

УДК 534.015; 537.86:519

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СТРУКТУРЫ В ДИССИПАТИВНЫХ СРЕДАХ
У ПОРОГА ВОЗНИКНОВЕНИЯ ХАОСА

Л. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов

Исследуются мультистабильные состояния диссипативных решеточных систем у порога возникновения динамического хаоса. Развита классификация возможных пространственных структур, рассмотрены закономерности их сосуществования и формирования.

1. Введение. Исследование решеточных моделей пространственно-развитых систем, построенных из элементов, демонстрирующих сложную динамику и переход к хаосу, позволило пролить свет на многие принципиальные вопросы нелинейной физики (гидродинамическая турбулентность, хаос в системах радиофизики и электроники, нелинейной оптики и др.) [1-4]. С другой стороны, решеточные системы из элементов со сложной динамикой могут создаваться искусственно, например, в радиотехнике или оптике с целью реализации устройств с новыми функциональными возможностями. Как показывает анализ, одним из важных свойств этих систем является то, что вблизи порога возникновения хаоса они демонстрируют огромное многообразие устойчивых состояний, различающихся пространственной структурой. Наличие такой мультистабильности делает системы указанного класса перспективными с точки зрения приложений в целях хранения и обработки информации.

Наиболее простой как с точки зрения динамики, так и с точки зрения практической реализации является решеточная система, составленная из элементов, демонстрирующих переход к хаосу через бифуркации удвоения периода, с диссипативной связью между соседними элементами. В физических приложениях это может быть, например, цепочка нелинейных колебательных контуров под внешним периодическим воздействием. Для описания динамических процессов в данном классе решеточных систем может быть использована универсальная модель

$$u_{n+1,m} = 1 - \lambda[u_{n,m}^2 + \epsilon(u_{n,m-1}^2 - 2u_{n,m}^2 + u_{n,m+1}^2)]. \quad (1)$$

Здесь $u_{n,m}$ - значение динамической переменной в m -м пространственном узле решетки в n -й момент дискретного времени, λ - параметр, управляющий переходом к хаосу, ϵ - параметр связи между соседними подсистемами. Такая модель предложена независимо в работах [1, 5]. Численные расчеты, описанные в [1], продемонстрировали возможность реализации в данной модели доменов, число и размер которых зависят от начальных условий. В работах [5, 6] в рамках ренормгруппового анализа обоснована универсальность модели (1), а также вскрыты скейлинговые закономерности для пространственных структур, формирующихся на пути к хаосу. Настоящая статья посвящена обсуждению взаимосвязи между этими результатами и имеет целью классификацию и дальнейшее изучение пространственных структур, закономерностей их образования и сосуществования.

2. Классификация пространственных структур. В основу классификации пространственных структур в диссипативной среде оказывается возможным положить типы структур, существующих при выключенной связи между пространственными элементами среды (ячейками решетки). Каждая ячейка - это система, демонстрирующая при увеличении параметра λ бифуркации удвоения периода. Выберем сначала λ так, чтобы реализовался цикл периода 2. Тогда каждая ячейка может совершать движение в одной из двух фаз: u_1, u_2, u_1, \dots или u_2, u_1, u_2, \dots . В общем случае среда будет представлять собой совокупность доменов - областей, в пределах которых ячейки колеблются в одной фазе. Будем называть их доменами первого порядка.

Пусть теперь параметр λ таков, что при выключенной связи реализуется цикл периода 4. Элементы цикла u_1, u_2, u_3, u_4 образуют два кластера, о которых будем говорить как о кластерах первого уровня:

$$\boxed{u_3 \quad u_1} \quad \boxed{u_4 \quad u_2}$$

два кластера первого уровня

При этом в один кластер объединяются элементы, ближайšie друг к другу по величине. Для областей среды, в которых мгновенные состояния ячеек относятся к одному и тому же кластеру, сохраним термин домены первого порядка, а области, внутри которых состояния совпадают, назовем доменами второго порядка.

Перейдем теперь к циклу периода 8. Его структура представляется так:

два кластера первого уровня

$$\boxed{u_3 \quad u_7} \quad \boxed{u_5 \quad u_1} \quad \boxed{u_4 \quad u_8} \quad \boxed{u_6 \quad u_2}$$

четыре кластера второго уровня

Домены первого и второго порядка определим теперь как области среды, где состояния ячеек попадают в один кластер соответственно первого или второго уровня, а домены третьего порядка - как области, где состояния совпадают.

При дальнейших удвоениях периода принцип классификации сохраняется. Для цикла периода 2^p элементы $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{2^p}$ распределены по кластерам уровней $i = 1, \dots, p-1$. Имеется 2^i кластеров i -го уровня. Каждый такой кластер содержит элементы цикла с номерами, отличающимися на 2^{i-1} . Домены, внутри которых состояния ячеек среди относятся к одному кластеру i -го уровня, - это домены i -го порядка.

В критической точке $\lambda_c = 1,401155$ аттрактор индивидуального отображения принимает вид канторова множества, а в протяженной среде могут быть реализованы домены произвольного порядка.

При включении диссипативной связи между ячейками среды возможность существования доменных структур сохраняется, но накладываются ограничения на минимальный пространственный размер доменов, тем более сильные, чем выше порядок доменов.

На рис. 1 (см. на вклейке) приведен пример диаграммы координата - амплитуда, полученной в численном эксперименте с модельной системой (1) при $\varepsilon = 1/3$ со случайными начальными условиями и с граничными условиями типа свободных концов

$$u_{n,0} = u_{n,-1}, \quad u_{n,L} = u_{n,L+1} \quad (2)$$

обеспечивающими симметричное продолжение решения влево и вправо за пределы рассматриваемого интервала. На диаграмме по горизонтальной оси отложена пространственная координата m , а по вертикали — значения динамической переменной u , принимаемые в различные моменты времени. Здесь можно видеть семь доменов первого порядка. Внутри самого протяженного из них имеется два домена второго порядка, один из которых, в свою очередь, содержит два домена третьего порядка.

В закритической области параметра λ в точечной системе наблюдается, как известно, обратная последовательность слияния полос аттрактора. При этом в среде последовательно аннулируется возможность существования доменов сначала высокого, а затем все более низкого порядка.

3. Скейлинг пространственных структур. Исходя из развитого в работах [3-6] ренормгруппового анализа, можно утверждать, что рассматриваемые пространственные структуры должны обладать определенными свойствами подобия или скейлинга. В частности, структура доменной стенки, разделяющей два домена порядка p , должна приобретать при больших p универсальный вид, а ширина ее увеличиваться пропорционально $2^{p/2}$. Грубо это можно усмотреть уже из рис. 1, сравнивая конфигурацию присутствующих там доменных стенок различного порядка. Специальные численные расчеты позволяют подтвердить данное свойство с высокой точностью. Для этого задаются начальные условия, из которых возникает конфигурация, имеющая в центре рассматриваемого участка решетки доменную стенку порядка $p = 1, 2, 3, \dots$. Выбирая значения параметра λ по правилу

$$\lambda_p = \lambda_c + (\lambda_{p-1} - \lambda_c) / \delta, \quad (3)$$

где $\delta = 4,6692$, сопоставляем для разных p конфигурации, установившиеся после достаточно большого числа предварительных итераций. Оказывается, что, будучи представлены в скейлинговых переменных $m \cdot 2^{-p/2}$, $u \cdot a^p$, $a = -2,5029$, они хорошо совпадают уже при $p \geq 2$.

Свойство скейлинга позволяет также предложить оценочное соотношение, определяющее ограничение на размер домена порядка p : $l \approx 2^{p/2} \epsilon^{1/2}$.

Численные расчеты показывают, что если в среде образована доменная структура, то динамика внутри каждого домена в высокой степени независима от динамики внутри других доменов. При этом характер динамики внутри доменов определяется двумя параметрами: λ и размером домена L . Для однодоменных состояний конечного участка среды это утверждение было высказано и проверено с высокой точностью в работах [3,5]. Оказывается, что вид карты динамических режимов на плоскости параметров (L, λ) является универсальным и не зависит от конкретного выбора модели и типа локальных неоднородностей на концах системы; в частности, это могут быть и доменные стенки. Для доменов высших порядков карта динамических режимов получается преобразованием подобия с пересчетом масштабов по вертикальной оси в δ^{p-1} раз и по горизонтальной оси в $2^{-(p-1)/2}$ раз.

Согласно [3,5], переход к хаосу внутри домена при увеличении параметра λ происходит через последовательность бифуркаций удвоения временного периода. При этом бифуркационные значения параметра λ возрастают при уменьшении размера домена.

Скейлинговые свойства присущи и хаотическим режимам динамики среды. Верхние диаграммы на рис. 2 демонстрируют пространственно-временной хаос при значениях параметра, отвечающих слиянию полос в

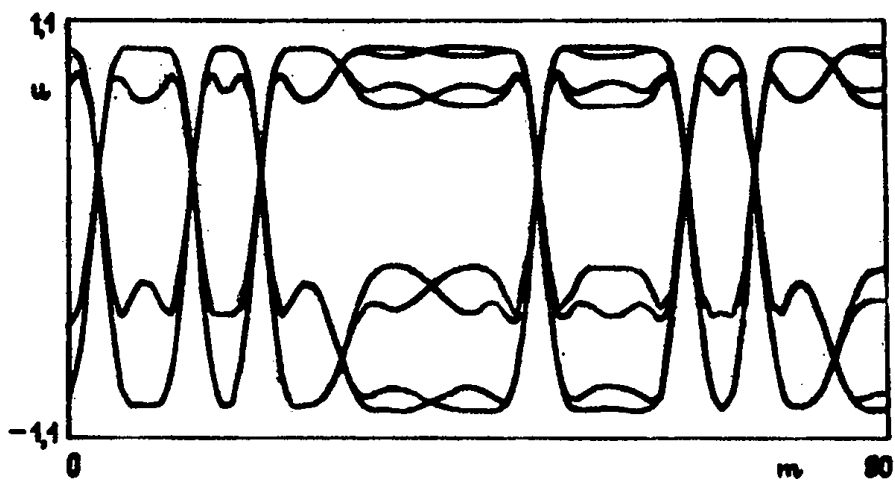


Рис. 1.

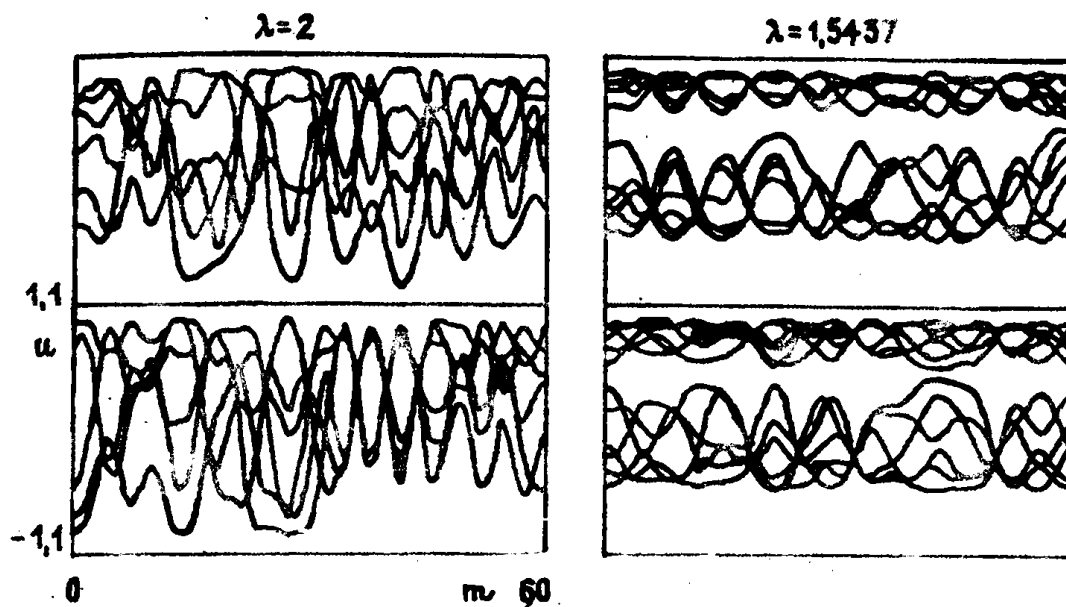


Рис. 2.

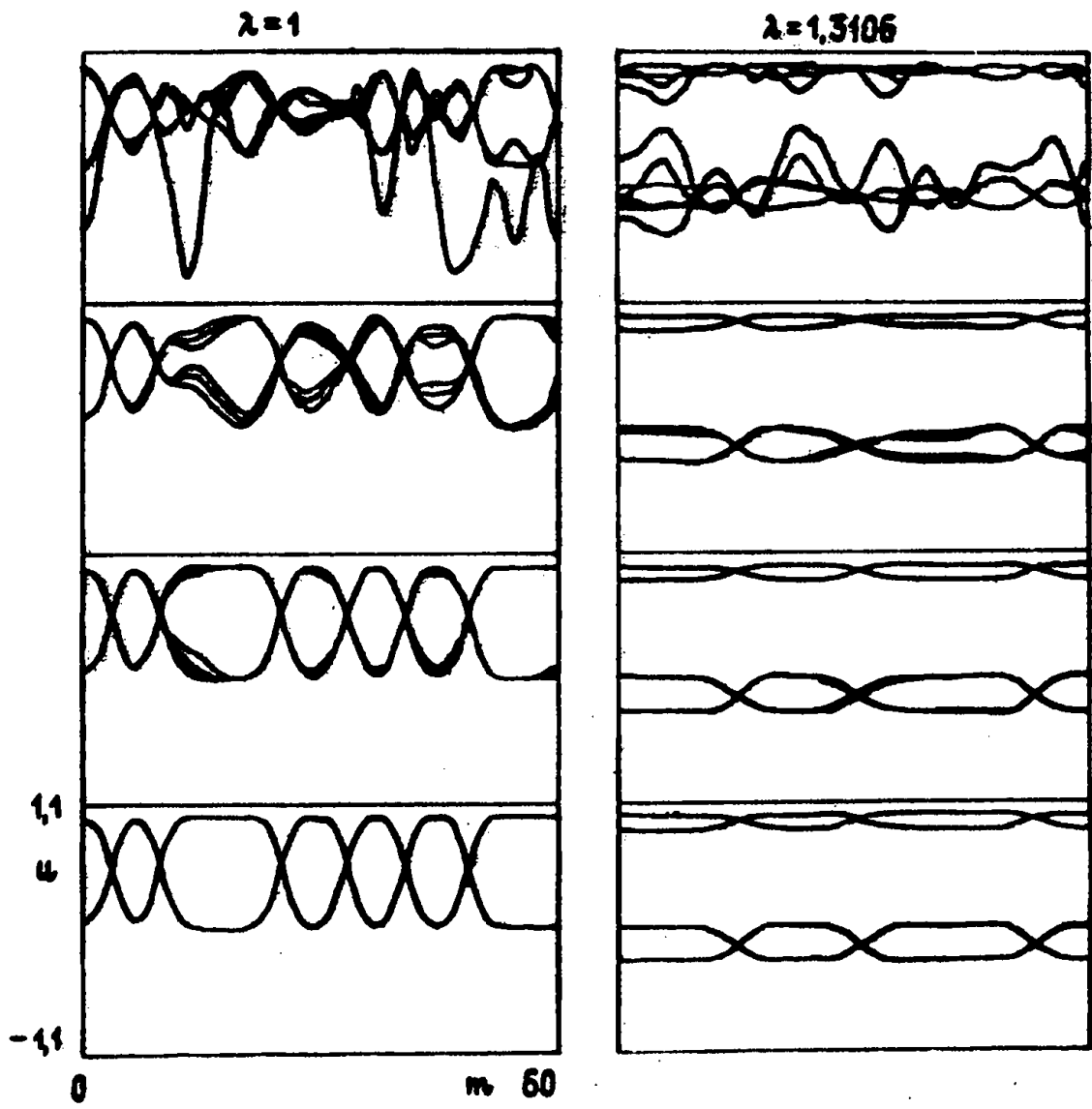


Рис. 2.

точечной системе: $\lambda = 2$ и $\lambda = 1,5437$. Начальным условием служило почти однородное состояние с малыми случайными возмущениями. На каждой картинке приводятся конфигурации соответственно для 6 и 12 последовательных моментов времени после достаточно большого числа предварительных итераций, чтобы режим установился в статистическом смысле. Рассматриваемые динамические режимы должны быть подобными с точки зрения их статистических характеристик: по правилу скейлинга характерный пространственный масштаб во втором случае должен возрасти в $2^{1/2}$ раза, а характерный масштаб изменения динамической переменной уменьшиться в α раз. На "глазомерном" уровне это подтверждается рассматриваемыми диаграммами.

Один из возможных способов количественной проверки скейлинга хаотических состояний основан на сопоставлении ляпуновских показателей при значениях параметра λ , связанных по правилу (3). Например, наибольший ляпуновский показатель в системе достаточно большой длины должен вести себя как $\Lambda \sim \epsilon^P$. В табл. 1 представлены результаты расчета этого показателя для модели (1) при $\epsilon = 1/3$ с граничными условиями (2). Длина системы $L = 60$, значения параметра λ соответствуют точкам слияния полос аттрактора индивидуального отображения, начальные условия - почти однородные состояния с малым шумовым возмущением. После достаточно большого числа предварительных итераций для каждого значения λ_p производилось семикратное вычисление наибольшего ляпуновского показателя. Каждый раз производилось N_p совместных итераций уравнения (3) и соответствующего уравнения в вариациях. Полученные данные обрабатывались по стандартной методике и определялись средние значения Λ и 95-процентные доверительные интервалы, приведенные в таблице. Сравнивая величины $\Lambda 2^P$ в четвертом столбце таблицы, можно видеть, что они согласуются в пределах точности оценки.

В работе [7] были подтверждены численно скейлинговые свойства пространственной корреляционной функции и пространственного спектра хаотических состояний, реализующихся в точках слияния полос λ_p .

4. Образование пространственных структур при мгновенном переключении управляющего параметра. Показанные на рис. 2 сверху состояния не содержат перепадов между различными полосами аттрактора, т.е. являются однодоменными. В них, однако, благодаря хаосу непрерывно возникают и исчезают пространственные структуры с определенным характерным пространственным масштабом - радиусом корреляции $r_{\text{хар}}$ и определенной характерной амплитудой $u_{\text{хар}}$. Согласно результатам ренормгруппового анализа [3] эти величины оцениваются как

$$r_{\text{хар}} = (\lambda - \lambda_c)^{-\log 2 / 2 \log \delta}, \quad u_{\text{хар}} = (\lambda - \lambda_c)^{\log |\alpha| / \log \delta}.$$

Таблица 1

Наибольший ляпуновский показатель Λ в пространственно протяженной системе (1)

P	λ_p	N_p	Λ	$\Lambda \cdot 2^P$
0	2	480	0,387 ± 0,020	0,387 ± 0,020
1	1,543689	960	0,202 ± 0,005	0,404 ± 0,010
2	1,430357	1920	0,0997 ± 0,0024	0,399 ± 0,010
3	1,407405	2560	0,0519 ± 0,0016	0,415 ± 0,013
4	1,4024922	5120	0,0256 ± 0,0009	0,410 ± 0,015

Предположим теперь, что мы мгновенно переключаем параметр λ из закритической в докритическую область. В результате в среде может возникнуть доменная структура. При этом если переключение

осуществляется из однодоменного состояния, отвечающего 2^p -полосному аттрактору, то могут возникнуть домены порядка не меньше $p + 1$. Характерный пространственный масштаб этих доменов определяется радиусом корреляции исходного состояния, и тем больше, чем оно ближе к критической точке.

Нижние диаграммы на рис. 2 иллюстрируют процесс формирования доменных структур при мгновенном переключении параметра от 2 до 1 (а) и от 1,5437 до 1,3106 (б). В рассмотренных примерах возникают пространственные структуры, содержащие, соответственно, семь доменов первого порядка (а) и четыре домена второго порядка (б) различной протяженности. В других реализациях возникали иные конфигурации доменных структур.

Мы полагаем, что рассмотренный механизм формирования пространственных структур представляет интерес, во-первых, как способ приготовления, например, в эксперименте, различных пространственных структур в отсутствие контроля начальных условий, во-вторых, как метод своего рода мгновенного замораживания хаотической структуры для изучения пространственных статистических свойств, в-третьих, как практически реализуемый способ приготовления случайных состояний (своего рода датчик случайных чисел).

Исследования и продемонстрированы в численном эксперименте основные свойства пространственных структур, реализующихся у порога возникновения хаоса в одномерной решеточной модели среды, построенной из систем Фейгенбаума. Дана классификация этих структур и рассмотрены закономерности их возникновения и сосуществования, в том числе скейлинг доменных стенок. Качественно проиллюстрирован скейлинг хаотических состояний среды в закритической области, изучен эффект формирования доменных структур при мгновенном переключении управляющего параметра и указаны возможности его использования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канеко К. // Progr. Theor. Phys. 1984. V. 72. N 3. P. 480.
2. Анищенко В. С., Арансон И. С. и др. // ДАН СССР. 1986. Т. 286. N 5. С. 1120.
3. Кузнецов С. П., Пиковский А. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. N 3. С. 308.
4. Ikeda K., Matsumoto K. // Physica. 1987. V. D29. N 1-2. P. 223.
5. Кузнецов С. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. N 11. С. 1364.
6. Кузнецов С. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. N 8. С. 888.
7. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. In: Nonlinear World. Proc. IV. Int. Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics. - Kiev, Naukova Dumka. 1989. V. 2. P. 383.

Саратовский филиал Института
радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
15 сентября 1989 г.

SPATIAL PATTERS IN DISSIPATIVE MEDIA NEAR ONSET OF CHAOS

A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov

The multistability of dissipative lattice systems is investigated near the onset of chaos. The classification of different spatial patterns is developed and laws of its coexistence and formation are considered. Scaling properties of patterns are illustrated by a number of spatial-temporal diagrams.