает ожидаемый скейлинг. Кроме сдвига вниз по вертикали, с ростом n происходит и сдвиг по горизонтали, вдоль оси логарифмов волновых чисел, что соответствует увеличению характерного пространственного масштаба хаотических структур пропорционально $2^{n/2}$.

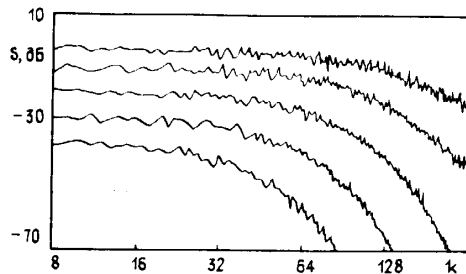


Рис. 7.

Другие проявления непрерывного скейлинга обсуждаются в работах [61 - 63] (скейлинг пространственных структур, возникающих на пороге хаоса при наличии в среде локальной неоднородности, свойства подобия карты динамических режимов однодоменного состояния на плоскости параметр λ - длина системы для модели с чистой диффузией), [65] (скейлинг пространственной корреляционной функции и визуальная иллюстрация подобия пространственных структур в хаотических режимах), [64, 33] (подобие карт динамических режимов и пространственно-временных диаграмм при наличии помимо диффузии небольших по величине дополнительных типов связи α, β, γ).

Вопрос о том, в какой мере феномены, наблюдаемые в СМЛ, имеют отношение к реальным примерам сложной пространственно-временной динамики, во многом остается открытым, хотя в качественном плане он дискутируется в ряде работ [60, 62, 63, 66]. Несомненно, однако, что такие искусственно сконструированные системы, как цепочка нелинейных колебательных контуров под периодическим внешним воздействием в области параметров, где индивидуальный элемент демонстрирует удвоения периода, попадают в те же классы универсальности, что и рассмотренные в двух последних разделах модели СМЛ. Насколько нам известно, пока еще не опубликовано экспериментальных работ, где в данном ключе исследовались бы подобные системы.

В то же время, существует класс систем, реально наблюдаемое поведение которых при надлежащей трактовке соответствует динамике СМЛ (в непрерывном пределе). Это системы с запаздывающей обратной связью [67 - 73]. Типичным примером может служить дифференциально-разностное уравнение

$$dx/dt + x = f(x(t - T)), \quad (30)$$

описывающее некоторые радиотехнические, оптические и другие системы [68, 71, 72]. В таких системах конфигурация зависимости сигнала от времени на интервале запаздывания можно интерпретировать как "мгновенный фотоснимок" пространственной структуры в эквивалентной системе - отрезке распределенной среды с некоторыми специальными граничными условиями. В системах с запаздыва-

нием экспериментально наблюдаются домены и доменные стенки различного уровня, характерные особенности эволюции структур на пути к хаосу и т. д. [67 - 73].

8. Развитие турбулентности в потоковых системах

В работах [74 - 76] была предложена и исследована решетчатая потоковая модель, составленная из точечных систем Фейгенбаума и описываемая уравнением

$$x_{n+1, m} = 1 - \lambda x_{n, m}^2 + \varepsilon (x_{n, m}^2 - x_{n, m-1}^2), \quad (31)$$

где m - пространственный, n - временной индекс. Рассмотрим наиболее интересные особенности поведения этой модели, наблюдаемые в численном эксперименте. Прежде всего обнаруживаются так называемые пространственные удвоения периода. Существо дела состоит в том, что по мере увеличения пространственного индекса временной период динамики ячеек решетки последовательно увеличивается и составляет 2, 4, 8... В зависимости от параметров задачи λ и ε могут реализоваться две возможности: а) происходит конечное число удвоений, система выходит на некоторый режим с временным периодом 2^n и далее вниз по потоку период больше не меняется; б) после конечного числа удвоений периода в очередной пространственной ячейке имеет место хаос, при этом последующие ячейки также демонстрируют хаос во времени. Интересно поведение ляпуновских показателей в последнем случае. Предварительно заметим, что при однонаправленной связи ляпуновские показатели легко вычисляются, так как матрица эволюции малых возмущений является треугольной [76, 78]. По этой же причине каждый из ляпуновских показателей ассоциируется с определенным элементом цепочки и нумеруется соответствующим пространственным индексом. Как правило, хаос, распространяющийся сколь угодно далеко вниз по потоку, характеризуется всего одним положительным показателем, тогда как показатели с большими номерами все отрицательны. Это говорит о том, что хаос генерируется на начальном участке потока, распространяется вниз и не может быть, вообще говоря, диагностирован локальным анализом динамических свойств потока в достаточно далеком сечении. Это свидетельствует также о возникновении в потоке специфического установившегося в пространстве состояния, характеризующегося неизменной вдоль по потоку размерностью аттрактора. В работах [77, 78] это явление получило название стохастической синхронизации.

Далее в работе [74] обращено внимание на существенное влияние даже малого шума на начальном участке цепочки. Он приводит к тому, что в потоке генерируются кинки - перепады, по разные стороны которых элементарные системы совершают движения со сдвинутыми фазами. Кинки распространяются вниз по потоку со скоростью, зависящей от величины сдвига фазы на кинке. Пространственная плотность кинков тем больше, чем выше уровень шума.

Наиболее полный анализ закономерностей универсальности и скейлинга в системах рассматриваемого класса содержится в работах [75, 76]. Здесь построена последовательная процедура РГ анализа, основанная на операторном уравнении, описывающем преобразование оператора эволюции при переходе к удвоенной протяженности рассматриваемого временного интервала. Проанализирована задача на собственные векторы и собственные значения этого оператора вблизи неподвижной точки, отвечающей цепочке несвя-

занных систем. Показано, что однонаправленная связь представляется в виде комбинации инерционной и диссипативной связи и характеризуется двумя независимыми параметрами. От конкретного выбора вида функций, описывающих связь, зависят лишь величины этих параметров. Показано также, что учет слабой диффузионной связи в потоковых системах не приводит к появлению новых существенных параметров (соответствующие собственные числа оператора реформпреобразования меньше единицы) и, следовательно, диффузией можно пренебречь при изучении явлений, наблюдаемых после нескольких удвоений периода. Тем самым результаты, полученные в [75, 76] для систем с однонаправленной связью конкретного вида, оказываются на самом деле гораздо более общими и применимы, по существу, к любым потоковым системам, построенным из фейгенбаумовских элементов. Найденные соотношения позволяют количественно оценить номер элемента цепочки, в котором возникает хаос и число пространственных удвоений периода.

В работе [78] приводятся результаты физических экспериментов с цепочкой однонаправленно-связанных радиотехнических генераторов с инерционной нелинейностью, а также рассмотрена модельная потоковая система в виде цепочки одномерных отображений. Поскольку в отдельном генераторе при изменении управляющего параметра наблюдается переход к хаосу через фейгенбаумовскую последовательность бифуркаций удвоения периода, то в модельной системе в качестве точечных элементов используются отображения параболического типа. Соответствующая система уравнений имеет вид, аналогичный (31).

В эксперименте была получена картина областей различных динамических режимов на плоскости номера ячейки - параметр неравномерности. При малых значениях параметра неравномерности наблюдается конечное число удвоений периода "вниз по потоку" и возникновение в итоге периодического во времени режима колебаний. При увеличении параметра неравномерности наступала ситуация, когда после конечного числа удвоений периода вдоль цепочки появлялся хаос. При этом ширина спектра и размерность, начиная с некоторого элемента, устанавливаются на постоянном уровне и не меняются вниз по потоку.

9. Динамика структур в двумерной решетке

Переход к решеткам с двумя и более пространственными изменениями представляет собой следующий естественный шаг в формировании излагаемой системы представлений, а также в построении более реалистичных моделей турбулентного состояния физических систем. Однако исследование таких моделей является более сложным делом и требует использования достаточно мощных компьютеров.

Решеточный РГ анализ для двумерной решетки строится по той же схеме, как и в одномерном случае (см. начало раздела 6). При этом роль неподвижной точки РГ играет набор несвязанных отображений

$$\{ \dots g(x(i, m)), \dots \},$$

где i и m - пространственные индексы. Как и раньше, можно включить теперь инерционную и/или диссипативную связь между соседними ячейками, поскольку уравнение, описывающее РГ преобразование членов связи, по-прежнему имеет вид (13). Если связь между любыми двумя соседними элементами симметричная, то протяженная решетка характеризуется всего тремя существенными параметрами: управляющим параметром λ и коэффициентами инерционной и диссипативной связи.

Структура пространства этих трех параметров обладает свойством *решеточного скейлинга*, подобным сформулированному в разд. 6.

Продолжая рассуждения по аналогии с одномерным случаем, можно прийти к представлению о *континуальном скейлинге* в *двумерных системах*, обоснованием которого может служить обобщение развитого в [62 - 64] РГ анализа на двумерный случай. При этом для структур, пространственный масштаб которых намного превышает шаг решетки и которые допускают рассмотрение в непрерывном пределе, двумерная система (с симметричной связью) будет характеризоваться двумя существенными параметрами $(\lambda - \lambda_c)$ и γ . Пространство этих параметров обладает масштабной инвариантностью относительно замены $(\lambda - \lambda_c) / \delta_r, \gamma / \nu_3$, сопровождающейся пересчетом динамической переменной x с фактором $1/\alpha_r$, удвоением временного масштаба и пересчетом пространственных координат y, z в $\sqrt{2}$ раз. Соответствующая универсальная модель имеет вид

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \gamma(1 - 0,176x_n) \left[\frac{\partial^2 x_n}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 x_n}{\partial y^2} \right] - \left[\frac{\partial^2 (x_n^2)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 (x_n^2)}{\partial y^2} \right]. \quad (32)$$

Обсудим теперь накопленные к настоящему времени результаты компьютерного моделирования динамики двумерных решеток связанных логистических отображений [57, 60, 66, 80 - 82].

Рассмотрим двумерную решетку связанных отображений с *диссипативной* связью между элементами:

$$x_{n+1}(i, m) = (1 - \epsilon)f(x_n(i, m)) + \frac{\epsilon}{4}[f(x_n(i+1, m)) + f(x_n(i-1, m)) + f(x_n(i, m+1)) + f(x_n(i, m-1))]. \quad (33)$$

Здесь $f(x) = 1 - \lambda x^2$, n - дискретное время, i и m - пространственные индексы, ϵ - параметр связи.

При небольших уровнях связи ($\epsilon \approx 0,1$) и небольших превышениях параметра λ над критическим значением в решетке наблюдается *фаза замороженных случайных структур*. При увеличении λ наступает *фаза селекции*, приводящая к возникновению *шахматных структур*. В такой структуре соседние элементы решетки колеблются в противофазе, а хаос во времени подавлен за счет селекции. При случайных начальных условиях в результате переходного процесса обычно возникают островки шахматных структур, разделенные хаотическими струнами, имеющими сложную, извилистую форму. Струны демонстрируют хаос во времени, что тестируется по появлению дополнительного положительного ляпуновского показателя, ассоциирующегося с каждой струной. Струны медленно блуждают, меняют форму, иногда замкнутые в кольцо струны стягиваются в точку и гибнут при этом. По истечении достаточно большого времени происходит гибель всех струн и формируется единая тотальная шахматная структура.

Если еще увеличить параметр λ , наступает стадия *дефектной турбулентности*. В этой фазе струны не только гибнут, но и происходит рождение кольцевых струн из точечных дефектов.

Наконец, при еще больших λ наступает *полностью развитая турбулентность*, когда достаточно долгоживущие пространственные структуры отсутствуют.

Если теперь несколько увеличить связь ($\epsilon \approx 0,2$), то в результате селекции выживают не шахматные структуры, а структуры, составленные из ячеек "типа 2×1 ", когда синхронно колеблется пара ближайших элементов. При промежуточных значениях коэффициента связи имеет место пространственная перемежаемость этих двух типов структур. Благодаря двум возможным пространственным ориентациям относительно решетки ячеек "типа 2×1 " (вертикальной и горизонтальной) характерное время установления стационарной пространственной картины в этом случае значительно больше, чем для симметричной шахматной структуры.

Если же связь увеличить еще больше ($\epsilon \approx 0,4$), то динамика структур оказывается существенно иной. По мере временной эволюции маленькие домены постепенно сжимаются, так что в конце концов выживает один большой домен, покрывающий все пространство. В докритической области параметра λ возникают пространственно однородные состояния, а в закритической - турбулентные состояния, характеризующиеся отсутствием долгоживущих структур. В [66] предлагается объяснение феномена разрушения доменов на основе представлений о поверхностном натяжении доменных стенок.

Рис. 8 и 9 иллюстрируют, соответственно, решеточный и континуальный скейлинг двумерной пространственно-временной турбулентности в закритической области параметра λ .

На рис. 8 приведены двумерные пространственные спектры подобных в смысле решеточного скейлинга режимов (уровни $n = 0, 1, 2$), полученные численно для модели (32) из 64×64 ячеек с периодическими граничными условиями. На уровне $n = 0$ значения параметров $\lambda = 1,54$, $\epsilon = 0,3$, а в качестве начальных условий задавались случайные числа, равномерно распределенные в интервале $(0, 0,4)$. Для следующих уровней коэффициент связи пересчитывался по правилу $\epsilon \rightarrow \epsilon \cdot 2^{-n}$, управляющий параметр по правилу $\lambda \rightarrow \lambda_c + (\lambda - \lambda_c) \delta_F^{-n}$, а амплитуда случайных начальных условий - пропорционально α_F^{-n} . После достаточно большого числа предварительных итераций проводилось усреднение квадратов амплитуд фурье-компонент по нескольким десяткам временных шагов. Скейлинг подтверждается: в логарифмическом масштабе спектры, относящиеся к разным n , в среднем повторяют друг друга по форме, отличаясь сдвигом по вертикальной оси.

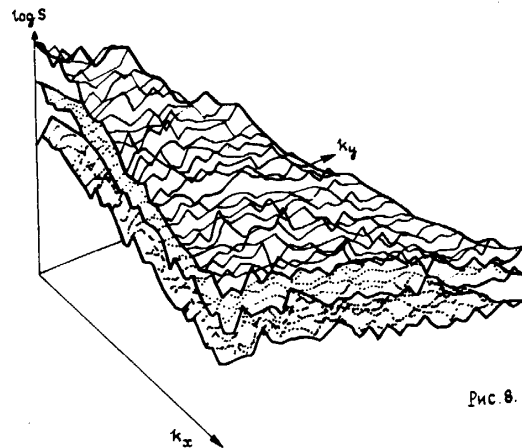


Рис. 8.

На рис. 9 а - г показаны мгновенные снимки турбулентных структур в решетке (32) из 64×64 ячеек в режимах, подобных в смысле континуального скейлинга (уровни $n = 0, 1, 2, 3$). Значения параметров: $\epsilon = 0,3$, $\lambda = \lambda_c + (1,54 - \lambda_c) \delta_F^{-n}$. Ячейки, в которых $x > 0$, показаны черным, а остальные - белым цветом. Согласно континуальному скейлингу, характерный размер образований должен увеличиваться пропорционально $2^{n/2}$, что можно увидеть из сопоставления картинок. Отметим, что картинка б) и г) имеют негативный вид по сравнению с а) и в), поскольку масштабная константа для динамической переменной x отрицательна.

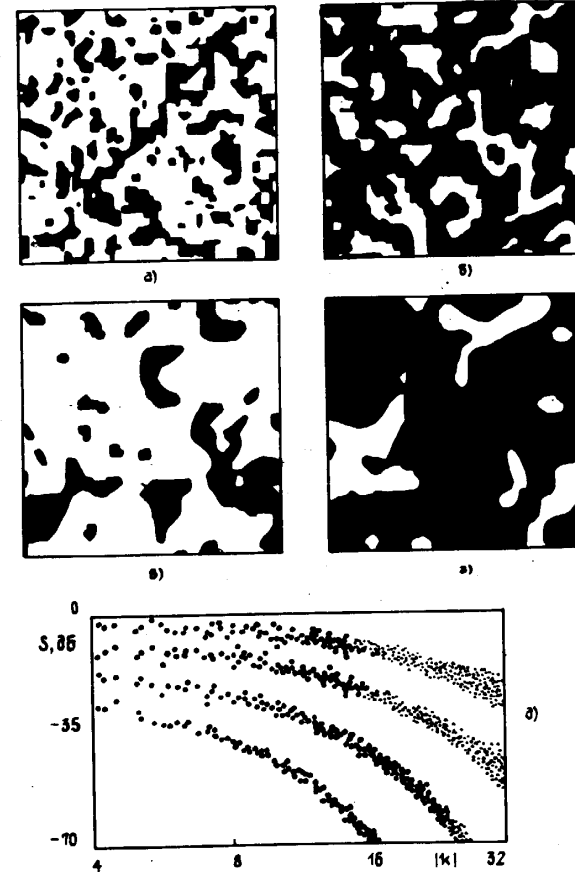


Рис. 9.

Для количественной проверки скейлинга обратимся вновь к пространственным спектрам. Поскольку в континуальном пределе решетка (32) изотропна, пространственный спектр турбулентных состояний должен зависеть только от модуля волнового вектора $|k|$. На рис. 9д в двойном логарифмическом масштабе показаны эти зависимости, полученные для режимов динамики решетки, отвечающих рис. 9 а - г.

можно видеть повторение формы зависимостей от уровня к уровню с постоянным сдвигом по вертикали вниз и по горизонтали влево. Уменьшение разброса точек с увеличением n объясняется возрастанием точности, с которой выполняется предположение об изотропии спектра, с увеличением характерного размера структур.

Еще одной иллюстрацией континуального скейлинга в двумерной системе с диссипативной связью могут служить результаты недавней работы [82]. Там продемонстрирован соответствующий этому скейлингу закон поведения порогового геометрического размера, начиная с которого ляпуновский показатель хаотической пространственно-временной динамики почти не отличается от случая большой системы. При уменьшении отклонения управляющего параметра λ от критической точки в δ_F раз этот размер увеличивается в $\sqrt{2}$ раз.

Случай *линейной* связи между элементами двумерной решетки изучался в работах [80, 81]. Одна из рассмотренных моделей имела вид

$$x_{n+1}(i, m) = f(x_n(i, m)) + C[x_n(i+1, m) + x_n(i-1, m) + x_n(i, m+1) + x_n(i, m-1) - 4x_n(i, m)], \quad (34)$$

где $f(x) = 1 - \lambda x^2$. Как указывалось в разд. 5, такая связь представляет собой комбинацию инерционной и диссипативной связи с доминирующим вкладом первого типа связи. По этой причине решеточный скейлинг проявляется в свойстве самоподобия карты динамических режимов на плоскости параметр λ - коэффициент связи с масштабными константами δ_F и α_F [80]. Очень типичными являются шахматные структуры, которые в определенных областях параметров решетки могут возникать при развитии неустойчивости однородных состояний уже для $\lambda < \lambda_c$. При соответствующих начальных условиях образуются домены, разделенные струнами - дефектами, по разные стороны которых шахматные структуры находятся в противофазе. На фоне шахматных структур с ростом λ может наблюдаться возникновение квазипериодической динамики с последующим переходом к хаосу. В работе [81] рассмотрены также ситуации, когда каждый узел связан линейно с большим числом соседей. Оказывается, что в этих случаях вместо шахматных структур доминирующую роль начинают играть другие структуры, например, параллельные полосы с длиной волны 2 в модели со связью девяти соседей или с длиной волны 4 в модели со связью 13 соседей.

Ряд описанных особенностей образования структур в двумерных системах наблюдался в экспериментах по конвекции в жидких кристаллах. Наблюдалась селекция структур, образование структур типа 2×1 , феномены пространственной перемежаемости. Соответствующие ссылки приводятся в [66].

10. Сеть глобально связанных отображений

С точки зрения приложения к сложным информационным системам, в частности биологическим, представляет интерес изучение

сетей, в которых каждый из большого числа составляющих элементов связан со всеми другими. В известной модели Хопфилда и ее обобщениях способность к реализации таких информационных процессов как запоминание и распознавание образов, ассоциативная память и др. заложена в структуре связей между элементами сети. Другая возможность состоит в том, чтобы рассмотреть в каком-то смысле противоположную ситуацию, когда структура связей проста, а индивидуальные элементы демонстрируют сложную динамику, включая переход к хаосу. В недавних работах Канеко [83, 84] была введена в рассмотрение сеть глобально связанных логистических отображений. Оказалось, что она демонстрирует целый ряд нетривиальных особенностей поведения, которые могут оказаться полезными для технических приложений, а также для понимания информационных процессов в биологических системах. Эта модель представляет собой предельный случай дальней связи в решетках диссипативно связанных отображений типа (2) и задается уравнением

$$x_{n+1, n} = (1 - \epsilon)f(x_{n, n}) + \epsilon F_n, \quad F_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_{n, i}). \quad (35)$$

Здесь $f(x) = 1 - \lambda x^2$, n - дискретное время, m - номер текущего элемента сети, N - число элементов в сети, которое предполагается большим. Из уравнения видно, что каждый элемент погружен в общее поле F , создаваемое всей сетью. Поэтому модель естественно называть *моделью среднего поля*.

Чтобы представить себе многообразие возможных состояний модели, предположим сначала, что параметр связи $\epsilon \rightarrow 0$, так что мы имеем набор N несвязанных логистических отображений. Пусть параметр λ выбран так, что индивидуальные ячейки совершают устойчивое движение периода 2^n . Выбором начальных условий можно реализовать произвольное распределение ячеек сети по элементам 2^n -цикла: $\{N_i, i = 0, \dots, 2^n - 1\}$. При включении связи на динамику всех ячеек начнет воздействовать единое поле F_n , зависимость которого от n определяется распределением $\{N_i\}$. Тем не менее, по крайней мере при достаточно малых ϵ все эти состояния будут сохранять устойчивость.

Замечательное свойство сети с глобальной связью состоит в том, что распределение ячеек по группам $\{N_i\}$ сохраняется и при включении связи. Состояния всех ячеек, принадлежащих каждой группе, совпадают *точно*, поскольку не отличаются ни их начальные состояния, ни "вынуждающая сила" F_n . Канеко называет эти группы *кластерами*. Легко видеть, что при наличии n кластеров уравнение динамики сети сводится к системе n связанных отображений $f(x)$. Например, для двухкластерного состояния из (35) можно получить

$$x_{n+1}^+ = f(x_n^+) + \frac{\epsilon N_2}{N} (f(x_n^-) - f(x_n^+)),$$

$$x_{n+1}^- = f(x_n^-) + \frac{\epsilon N_1}{N} (f(x_n^+) - f(x_n^-)), \quad (36)$$

где знаками "+" и "-" отмечены динамические переменные для ячеек,

относящихся к первому и второму кластерам, N_1 и N_2 - количество элементов в этих кластерах.

В основу классификации состояний сети можно положить типичную при данных параметрах кластеризацию сети [83, 84]. При этом полезно различать состояния с малым (n порядка единиц) и большим (n порядка N) числом кластеров. Это разделение, кажущееся несколько условным, становится принципиальным в контексте перехода к "термодинамическому пределу" $N \rightarrow \infty$.

В каждой точке плоскости параметров λ , ϵ , задавая ансамбль случайных начальных условий, можно определить посредством компьютерного моделирования динамики сети, какой из типов конечных состояний возникает с большей вероятностью. Соответственно вводится представление о фазах:

- а) когерентная фаза - когда почти все начальные условия приводят к однокластерному состоянию (когерентному аттрактору);
- б) упорядоченная фаза - когда доминируют аттракторы, содержащие небольшое число кластеров;
- в) частично упорядоченная фаза - когда могут возникать состояния как с малым, так и с большим n ;
- г) турбулентная фаза - почти весь фазовый объем занимают аттракторы с большим n .

Области, занимаемые этими фазами на плоскости параметров ϵ , λ , показаны на рис. 10 и обозначены соответственно C , O , PO , T .

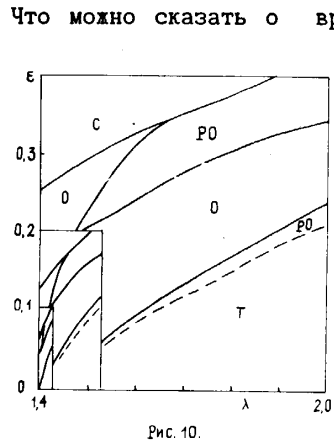


Рис. 10.

Что можно сказать о временной динамике системы при наличии кластеризации? Рассмотрим двухкластерное состояние, описываемое уравнениями (36) и предположим, что первоначально количество элементов в обоих кластерах одинаково. Пусть далее λ и ϵ выбраны так, что реализуется устойчивый цикл периода 2. Будем теперь постепенно увеличивать число элементов в первом кластере. Это можно делать с помощью импульсного воздействия на элементы второго кластера, которое перебрасывает их в первый. Оказывается, что с ростом N_1 с некоторого момента система начинает совершать колебания периода 4, затем 8 и т. д. Если общее число элементов очень велико, так что параметры в (36) можно считать квазинепрерывными, то можно проследить весь классический фейгенбаумовский каскад удвоенного периода и известную картину закрытого поведения с хаосом и окнами устойчивости. Наконец, наступает момент $N_1 = N_{пор}$, когда попытка добавить еще один элемент в первый кластер приводит к новому эффекту: возникает сложный переходный процесс, в ходе которого система содержит три кластера (с числами заполнения $N_{пор}$, $N - N_{пор} - 1$, 1). Он завершается либо возвратом на исходный аттрактор, либо возникновением состояния, в котором все x^+ заменились на x^- и наоборот. Этот феномен получил название

переключение плюс - минус (*posi - nega switch*).

С учетом иерархической структуры циклов индивидуального логистического отображения (см. разд. 6) можно ввести представление о кластерах разного уровня подобно тому, как это было сделано для доменов в SML. Ясно, что в общем случае кластеризация тоже иерархическая: кластеры первого уровня имеют внутри себя кластеры второго уровня, те, в свою очередь, содержат кластеры третьего уровня и т. д. При управлении внешними толчками феномены типа переключения плюс - минус могут происходить на разных уровнях иерархии. В некоторых случаях переключение, осуществляемое на некотором глубоком уровне, дает начало разрастающемуся возмущению, которое распространяется и на менее глубокие уровни, приводя к разрушению старой иерархической структуры и формированию новой ("переключение с хаотическим революционным переворотом" - *switch with chaotic revolt*).

Сеть (35) представляет собой совокупность попарно диссипативно связанных элементов. Поэтому на нее переносится концепция *решеточного скейлинга*, обсуждавшаяся в предыдущих разделах. А именно, если уменьшить в a_f раз амплитуду случайных начальных условий, то в точке плоскости параметров $\lambda_c + (\lambda - \lambda_c)/\delta_f$, $\epsilon/2$ будет реализоваться та же фаза, какая имела место в точке λ, ϵ . (Это свойство выполняется с тем большей точностью, чем меньше рассматриваемая окрестность критической точки $\lambda = \lambda_c$, $\epsilon = 0$.)

Приводимая на рис. 10 диаграмма фаз Канеко дополнена уменьшающимися фрагментами, которые иллюстрируют многократное повторение картины областей при приближении к критической точке.

Заметим, что динамика состояний сети с конечным числом кластеров описывается маломерной системой отображений, в которой могут возникать типы критического поведения, рассмотренные в разделах 1 - 5. Нетрудно предложить примеры кластерных структур и значения параметров, при которых реализуются фейгенбаумовское и трикритическое поведение. Случай двух кластеров одинакового размера описывается в точности уравнением (18), карта динамических режимов которого с присущими ей свойствами скейлинга рассматривалась выше (рис. 3).

Заключение

В основу нашего изложения были положены концепции ренорм-группы, универсальности и скейлинга, и в заключение обзора мы хотим обсудить в свете этих концепций несколько руководящих идей, которые, по нашему мнению, будут определять дальнейшее развитие рассматриваемой области.

Первая из них - это идея "движения по коразмерности", лежащая в основе ряда областей математики и выдвинутая еще Пуанкаре. Она имеет важное значение при многопараметрическом анализе перехода к хаосу.

Пусть мы имеем нелинейную систему, способную демонстрировать в зависимости от нескольких параметров как регулярное, так и хаотическое поведение. В пространстве этих параметров будут присутствовать некоторые критические поверхности коразмерности 1, вблизи которых разыгрываются известные однопараметрические сценарии возникновения хаоса, например, через удвоения периода. Двигаясь вдоль такой поверхности, можно, вообще говоря, обнаружить некоторую границу, критическую поверхность коразмерности 2, появление которой физически может быть связано, например, с выходом на порог устойчивости новой моды. В свою очередь, эта

поверхность может быть ограничена поверхностью коразмерности 3 и т. д. Критическое поведение, реализующееся на каждой из этих поверхностей разной коразмерности, должно быть проанализировано с помощью метода РГ.

Сами по себе результаты РГ анализа еще не дают полного представления о явлениях, которые могут наблюдаться в исследуемой системе. Они, во-первых, помогают построить модели, заслуживающие изучения, и, во-вторых, создают основу для классификации и понимания иерархической организации динамических процессов. Конкретное же наполнение содержанием этой схемы, выявление реализующихся феноменов - это дело компьютерного моделирования. Если использовать раскожее сравнение многообразия феноменов с зоопарком, то результаты РГ определяют принцип расстановки клеток, тогда как компьютерные расчеты выявляют, какой зверь живет в какой клетке. Но не следует и приуменьшать значение принципа: очень полезно уметь определить, какой зверь находится в клетке А, если известно, кто живет в клетке В. Тем более, что "зоопарк" содержит бесконечное число клеток!

В прилегающей к критической точке (линии, поверхности) части пространства параметров реализуется универсальная, определяемая только типом критического поведения структура областей типа вложенных друг в друга матрешек. *Эту структуру следует рассматривать как объект, служащий обобщением понятия "сценарий перехода к хаосу" в многопараметрической ситуации.* Универсальными в том же смысле будут форма спектра критического движения, вид зависимости ляпуновских показателей от параметров задачи, фрактальная структура и хаусдорфова размерность критического аттрактора. Лишь после того как наши представления о том или ином типе критической динамики насытятся подобной физической и математической инфраструктурой, можно говорить о достаточно полном понимании соответствующего "сценария".

Из сказанного ясна общая стратегия поиска и исследования новых типов критического поведения, которая, несомненно, будет постепенно реализовываться. На сегодняшний день достаточно убедительной ее иллюстрацией могут служить результаты анализа задачи о поведении двух систем Фейгенбаума с однонаправленной связью, в которой обнаружена иерархия типов критического поведения.

Следующая важная идея - это идея конструирования составных комплексов, в том числе решеток и сетей, из элементов с известным типом поведения. Она была популярна еще в классической теории колебаний, где роль индивидуального элемента играл гармонический осциллятор. Она же лежит в основе синергетики, рассматривающей процессы самоорганизации и хаотизации в системах, построенных на базе нелинейных элементов.

Любая система, демонстрирующая определенный тип критического поведения, может рассматриваться как новый фундаментальный объект, пригодный для использования в качестве составного элемента при построении составных систем-комплексов. В свою очередь комплекс в целом может и должен быть исследован на наличие новых типов критического поведения.

В обзоре была подробно рассмотрена динамика связанных систем, решеток, сетей, в которых в качестве индивидуального элемента фигурировало логистическое отображение с одним параметром, демонстрирующее Фейгенбаумовский сценарий перехода к хаосу. Исследование этих моделей вскрыло необычайно богатство структур, обладающих иерархической организацией вблизи точки перехода к хаосу. Здесь надо отметить, что обычно о "модельных системах" говорят тогда, когда ценой существенного упрощения описания стремятся достигнуть хотя бы грубого, качественного понимания пове-

дения реально существующего объекта. Однако в контексте представлений о критических явлениях от моделей следует ожидать большего. Будучи полноправными представителями своих классов универсальности, они должны обеспечивать адекватное количественное описание реальных систем, относящихся к тем же классам, по крайней мере вблизи соответствующих критических точек. Вопрос состоит только в установлении соответствия между динамическими переменными и параметрами системы и модели. Мы хотим особо подчеркнуть этот момент, поскольку обсуждавшиеся модели могли показаться чересчур абстрактными.

Приложение

1. Функция Фейгенбаума:

$$g(x) = 1 - 1,527632997x^2 + 0,1048151943x^4 + 0,0267056735x^6 - 0,0035274139x^8 + 0,0000815819x^{10} + 0,0000253684x^{12} - 0,0000026878x^{14}.$$

2. Универсальная функция, описывающая трикритическую динамику:

$$g_T(x) = 1 - 1,83410790700x^4 + 0,01296222601x^8 + 0,31190173945x^{12} - 0,06201465160x^{16} - 0,03753928670x^{20} + 0,01764731251x^{24} + 0,00193826520x^{28} - 0,00282047096x^{32} + 0,00011545666x^{36} + 0,00039947082x^{40} - 0,00002479251x^{44} - 0,00012164143x^{48} + 0,00007043385x^{52} - 0,00001797963x^{56} + 0,00000190870x^{60}.$$

3. Универсальная функция, описывающая бикритическую динамику:

$$f_B(x, y) = 1 - 0,596905x^2 - 0,032157x^4 + 0,018457x^6 - 0,000201x^8 - 0,855639y^2 - 0,302943x^2y^2 + 0,054630x^4y^2 + 0,021499x^6y^2 - 0,004860x^8y^2 - 0,431738y^4 + 0,087452x^2y^4 + 0,091136x^4y^4 - 0,011023x^6y^4 - 0,003242x^8y^4 + 0,087486y^6 + 0,180356x^2y^6 + 0,009298x^4y^6 - 0,031914x^6y^6 + 0,005042x^8y^6 + 0,152662y^8 + 0,060337x^2y^8 - 0,096310x^4y^8 + 0,017439x^6y^8 + 0,060864y^{10} - 0,153737x^2y^{10} + 0,037690x^4y^{10} - 0,101867y^{12} + 0,047570x^2y^{12} + 0,026310y^{14}.$$

4. Универсальная функция, описывающая динамику в мультикритической точке ВТ:

$$f_{BT}(x, y) = 1 - 0,401489y^4 - 0,647008y^8 - 0,764338y^{12} + 0,948317y^{16} - 6,512318y^{20} + 23,444001y^{24} - 51,462786y^{28} + 76,526244y^{32} - 69,236797y^{36} + 33,523789y^{40} - 6,654459y^{44} + x^2(-0,380946 - 0,578270y^4 - 0,924782y^8 + 3,207539y^{12} - 27,026345y^{16} + 127,361506y^{20} -$$

$$\begin{aligned}
& - 364, 218724y^{24} + 676, 471413y^{28} - 793, 030007y^{32} + 560, 113033y^{36} - \\
& - 217, 468288y^{40} + 35, 712535y^{44} + x^4(-0, 150141 - 0, 266129y^4 + \\
& + 0, 922201y^8 - 13, 913457y^{12} + 99, 471585y^{16} - 387, 166982y^{20} + \\
& + 937, 925631y^{24} - 1420, 505654y^{28} + 1331, 993505y^{32} - \\
& - 749, 454686y^{36} + 231, 199927y^{40} - 29, 871488y^{44}) + x^6(-0, 024968 - \\
& - 0, 021137y^4 - 1, 107687y^8 + 23, 366570y^{12} - 149, 729985y^{16} + \\
& + 512, 519022y^{20} - 998, 517972y^{24} + 1136, 063481y^{28} - 749, 225002y^{32} + \\
& + 266, 722853y^{36} - 40, 001237y^{40}) + x^8(-0, 002388 + 0, 228128y^4 - \\
& - 0, 111086y^8 - 13, 210179y^{12} + 106, 642684y^{16} - 339, 857148y^{20} + \\
& + 542, 154904y^{24} - 460, 181747y^{28} + 197, 645364y^{32} - 33, 358334y^{36}) + \\
& + x^{10}(0, 016764 - 0, 176914y^4 + 1, 694251y^8 - 1, 908288y^{12} - \\
& - 24, 025646y^{16} + 86, 009698y^{20} - 118, 632825y^{24} + 76, 052577y^{28} - \\
& - 19, 013144y^{32}) + x^{12}(-0, 003513 + 0, 069849y^4 - 0, 891185y^8 + \\
& + 3, 015233y^{12} - 3, 654160y^{16} + 1, 461664y^{20}).
\end{aligned}$$

5. Универсальные функции, описывающие связь между двумя системами Фейгенбаума:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x, y) = & 0, 6103456y - 0, 0578582y^2 + 0, 0000007y^3 - 0, 004556y^4 - \\
& - 0, 6103407x - 0, 0000002xy - 0, 000014x^2y + 0, 0000105xy^4 + \\
& + 0, 0578586x^2 - 0, 0837668x^2y - 0, 0208688x^2y^2 + 0, 0000097x^2y^3 + \\
& + 0, 0005982x^2y^4 + 0, 0000109x^2y^6 + 0, 0837517x^3 + 0, 000011x^3y^2 - \\
& - 0, 0000101x^3y^4 + 0, 0254254x^4 - 0, 0320244x^4y + 0, 0019749x^4y^2 - \\
& - 0, 0000097x^4y^3 - 0, 000095x^4y^4 + 0, 032048x^5 - 0, 0028781x^6 + \\
& + 0, 0057259x^6y - 0, 0000446x^6y - 0, 0057469x^7 + 0, 0001322x^8 - \\
& - 0, 0002811x^8y + 0, 0002906x^9 + 0, 0003007y^6,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x, y) = & -1, 0586844y^2 + 0, 0547721y^4 + 0, 004464y^6 - 0, 0005518y^8 + \\
& + 1, 0586824x^2 + 0, 0357628x^2y^2 + 0, 003456x^2y^4 - 0, 0001064x^2y^6 - \\
& - 0, 0905175x^4 + 0, 0351256x^4y^2 - 0, 0010823x^4y^4 - 0, 0430980x^6 - \\
& - 0, 0050244x^6y^2 + 0, 0001013x^6y^4 + 0, 0068283x^8 + 0, 0001738x^8y^2 - \\
& - 0, 0003016x^{10}.
\end{aligned}$$

1. Вильсон К. Дж. // УФН. 1983. Т. 141. N 2. С. 193.
2. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. - М.: Мир, 1978. Т. 1. - С. 322.
3. Совещание "Ренормгруппа-86". - Дубна: изд. ОИЯИ, 1987. - 414с.
4. Стенли Х., Конильо А. и др. Критические явления: прошлое, настоящее и будущее. В сб.: Синергетика. - М.: Мир, 1984. - С. 41.
5. Feigenbaum M. J. // J. Stat. Phys. 1978. V. 19. N 1. P. 25.
6. Feigenbaum M. J. // J. Stat. Phys. 1979. V. 21. N 6. P. 669.
7. Feigenbaum M. J. // Comm. Math. Phys. 1980. V. 77. N 1. P. 65.
8. Фейгенбаум М. // УФН. 1983. Т. 141. N 2. С. 343.
9. Вул Е. Б., Синай Я. Г., Ханин К. М. // УМН. 1984. Т. 39. N 3. С. 3.
10. Jakobson M. V. // Commun. Math. Phys. 1981. V. 81. N1. P. 39.
11. Шарковский А. Н. // Укр. мат. журн. 1964. Т. 26. N 1. С. 61.
12. Шарковский А. Н., Майстренко Ю. А., Романенко Ю. Е. Разностные уравнения и их приложения. - Киев: Наукова Думка. 1986. - 280 с.
13. Lanford O. E. III. // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 6. N 3. P. 427.
14. Franceschini V. J. // J. Stat. Phys. 1980. V. 22. P. 397.
15. Kai T. // Phys. Lett. 1981. V. A86. N 5. P. 263.
16. Testa J., Pere J., Jeffries C. // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48. N 11. P. 714.
17. Yen W. J., Kao Y. H. // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. N 26. P. 1888.
18. Анищенко В. С., Астахов В. В. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26. N 2. С. 169.
19. Libhaber A., Fauve S., Laroche C. // Physica. 1983. V. ZD. P. 73.
20. Xiao-lan Chen, You-gin Wang, Shi-gang Chen. // Solid State Commun. 1984. V. 25. N 1. P. 1.
21. Астахов В. В., Безручко Б. П., Селезнев Е. П. Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32. N 12. С. 2558.
22. ТИИЭР (тематический выпуск "Хаотические системы"). 1987. Т. 75. N 8. С. 4.
23. Collet P., Eckmann J. P., Koch H. // J. Stat. Phys. 1980. V. 25. N 1. P. 1.
24. Chang S. J., Wortis M., Wright J. A. // Phys. Rev. 1981. V. A24. N 5. P. 2669.
25. Безручко Б. П., Гуляев Ю. В. и др. // ДАН СССР. 1986. Т. 287. N 3. С. 619.
26. Кузнецов С. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. N 7. С. 788.
27. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Сатаев И. Р. // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34. N 4. С. 357.
28. Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Sataev I. R. // Int. J. Bifurc. & Chaos. 1991. V. 1. N 4. P. 839.
29. Безручко Б. П., Гуляев Ю. В. и др. // ДАН СССР. 1990. Т. 314. N 2. С. 3326.
30. Постон Т., Стварт И. Теория катастроф и ее приложения. - М.: Мир. 1980. - 600 с.
31. Кузнецов С. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. N 8. С. 991.
32. Кузнецов С. П. // ЖТФ. 1985. Т. 55. N 9. С. 1830.
33. Кузнецов С. П., Пиковский А. С. Взаимодействие систем со стохастическим поведением. В кн.: Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. - М.: Наука. 1987. - С. 237.
34. Астахов В. В., Безручко Б. П. и др. // ЖТФ. 1990. Т. 60. N 10. С. 19.
35. Fujisaka H., Yamada T. // Progr. Theor. Phys. 1985. V. 74. N 4. P. 917.

36. Кузнецов С. П., Пиковский А. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. N 1. С. 49.
37. Астахов В. В., Безручко Б. П. и др. // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. Вып. 1. С. 37.
38. Кузнецов С. П., Ерастова Е. Н. // ЖТФ. 1991. Т. 61. N 2. С. 13.
39. Kaneko K. // Progr. Theor. Phys. 1983. V. 69. N 5. P. 1427.
40. Froyland J. // Physica. 1983. V. 8D. P. 423.
41. Yuan Jian-Min, Tung Mingwei et al. Phys. Rev. 1983. V. 28A. N 3. P. 1662.
42. Астахов В. В., Безручко Б. П. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. N 5. С. 627.
43. Астахов В. В., Безручко Б. П. и др. // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. Вып. 3. С. 60.
44. King R., Barchas J.D., Huberman B. Theoretical psychopathology: An application of dynamical system theory to human behaviour. In book: Sinergetics of the Brain. - Springer-Verlag. 1983. P. 352.
45. Hogg T., Huberman B.A. // Phys. Rev. 1984. V. 29A. N1. P. 275.
46. Buskirk R.V., Jeffrits C. // Phys. Rev. 1985. V. A31. N 5. P. 3332.
47. Анищенко В. С., Лечфорд Т. Е., Сафонова М. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. N 5. С. 565.
48. Pikovsky A.S. // Z. Phys. B. 1984. V. 55. P. 149.
49. Metzler W., Beau W. et al. // Z. Naturforsch. 1987. V. 42A. P. 310.
50. Schult R.L., Creamer D.B. et al. // Phys. Rev. 1987. V. A35. N 7. P. 3115.
51. Кузнецов С. П. // Письма в ЖТФ. 1983. Т. 9. Вып. 2. С. 94.
52. Кузнецов С. П. // Изв. вузов. Физика. 1984. Т. 27. N 6. С. 87.
53. Kook H., Ling F.N., Schmidt G. Universal behavior of coupled nonlinear systems. Preprint. Stevens Inst. of Technology. 1990. 32 p.
54. Kaneko K. // Physica. 1989. V. D34. N 1-2. P. 1.
55. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34. N 2. С. 142.
56. Keeler J.D., Farmer J.D. // Physica. 1986. V. D23. P. 413.
57. Kaneko K. // Physica. 1989. V. D37. P. 60.
58. Waller I., Kapral R. // Phys. Rev. 1984. V. A30. N4. P. 2047.
59. Kaneko K. // Progr. Theor. Phys. 1984. V. 72. N 3. P. 480.
60. Crutchfield J.P., Kaneko K. Phenomenology of Spatio-Temporal Chaos. In book: Directions in Chaos, ed. by Hao Bai-lin, World Scientific Publ. - Co. Singapore, 1987. - P. 272.
61. Кузнецов С. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. N 11. С. 1364.
62. Кузнецов С. П., Пиковский А. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. N 3. С. 308.
63. Kuznetsov S.P., Pikovsky A.S. // Physica. 1986. V.1 9D. N 3. P. 384.
64. Кузнецов С. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. N 8. С. 888.
65. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. In "Nonlinear World. Proc. IV Int. Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics." - Kiev: Naukova Dumka, 1989. V. 2.- P. 383.
66. Kaneko K. Simulating physics with coupled map lattices. In "Formation, Dynamics and Statistics of Patterns", eds. Kaneko K. et al. World Sci., 1990.
67. Анисимова Ю. В., Дмитриев А. С. и др. // Письма в ЖТФ. 1983. Т. 37. N 8. С. 387.
68. Дмитриев А. С., Кислов В. Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. - М.: Наука. 1989. - 280 с.
69. Анищенко В. С., Постнов Д. Э. // ЖТФ. 1985. Т. 55. N 1. С. 162.

70. Кац В. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. N2. С. 161.
71. Vallee R., Delisle C. // Phys.Rev. 1985. V.31A. N 4. P.2390.
72. Ikeda K., Matsumoto K. // Physica. 1987. V.29D. N 1-2. P.223.
73. Безручко Б. П., Каменский В. Ю. и др. // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. Вып. 11. С. 1014.
74. Kaneko K. // Phys. Lett. 1985. V. A111. N 8. P. 321.
75. Арансон И. С., Рабинович М. И. Ренормгрупповое описание пространственного развития турбулентности. В кн. Совещание "Ренормгруппа-86". - Дубна: Изд. ОИЯИ, 1987. - С. 169.
76. Aranson I.S., Gaponov-Grekhov A.V., Rabinovich M.I. // Physica. 1988. V. D33. P. 1.
77. Афраймович В. С., Веричев Н. Н., Рабинович М. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. N 9. С. 1050.
78. Анищенко В. С., Арансон И. С., и др. // ДАН СССР. 1986. Т. 286. N 5. С. 1120.
79. Kaneko K. // Physica. 1986. V. 23D. P. 436.
80. Kapral R. // Phys.Rev. 1985. V. A31. N 6. P. 3868.
81. Oppo G.-L., Kapral R. // Phys.Rev. 1986. V. 33. N 6. P.4219.
82. Bohr T., Christensen O.B. // Phys. Rev. Lett. 1989. V. 63. N 20. P. 2161.
83. Kaneko K. // Phys.Rev.Lett. 1989. V. 63. N-3. P. 219.
84. Kaneko K. // Physica. 1990. V. 41D.

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники АН СССР Поступила в редакцию
1 июля 1991 г.

CRITICAL DYNAMICS OF COUPLED MAP LATTICES
AT THE ONSET OF CHAOS

Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P.

The review of recent works is presented, covering the field of coupled map lattice approach to the extended systems complex dynamics, the lattice being constructed of the elements demonstrating period doubling scenario of transition to chaos. The systems are considered in increasing complexity order beginning with the individual Feigenbaum's system, then the system of two elements with uni- and bidirectional coupling, one- and two-dimensional lattice models with nearest-neighbour coupling and, finally, the nets in which each element is coupled with all other. All above mentioned classes are discussed in the framework of critical phenomena theory, renormalization group approach, universality and scaling concepts.