

Динамический хаос в радиофизике и электронике

УДК 621.373.1

© 1994 г. А. П. Кузнецов, И. Р. Сатаев

ОСОБЕННОСТИ ПЕРЕХОДА К ХАОСУ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ ОДНОМЕРНЫМИ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

Для нелинейных систем, описываемых одномерными отображениями, показано, что на плоскости параметров линия перехода к хаосу может обрываться в некоторых трикритических точках. Вблизи этих точек плоскость параметров устроена универсальным образом. В качестве примеров рассмотрены отображение окружности, электронная система Чуа и логистическое отображение под действием внешнего сигнала.

Переход к хаосу через удвоения периода является одним из типичных сценариев, обнаруженных в огромном количестве реальных нелинейных систем, в том числе и в электронных устройствах [1—4]. Если численно или экспериментально построить отображение первого возвращения (сечение Пуанкаре) для таких систем, то «портрет» динамического режима будет напоминать квадратичную параболу. Любое отображение вида

$$(1) \quad x_{n+1} = f_{\lambda}(x_n),$$

где функция $f(x)$ характеризуется единственным квадратичным экстремумом, кривизна которого зависит от параметра λ , демонстрирует при изменении величины λ переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода.

В реальных экспериментах, однако, часто приходится иметь дело с ситуациями, когда нелинейная система характеризуется наличием двух существенных управляющих параметров. (Например, для нелинейного контура под периодическим воздействием в эксперименте естественно регулировать и амплитуду, и частоту воздействия.) В сечении Пуанкаре тогда может реализоваться картина, описываемая функцией $f_{\lambda\mu}(x)$, характеризующейся двумя квадратичными экстремумами x_1 и x_2 :

$$(2) \quad f(x) = f(x_1) + c_1(x - x_1)^2 + \dots, f(x) = f(x_2) + c_2(x - x_2)^2 + \dots$$

(Как говорят, отображение $x_{n+1} = f_{\lambda\mu}(x_n)$ относится к классу бимодальных [5—8].) Варьируя параметры λ и μ , можно управлять взаимным расположением этих экстремумов и добиться ситуации, когда один экстремум точно отображается во второй: $x_2 = f(x_1)$. Это условие задает некоторую линию на плоскости параметров. Будем двигаться вдоль этой линии, варьируя оставшийся параметр. Выполним отображение в окрестности точки x_1 2 раза:

$$(3) \quad f(f(x)) = f(f(x_1) + c_1(x - x_1)^2) = f(f(x_1)) + c_2 c_1^2 (x - x_1)^4 + \dots$$

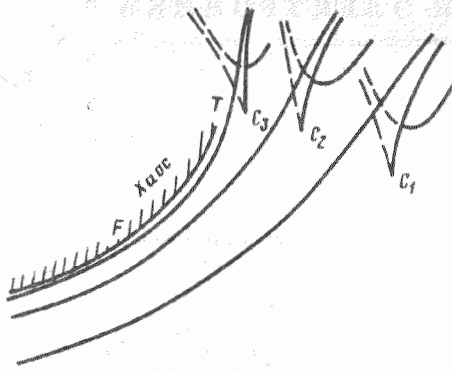


Рис. 1. Качественная картина мелкомасштабной структуры плоскости параметров в окрестности трикритической точки T . F — фейгенбаумовская критическая линия, являющаяся границей хаоса, c_n — последовательность точек сборки, накапливающихся к трикритической точке

Таким образом, оператор эволюции за удвоенный интервал содержит лишь член четвертой степени, квадратичный член отсутствует. Разумно предположить, что, изменяя параметр, отсчитываемый вдоль выбранной линии, можно наблюдать динамику, характерную для отображения $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^4$. Такое отображение также демонстрирует каскад бифуркаций удвоения периода [3, 4, 9], завершающийся переходом к хаосу, однако константа скейлинга $\delta = 7,28468$ уже не равна «классическому» значению $\delta_F = 4,669$, полученному Фейгенбаумом. Следовательно, на плоскости параметров должна существовать критическая точка с новыми скейлинговыми свойствами. Такие точки впервые были обнаружены Чангом, Вортисом и Райтом в отображении

$$(4) \quad x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - bx_n^4$$

и названы трикритическими [10].

Для отображения Чанга, Вортиса, Райта (4) линии бифуркаций удвоения периода в некоторых областях плоскости a, b накапливаются к критическим линиям F , являющимся границами хаоса, причем характер сходимости соответствует фейгенбаумовскому однопараметрическому скейлингу с универсальной константой δ_F . Вне этих областей линии удвоений расходятся по берегам различных линий складок, на которых происходят жесткие переходы, а фейгенбаумовские критические линии оканчиваются в трикритических точках. Как показывают ренормгрупповой анализ [10] и компьютерное моделирование, в окрестности каждой трикритической точки реализуется сложное самоподобное устройство плоскости параметров (рис. 1), причем масштабные константы скейлинга $\delta_1 = 2,857124135$ и $\delta_2 = 7,284686217$. Вдоль первого собственного направления к трикритической точке подходит фейгенбаумовская критическая линия F , а с противоположной стороны накапливаются точки сборки 2^n циклов возрастающих периодов, в которых сходятся линии жестких переходов. Вдоль второго собственного направления через трикритическую точку проходит линия, на которой реализуется ситуация отображения «экстремум в экстремум». На этой линии можно обнаружить накапливающуюся к трикритической точке последовательность сверхустойчивых циклов, обладающих двойной устойчивостью и опирающихся одновременно на два квадратичных экстремума функции $f(x)$. Устройство плоскости параметров в окрестности трикритических точек универсально, т. е. одинаково для всех двухпараметрических бимодальных отображений. Это обстоятельство существенно, поскольку оно облегчает исследование конкретных двухпараметрических нелинейных систем, описываемых одномерными отображениями.

Свойство универсальности позволяет рекомендовать один из двух алгоритмов поиска трикритических точек на плоскости параметров. В первом случае необходимо найти линию, вдоль которой один квадратичный экстремум функции отображается точно во второй. Двигаясь вдоль этой линии, нужно найти точки,

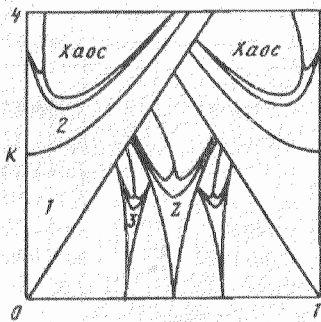


Рис. 2. «Языки» синхронизации для отображения окружности

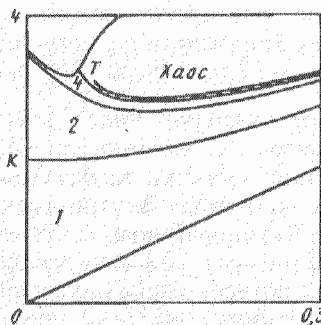


Рис. 3. Трикритический аттрактор для отображения окружности на диаграмме Ламерея

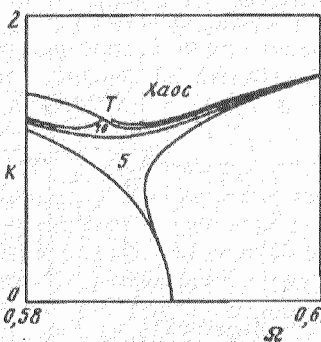


Рис. 2

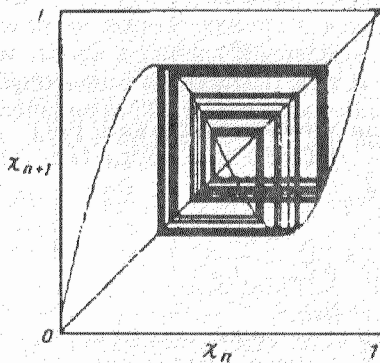


Рис. 3

в которых мультипликатор 2^n цикла равен универсальному значению $\mu_T = -2,0509404903$. (Оно не равно фейгенбаумовскому $\mu_F = -1,601192$.) Во втором случае на плоскости параметров определяются точки, в которых мультипликаторы 2^n и 2^{n+1} циклов равны универсальному значению μ_T . При $n \rightarrow \infty$ построенные последовательности имеют пределом трикритическую точку.

Обратимся теперь к примерам. Сначала рассмотрим стандартное отображение окружности, которое может быть получено для подталкиваемого ротатора, автогенератора при наличии периодического внешнего сигнала и ряда других нелинейных колебательных систем в приближении сильной диссипации [1—4]:

$$(5) \quad x_{n+1} = x_n + \Omega + \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi x_n, \pmod{i}$$

здесь K — нормированная амплитуда воздействия, Ω — параметр, определяемый соотношением собственной частоты и частоты внешнего воздействия. На рис. 2

2^k	Точки сборки Ω, K		Точки сверхустойчивых циклов, Ω, K	
4	0,0544831	3,1735292	0,0576731	2,9949830
8	0,0646675	3,1188523	0,0667222	3,0636118
16	0,0671344	3,0914833	0,0679901	3,0731748
32	0,0678475	3,0807656	0,0681649	3,0744919
64	0,0680755	3,0768515	0,0681889	3,0746728
128	0,0681522	3,0754580	0,0681922	3,0746977
∞	0,0681926	3,0747016	0,0681926	3,0747016

показана плоскость параметров Ω, K . На этой плоскости можно видеть характерные языки синхронизации, соответствующие движениям с рациональным числом вращения $\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n/n) = p/q$, где p и q — целые числа. На рисунке

показаны пять самых широких «языков», которым отвечают числа вращения $\omega = 0, 1/2, 1/2, 2/3, 1/2$. На самом деле число «языков» бесконечно; из каждого рационального числа оси Ω выходит соответствующий «язык». Между языками реализуются режимы с иррациональными числами вращения. Внутри «языков», как известно, наблюдается каскад удвоений периода. Двухпараметрический анализ вскрывает более тонкую картину внутреннего устройства каждого языка. На среднем рисунке показан в увеличенном виде «язык» синхронизации, отвечающий $\omega = 0$, а на нижнем — $\omega = 3/5$. Характерно наличие линий жестких переходов, сходящихся в точки сборки на базе циклов периода $2^m p$, специфический обрыв фейгенбаумовской границы хаоса, иерархия точек сборки, сходящихся к точке обрыва и т. д. Используя описанный алгоритм, можно найти точное положение трикритических точек. Трикритические точки, показанные на рисунке, имеют координаты T_1 : $\Omega = 0,06819274, K = 3,07470159$ и T_2 : $\Omega = 0,59245110, K = 1,24126982$.

Собственные направления скейлинга на плоскости параметров Ω, K могут быть найдены численно, для точки T_1 они задаются векторами с координатами $(-0, 0528631, 1)$ и $(0, 1326993, 1)$. В таблице даны сходящиеся к трикритической точке T_1 соответственно вдоль первого и второго собственных направлений последовательности точек сборки 2^n -циклов и сверхустойчивых 2^n -циклов, опирающихся одновременно на два экстремума функции

$$f(x) = x + \Omega + \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi x.$$

Трикритический аттрактор на диаграмме Ламерея показан на рис. 3. Видно, что в критической ситуации изображающая точка последовательно посещает окрестности двух экстремумов, причем первый экстремум точно отражается во второй.

На рис. 4 вверху показан спектр колебаний для отображения окружности в трикритической точке T_1 .

Отображение окружности считается «эталонной» моделью для описания феноменов синхронизации автоколебаний при внешнем воздействии. Поэтому утверждение относительно характерного двухпараметрического устройства «языков» синхронизации имеет важное значение для всего этого класса систем. На существование трикритических точек в отображении (5) указали Шелл, Фразер и Капрал [7, 8]. Их исследование основано на изящной процедуре построения бинарного дерева сверхустойчивых орбит. Развитие этих представлений приводит к математической проблеме о границе «топологического хаоса» [11]. Здесь приведены иллюстрации, ориентированные на экспериментальные исследования и компьютерное моделирование и отсутствующие в [7, 8, 11].

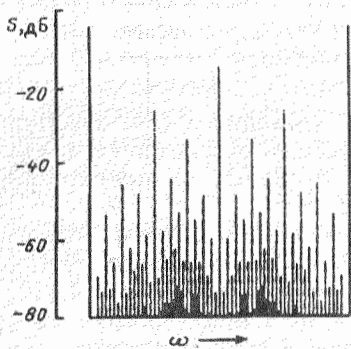


Рис. 4. Спектры колебаний в трикритических точках для отображения окружности, системы Чуа и отображения четвертой степени

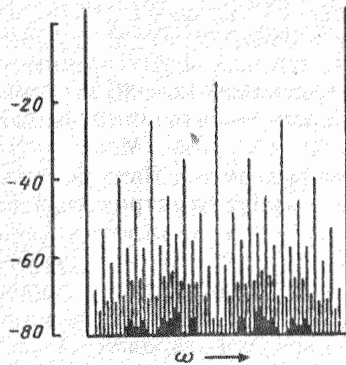


Рис. 5. Трикритический аттрактор для системы Чуа на диаграмме Ламерея

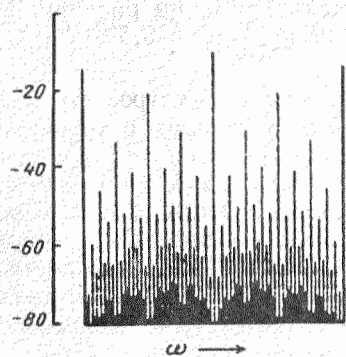


Рис. 4

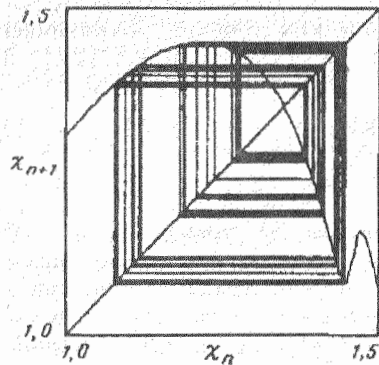


Рис. 5

Еще один пример — система Чуа («double scroll» system) [12, 13]. Это простое электронное устройство, содержащее линейные элементы: один резистор, одну индуктивность и две емкости, а также нелинейный элемент с кусочно-линейной вольт-амперной характеристикой. Нелинейный элемент может быть сконструирован несколькими способами, например из двух транзисторов и двух диодов. Система Чуа хорошо изучена, для нее имеется как строгое математическое доказательство существования хаоса, так и экспериментальные и компьютерные результаты. Она описывается системой трех дифференциальных уравнений:

$$(6) \quad \dot{x} = \alpha (y - h(x)), \quad \dot{y} = x - y + z, \quad \dot{z} = \beta y.$$

Здесь α , β — параметры, $h(x)$ — кусочно-линейная функция следующего вида

$$(7) \quad h(x) = \begin{cases} (2x + 3)/7, & x \geq 1, \\ -x/7, & |x| \leq 1, \\ (2x + 3)/7, & x \leq -1. \end{cases}$$

При некоторых предположениях система (6) приводит в сечении Пуанкаре к одномерному отображению [13]. Это одномерное отображение достаточно громоздко и получается лишь в параметрической форме, но принципиальную роль играет сам факт его существования.

Варьируя параметры α , β , можно добиться реализации условия отображения экстремум в экстремум. Двигаясь вдоль соответствующих линий, приходим в трикритические точки. Укажем одну из них: $\alpha = 3,42646401$, $\beta = 4,11924613$. Трикритический аттрактор системы Чуа на диаграмме Ламерея показан на рис. 5. На рис. 4 в середине представлен спектр колебаний в трикритической точке для системы Чуа (6), а внизу — для простейшего отображения четвертой степени $x_{n+1} = 1 - bx_n^4$. Вид спектров качественно совпадает, что свидетельствует в пользу гипотезы универсальности. Отметим, что средний перепад между уровнями субгармоник в спектре в трикритическом состоянии составляет 10,4 дБ и отличается от известного значения 13,4 дБ, характеризующего классический каскад бифуркаций удвоения.

Еще один пример системы, демонстрирующей трикритическую динамику — это логистическое отображение под периодическим воздействием. В случае периода 2 имеем:

$$(8) \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2, \\ x_{n+2} &= 1 - \mu x_{n+1}^2. \end{aligned}$$

Выполним отображение (8) дважды:

$$(9) \quad x_{n+2} = 1 - \mu + 2\lambda\mu x_n^2 - \lambda^2\mu x_n^4.$$

Заменой переменной $X \rightarrow x(1 - \mu)$ и параметров

$$(10) \quad a = -2(1 - \mu)\lambda\mu, \quad b = \lambda^2\mu(1 - \mu)^3$$

соотношение (9) приводится к отображению Чанга, Вортиса, Райта. Поэтому трикритические точки можно найти с помощью простого пересчета. Например, трикритическая точка с координатами $(-2,81403, 1,40701)$ на плоскости a, b располагается на плоскости λ, μ в точке $(5,79372, 0,58455)$. В случае воздействий с другими периодами такая замена переменной и параметров, разумеется, не работает. Однако трикритические точки по-прежнему существуют [14].

Поскольку логистическое отображение является эталонной моделью при описании перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения, то разумно ожидать, что трикритическая динамика может наблюдаться в любой нелинейной системе, демонстрирующей такой переход на плоскости параметр нелинейности — амплитуда воздействия. Необходимо лишь, чтобы нелинейная система достаточно хорошо описывалась одномерным отображением. В качестве возможного варианта укажем на систему двух односторонне связанных возбуждаемых контуров с нелинейными диодами [15]. В каждом отдельном контуре наблюдается фейгенбаумовский каскад удвоений, причем в качестве параметра нелинейности выступает амплитуда возбуждения. Когда в первом контуре реализуется периодический режим, то на плоскости величина связи — параметр нелинейности второго контура в [15] экспериментально обнаружен характерный «обрыв» фейгенбаумовской линии, являющейся границей хаоса. Окрестность точки «обрыва» характеризуется наличием жестких переходов. По-видимому, в этой точке реализуется трикритическая динамика. Чтобы убедиться в этом, необходимо провести экспериментальное исследование отображения первого возвращения (реализуется

ли ситуация отображения «экстремум в экстремум») и спектра колебаний в этой точке (характерный вид спектра и перепад между субгармониками 10,4 дБ).

Таким образом, исследование динамических режимов нелинейных систем на плоскости параметров обнаруживает специфическую критическую точку, характеризующуюся универсальным мелкомасштабным устройством плоскости параметров с определенными законами самоподобия, характерным спектром колебаний и т. д. Этот факт необходимо учитывать при изучении границы хаотических состояний на плоскости параметров реальных нелинейных систем, описываемых одномерными отображениями. Мы надеемся, что настоящее сообщение стимулирует экспериментальные исследования трикритической ситуации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мун Ф. Хаотические колебания. М.: Мир, 1990.
2. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.
3. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
4. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
5. McKay R. S., Tresser C. // *Physica*. 1987. V. 27D. P. 412.
6. Fraser S., Kapral R. // *Phys. Rev.* 1982. V. A-25. P. 3223.
7. Schell M., Fraser S., Kapral R. // *Phys. Rev.* 1983. V. A-28. P. 373.
8. Fraser S., Kapral R. // *Phys. Rev.* 1984. V. A-30. P. 1017.
9. Hu B., Sattia I. I. // *Phys. Rev.* 1983. V. A-98. P. 143.
10. Chang S. J., Wortis M., Wright J. A. // *Phys. Rev.* 1981. V. A-24. № 5. P. 2669.
11. McKay R., Tresser C. // *J. London Math. Soc.* 1988. V. 37. P. 164.
12. Хаотические системы // ТИИЭР. 1987. Т. 75. № 8. С. 4.
13. Chua L., Komuro M., Matsumoto T. // *IEEE Trans.* 1986. V. CAS-33. № 11. P. 1073.
14. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Стаев И. В. // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1991. Т. 34. № 4. С. 357.
15. Безручко Б. П., Пудовочкин О. Е. // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1992. Т. 35. № 1. С. 39.

Поступила в редакцию
23.11.92