



ФРАКТАЛЬНЫЙ СИГНАЛ И ДИНАМИКА СИСТЕМ, ДЕМОНСТРИРУЮЩИХ УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА

А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев

Модель фрактального сигнала, возникающая при обходе по определенному правилу элементов двухмасштабного канторова множества, при надлежащем выборе двух параметров a и b дает возможность удовлетворительно описывать многие типы динамики, возникающие в одномерных и двумерных отображениях при переходе к хаосу. Указано расположение соответствующих этим типам поведения точек на плоскости параметров фрактального сигнала. Описана простая схема, допускающая экспериментальную реализацию и позволяющая генерировать фрактальный сигнал с регулируемыми свойствами. Развита ренормгрупповой анализ задачи о воздействии фрактального сигнала на систему, демонстрирующую каскад удвоений периода. При изменении параметров фрактального сигнала происходит бифуркация в уравнении ренормгруппы, так что поведение на пороге хаоса может описываться фейгенбаумовской или нефейгенбаумовской неподвижной точкой этого уравнения. Приводятся численные результаты, иллюстрирующие скейлинговые свойства динамики под действием фрактального сигнала.

Введение

Зачастую в природе и технике приходится сталкиваться с сигналами, имеющими фрактальную природу в том смысле, что в них можно выделить структурные элементы с различными масштабами времени и амплитуды, причем какой бы масштаб мы ни выбрали, обнаруживается определенное подобие в построении сигнала из соответствующих структурных элементов. Один из примеров фрактального сигнала - это последовательность данных, поступающих с регистрирующего датчика в гидродинамическом турбулентном потоке [1]. Другим примером может служить $1/f$ - шум: известна трактовка, объясняющая его генерацию наличием иерархии релаксационных процессов с широким диапазоном характерных времен [2]. По-видимому, тексты на естественных языках могут также моделироваться посредством фрактальных сигналов, поскольку в них очевидным образом можно выделить иерархию структурных элементов (буква-слово-предложение-абзац- ...) [3].

Поиск и исследование фрактальных сигналов, построение их моделей, анализ воздействия на нелинейный системы, рассмотрение возможностей использования фрактальных сигналов в целях обработки и кодирования информации составляют обширное и заслуживающее детальной проработки направление исследований.

В этой статье мы сосредоточим внимание на фрактальных сигналах, которые генерируются нелинейными системами на пороге возникновения хаоса. Известно,

что такие сигналы демонстрируют универсальный характер присущих количественных закономерностей скейлинга, допускают далеко идущий теоретический анализ и технически несложную реализацию в эксперименте.

Мы ограничимся обсуждением таких фрактальных сигналов, для которых соотношения подобия (скейлинга) проявляются при удвоении характерного временного масштаба, и будем иметь дело только с сигналами, заданными в дискретном времени (временными рядами). Мы вводим простую модель фрактального сигнала, которая возникает при обходе по определенным правилам элементов двухмасштабного канторова множества (см. также [4-6]). Будет показано, что эта модель, содержащая два свободных параметра, позволяет хорошо описывать целый ряд различных типов поведения при переходе к хаосу через удвоения периода и отвечающих разным классам количественной универсальности. Будет рассмотрена также задача о воздействии фрактального сигнала на систему, демонстрирующую удвоения периода. Оказывается, что в зависимости от параметров фрактального сигнала возможны ситуации, когда он влияет или не влияет на фрактальные свойства динамики на пороге возникновения хаоса, причем наличие или отсутствие такого влияния в широких пределах не зависит от интенсивности воздействия.

1. Фейгенбаумовский аттрактор и модель фрактального сигнала

Как известно, один из самых распространенных сценариев перехода к хаосу в нелинейных диссипативных системах при изменении управляющего параметра - это каскад бифуркаций удвоения периода, подчиняющийся универсальным закономерностям Фейгенбаума [7-9]. В логистическом отображении с параметром λ

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 \quad (1)$$

порогом возникновения хаоса служит критическая точка $\lambda = \lambda_c = 1.401155\dots$ - предельная точка накопления бифуркаций удвоения периода. В этой точке аттрактором системы является фрактальное множество на оси x - аттрактор Фейгенбаума [2,10] (рис.1).

Его построение осуществляется следующим образом. Начав итерации (1) из точки $x_0 = 0$, получаем последовательность x_1, x_2, x_3, \dots Тогда на k -м шаге построения аттрактор представляется объединением $N = 2^k$ интервалов

$$\bigcup_{i=1}^N [x_i, x_{i+2^k}],$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$. По существу эта процедура аналогична построению канторова множества (ср. рис.1, а и б) с той лишь разницей, что длины интервалов, оставляемых и выбрасываемых на каждом шаге построения, подчиняются более сложным закономерностям. Вблизи точки $x = 0$ структура аттрактора Фейгенбаума локально воспроизводит себя при пересчете масштаба на фактор $\alpha = \alpha_F = -2.502907\dots$, а вблизи $x = 1$ - на фактор α^2 . Оказывается, что хорошую аппроксимацию аттрактора Фейгенбаума можно построить, используя так называемое двухмасштабное канторово множество [2,10] (см. рис.1, в). Задавшись некоторыми константами a и b такими, что $a+b < 1$, на первом шаге построения делим исходный отрезок в отношении $a, 1-a-b, b$, и выбрасываем среднюю треть. На втором шаге и последующих шагах процедура повторяется, причем отрезки различной длины располагаются так, как показано на рисунке. Если положить $a = 1/|\alpha|$, $b = 1/\alpha^2$, то полученное множество очень трудно отличить на глаз от аттрактора Фейгенбаума. Неплохое соответствие обнаруживается и в количественных характеристиках обоих множеств (см. [2]).



Рис.1. Аттрактор Фейгенбаума (а), множество Кантора (б) и двухмасштабное канторово множество (в)

Ясно, что если мы зададим надлежащим образом правило обхода элементов двухмасштабного канторова множества (см. рис.1), то получим модель фрактального сигнала, порождаемого логистическим отображением в критической точке. К этой модели можно прийти и другим путем, используя непосредственно отображение (1) и свойства скейлинга вблизи точек 0 и 1. Построим последовательность w_i , стартующую из $w_0 = 0$, следующим образом. Положим для четных членов

$$w_{2i} = w_i / \alpha, \tag{2}$$

а для нечетных

$$w_{2i+1} = 1 - \lambda_c w_{2i}^2 = 1 - \lambda_c z_i^2 / \alpha^2 = 1 - 1/\alpha^2 + w_{i+1} / \alpha^2. \tag{3}$$

Обозначая $a = 1/\alpha^2$, $b = 1/\alpha$, перепишем (2) и (3) в виде

$$w_{2i-1} = (1 - b) + b w_i, \quad w_{2i} = -a w_i. \tag{4}$$

С помощью этих соотношений всю последовательность w_i можно найти по ее первым двум членам $w_0 = 0$ и $w_1 = 1$.

Если сдвинуть индекс на единицу и положить $w_i = -[(u_{i-1}(a+1)+a)(b-1)/(b+a)]$, то (4) переписывается в форме

$$u_{2i} = b(1 + u_i), \quad u_{2i+1} = -a(1 + u_i), \tag{5}$$

принятой в наших предыдущих статьях [4-6]. Видно, что для самосогласованности при $i = 0$ надо положить $u_0 = b/(1-b)$.

Мы будем придавать соотношению (4) (или (5)) более общее значение, чем просто модели динамики логистического отображения в критической точке. Его можно рассматривать как определение *фрактального сигнала*, зависящего от двух параметров a и b . В разделе 4 мы представим целый ряд конкретных примеров, допускающих описание в терминах этого сигнала.

2. Фрактальный сигнал и его свойства в зависимости от параметров a и b

Как правило, если не оговорено противное, мы будем полагать a и b действительными числами из интервала $[0, 1]$. Если к тому же $a+b < 1$, то взаимное расположение элементов последовательности w_i такое же, как в случае аттрактора Фейгенбаума. Следовательно, при этом остается справедливой интерпретация фрактального сигнала в терминах обхода двухмасштабного канторова множества по тому же самому правилу. Формально уравнения (4) или (5) сохраняют смысл

при любых действительных и комплексных a и b , и такое, более широкое обобщение фрактального сигнала также имеет право на существование и может представлять интерес [11, 12]. Отметим, в частности, что замена a на $-b$ и b на $-a$ определяет сигнал с фрактальными свойствами, аналогичными исходному, но с обратным порядком обхода элементов двухмасштабного канторова множества.

Двухмасштабное канторово множество - традиционный пример, используемый для объяснения и иллюстрации мультифрактального формализма [2,10]. В контексте нашего рассмотрения, вводимые в рамках этого формализма обобщенные размерности и скейлинг-спектр следует рассматривать как определенные характеристики фрактального сигнала.

На k -ом уровне построения двухмасштабного канторова множества совокупность интервалов длины $l_i = |w_i - x_{i+2^k}|$, $i = 1, \dots, 2^k$ представляет собой покрытие этого множества. Чтобы определить хаусдорфову размерность D_0 , потребуем, чтобы сумма $\sum_{i=1}^{2^k} l_i^{D_0}$ не менялась с ростом k . Поскольку при переходе к следующему уровню каждый элемент l_i заменяется на два, с длинами al_i и bl_i , то D_0 должно удовлетворять уравнению

$$a^{D_0} + b^{D_0} = 1. \quad (6)$$

На рис. 2, a показаны линии равной размерности D_0 на плоскости параметров a, b .

Чтобы получить спектр обобщенных размерностей и скейлинг-спектр, припишем всем элементам покрытия на k -ом уровне построения одинаковую

меру (вероятность) $p_i = 1/2^k$. Определим сумму $\Gamma_k = \sum_{i=1}^{2^k} p_i^q / l_i^\tau$ и потребуем выполнения такого соотношения между q и τ , чтобы Γ_k оставалась конечной и не менялась с ростом k . Это будет выполнено, если $2^{-q} a^{-\tau} + 2^{-q} b^{-\tau} = 1$, откуда $q = -\log_2 (a^{-\tau} + b^{-\tau})$. Далее, полагая $D_q = \tau / (q-1)$, $\alpha = (dq/d\tau)^{-1}$, $f = \alpha q - \tau$, получаем в неявной форме зависимость D_q от q (спектр обобщенных размерностей) и f от α (скейлинг-спектр). На рис. 2, b и v показаны линии равной размерности D_1 (информационной) и D_2 (корреляционной) на плоскости параметров фрактального сигнала. Рис.3 и 4 показывают, как выглядит спектр обобщенных размерностей и скейлинг-спектр в разных точках плоскости параметров.

Рассмотренные характеристики описывают фрактальный сигнал с точки зрения взаимного расположения значений переменной на числовой оси, но не учитывают порядок их следования во времени. Информацию о порядке следования содержит такая характеристика, как фурье-спектр. Известны приближенные соотношения между интенсивностями спектральных линий для сигнала, порождаемого динамикой в фейгенбаумовской критической точке [13,14]. Для фрактальных сигналов типа (4) или (5) аналогичные соотношения тоже можно получить, причем они оказываются точными. Определим фурье-образ сигнала на частоте f как

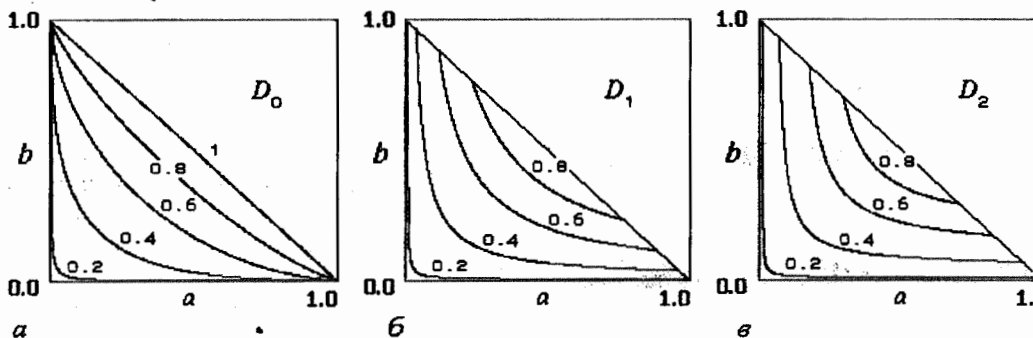


Рис. 2. Линии равных размерностей Хаусдорфа D_0 , информационной D_1 и корреляционной D_2 на плоскости параметров фрактального сигнала

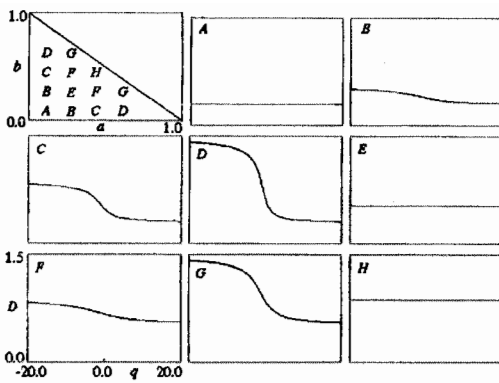


Рис. 3. Вид спектра обобщенных размерностей фрактального сигнала в точках, обозначенных буквами А-Н на плоскости параметров

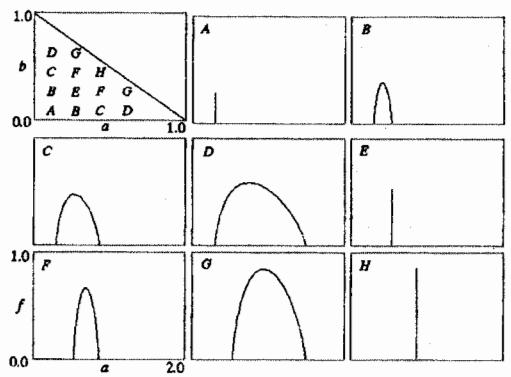


Рис. 4. Вид скейлинг-спектра фрактального сигнала в точках, обозначенных буквами А-Н на плоскости параметров

$$W(f) = \lim_{N=2^k \rightarrow \infty} \frac{N-1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w_n \exp(2\pi i n f) \quad (7)$$

Производя в (7) суммирование отдельно по четным и нечетным n и используя соотношения (4), получаем для $f = 0$ и $f = 1$

$$W(0) = ((b - a)W(0) + 1 - b)/2, \quad W(0) = (1 - b)/(2 - b + a), \quad W(1) = W(0), \quad (8)$$

для $f = 1/2$

$$W(1/2) = (1 - b)(1 + a)/(2 - b + a), \quad (9)$$

и для прочих значений f соотношения

$$W(f/2) = (1/2) (-a + b \exp(i\pi f/2))W(f),$$

$$W(1-f/2) = (1/2) (-a - b \exp(i\pi f/2))W(f). \quad (10)$$

Отсюда ясно, что спектр будет содержать дискретные составляющие на частотах $f = m \cdot 2^k$ со всевозможными целыми m и $k = 0, 1, 2, \dots$. Фурье-амплитуды можно вычислить рекуррентным образом с помощью (10), используя (8) и (9) в качестве «начальных условий». Спектр с очевидностью обладает иерархической структурой: субгармоники каждого последующего уровня k уменьшаются по интенсивности W в среднем на фактор $\gamma = (a^2 + b^2)/4$. Неравномерность распределения амплитуд составляющих в пределах данного уровня дается фактором $\alpha = 2ab/(a^2 + b^2)$.

Рис. 5 дает представление о том, как выглядит спектр в разных точках плоскости параметров фрактального сигнала.

Можно предложить простую схему генератора, который позволяет получить фрактальный сигнал и допускает управление параметрами a, b . Представим себе двоичный k -разрядный счетчик. Пусть каждый элемент такого счетчика связан с двухполюсником, который может находиться в двух состояниях. Если в соответствующем разряде счетчика

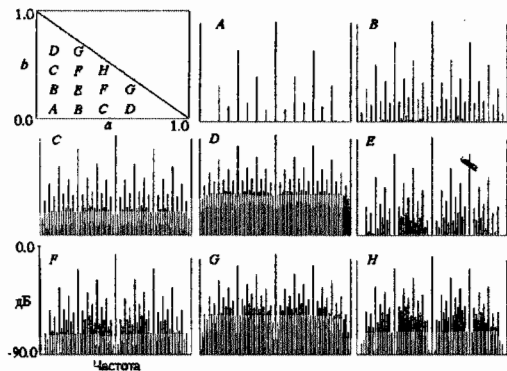


Рис. 5. Вид спектра Фурье фрактального сигнала в точках, обозначенных буквами А-Н на плоскости параметров

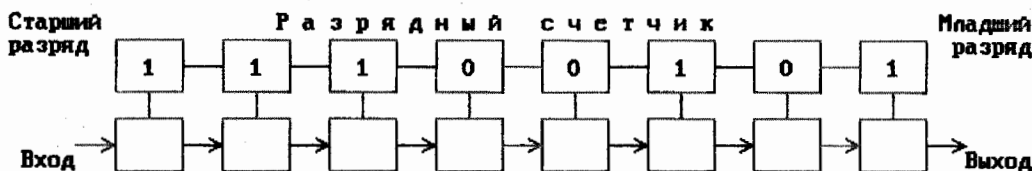


Рис. 6. Схема устройства, позволяющего генерировать фрактальный сигнал с регулируемыми параметрами a и b . Верхний ряд — элементы двоичного разрядного счетчика, нижний ряд образован блоками, передаточные свойства которых зависят от состояния разрядов счетчика: $u_{\text{вых}} = b(1+u_{\text{вх}})$, если 0, $u_{\text{вых}} = -a(1+u_{\text{вх}})$, если 1

находится 0, то на выходе двухполосника сигнал равен $b(1+u)$, где u — входной сигнал. Если в этом разряде находится 1, то на выходе двухполосника сигнал равен $-a(1+u)$. Все двухполосники связаны в цепочку, как показано на рис. 6. На вход цепочки подается сигнал $u_{\text{вх}} = b/(1-b)$. Нетрудно показать, что на выходе будет генерироваться сигнал, описываемый рекуррентным соотношением (5), в котором n играет роль дискретного времени, отсчитываемого счетчиком.

Пусть число элементов в цепочке очень велико, $k \rightarrow \infty$. Тогда переменная u_n в ходе эволюции пробегает в соответствующем порядке по элементам двухмасштабного канторова множества на оси u , расположенного на отрезке $[-a/(1-b), b/(1-b)]$. При конечном числе разрядов в счетчике k мы будем получать «усеченный» сигнал, который обеспечивает аппроксимацию двухмасштабного канторова множества до уровня k построения из отрезков конечной длины. При этом поведение «истинного» фрактального сигнала правильно описывается на интервале времени в 2^k шагов.

3. Различные примеры фрактальных сигналов

При построении модели фрактального сигнала (4) мы исходили из скейлинговых свойств динамики логистического отображения в точке накопления бифуркаций удвоения периода. Согласно теории Фейгенбаума, эти скейлинговые свойства обусловлены наличием неподвижной точки функционального уравнения ренормгруппы (РГ)

$$g(x) = \alpha g(g(x/\alpha)). \quad (11)$$

Здесь α — уже упоминавшаяся универсальная константа α_F , а $g(x)$ — универсальная функция, которая была найдена численно с высокой точностью в виде разложения в ряд по четным степеням аргумента.

Одно из предлагавшихся обобщений теории Фейгенбаума [15-17] состояло в распространении его подхода на отображения с экстремумом, порядок которого определяется произвольным вещественным числом z , $1 < z < \infty$, например

$$x \rightarrow 1 - \lambda|x|^z. \quad (12)$$

Оказывается, что в этом случае динамическое поведение на пороге хаоса также ассоциируется с неподвижными точками уравнения (11) — функциями, представляемыми в виде рядов по степеням $|x|^z$, а масштабная константа α оказывается зависящей от z . Ясно, что наша модель фрактального сигнала (4) одинаково пригодна при различных z , достаточно придать фигурирующим в ней параметрам значения $a = 1/|\alpha(z)|$ и $b = 1/|\alpha(z)|^z$. На рис. 7 на плоскости фрактального сигнала показано геометрическое место точек, отвечающих различным z от 1.05 до 10.

Предположим теперь, что мы остаемся в классе одномерных отображений, задаваемых аналитическими функциями действительной переменной, но допускающими наличие более одного экстремума, точек перегиба, и управляемых более чем одним параметром. В этом случае в пространстве параметров могут

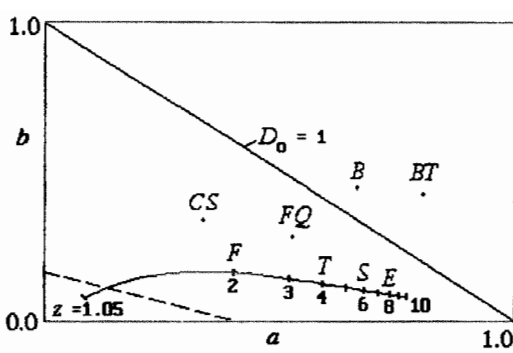


Рис. 7. Точки на плоскости параметров, где фрактальный сигнал (4) может служить аппроксимацией динамики в различных критических ситуациях в точке накопления удвоенный периода: F (Фейгенбаум), T (трикритичность), S и E - типы поведения одномерных отображений с экстремумом степени 2, 4, 6 и 8, B (бикритичность), FQ и BT - типы поведения двумерных отображений, CS - канторов сигнал. Сплошная кривая отвечает одномерным отображениям с экстремумом степени z от 1.05 до 10. Штриховая линия обозначает порог бифуркации РГ уравнения в задаче о внешнем воздействии фрактального сигнала на квадратичное отображение

(диссипативные), могут демонстрировать хаотическое поведение. Однако при наличии достаточного количества управляющих параметров появляется возможность реализации других типов критического поведения, специфических для двумерных отображений. В этом случае вместо одномерного уравнения РГ (11) приходится иметь дело с его двумерным обобщением [21,22]

$$g(X, Y) = \alpha g(g(X/\alpha, Y/\beta), f(X/\alpha, Y/\beta)),$$

$$f(X, Y) = \beta f(g(X/\alpha, Y/\beta), f(X/\alpha, Y/\beta)), \quad (13)$$

где g и f - универсальные функции двух аргументов, α и β - масштабные факторы. Уравнения (13) записываются в компактной форме благодаря специальному выбору системы координат X, Y в двумерном фазовом пространстве («скейлинговые координаты»). Направления осей этой системы координат совсем не обязательно совпадает с той, в которой записано исходное отображение, так что динамические переменные x и y в общем случае выражаются через X и Y посредством некоторой замены. Каждая из величин X и Y демонстрирует свои скейлинговые свойства. Тем не менее, однокомпонентная модель фрактального сигнала (4) все-таки может быть полезной: если масштабные факторы α и β заметно различаются по величине, то одна компонента, характеризуемая меньшим по модулю масштабным фактором, оказывается более существенной, тогда как вторая практически незаметна на ее фоне.

Простейший нетривиальный новый тип критического поведения, названный *бикритическим* (B) [23,24,11], обнаруживается в системе двух логистических отображений с однонаправленной связью

$$A_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, y_{n+1} = 1 - A y_n^2 - B x_n^2. \quad (14)$$

Этот тип поведения достигается, если вывести первую подсистему на порог хаоса изменением параметра λ , и вторую - изменением параметра A при (умеренном) фиксированном значении параметра связи B . Например, при $B = 0.375$

существовать кривые или поверхности, на которых отображение, описывающее динамику за одну или несколько итераций, имеет экстремум степени $z = 4, 6, 8, \dots$. Если мы будем двигаться вдоль такой кривой или поверхности и обнаружим каскад удвоений периода, то он будет подчиняться скейлинговым закономерностям с масштабными константами, такими же как в отображениях вида (12) с соответствующими *целыми четными* показателями z . При наличии одного, двух и трех управляющих параметров могут встретиться критические ситуации следующего типа: фейгенбаумовская F ($z=2$), трикритическая T ($z=4$), тип S ($z=6$) и тип E ($z=8$) (см. [18-20]). Соответствующие точки отмечены буквами на плоскости параметров фрактального сигнала на рис.7.

Дальнейшие интересные ситуации возникают, если мы перейдем к *двумерным отображениям*. Известно, что отображения, сжимающие площадь фейгенбаумовский тип удвоенный периода.

бикритическая точка располагается при $\lambda = 1.4011552\dots$ и $A = 1.1249814\dots$.
 Неподвижная точка уравнения РГ (13), ответственная за бикритичность, и точные значения масштабных констант найдены в [24,11,22]. Для переменной x константы скейлинга совпадают с фейгенбаумовскими, а для y это новые константы: $\beta = \beta_B = -1.505318159\dots$ вблизи начала координат и β_B^2 вблизи точки $y=1$.

Если рассмотреть такую систему, в которой отображение с квадратичным экстремумом воздействует на отображение с экстремумом четвертой степени

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad y_{n+1} = 1 - P y_n^4 - Q x_n^2, \quad (15)$$

то в нем при выходе на порог хаоса одновременно в первой и второй подсистемах реализуется другой тип критического поведения, который был обозначен символом *BT* [25]. Например, при $Q = 0.375$ точка *BT* расположена при $\lambda = 1.401155\dots$, $P = 1.279735\dots$. В этой точке вторая подсистема демонстрирует скейлинговое поведение с масштабными константами $\beta = \beta_{BT} = -1.2416604$ и β_{BT}^4 ; соответствующая неподвижная точка уравнения РГ найдена в [25]. Заметим, что этот тип поведения обнаруживается и в системе (14): при увеличении связи бикритичность сохраняется, пока параметр B не достигнет $0.835050\dots$. При этом значении B критическая точка типа *BT* располагается при $\lambda = 1.401155\dots$ и $A = 1.066053\dots$.

На рис. 7 на плоскости a, b отмечены точки $(1/|\beta_B|, 1/\beta_B^2)$ и $(1/|\beta_{BT}|, 1/\beta_{BT}^4)$, которые соответствуют фрактальному сигналу, аппроксимирующему последовательность y_n в критических ситуациях B и *BT*.

Следующий тип критичности, специфический для двумерных необратимых отображений, был обнаружен при добавлении квадратичного члена, описывающего обратное воздействие второй подсистемы на первую в уравнениях (14) [22, 26, 27]. Однако более простой пример, для которого к тому же направления координатных осей оказываются совпадающими со скейлинговыми, дается отображением

$$x_{n+1} = 1 - A x_n^2 + D x_n y_n, \quad y_{n+1} = 1 - B x_n y_n. \quad (16)$$

При фиксированном D критическую точку *FQ* можно найти на плоскости параметров A, B на конце фейгенбаумовской критической линии, например, при $D=0.3$ имеем $A=1.629678013$, $B=1.767192895$. Этому типу поведения также соответствует определенная неподвижная точка уравнений (13). Масштабные константы α (для переменной x) и β (для переменной y) равны, соответственно, $\alpha = -1.900071670$ и $\beta = -4.008157849$. Динамика переменной x может быть приближенно описана моделью фрактального сигнала (4), если положить $a = 1/|\alpha_{FQ}|$, $b = 1/\alpha_{FQ}^2$. Соответствующая точка на рис.7 обозначена буквами *FQ*.

Во всех перечисленных ситуациях модель фрактального сигнала (4) дает весьма неплохое описание фрактальных свойств сигналов, генерируемых нелинейными системами на пороге хаоса. Об этом можно судить, сопоставляя скейлинг-спектры и фурье-спектры (рис.8 и 9).

Следует заметить, однако, что для некоторых других типов поведения на пороге хаоса данная модель фрактального сигнала непригодна, например, в случае переходов к хаосу через перемежаемость и квазипериодичность. К ним следует добавить и некоторые критические ситуации, связанные с удвоениями периода, например критическое поведение, характерное для гамильтоновских систем [21], а также типы поведения, ассоциирующиеся не с неподвижными точками, а с более сложными седловыми траекториями, порождаемыми уравнениями РГ [28, 29, 30].

С другой стороны, представленный выше перечень критических ситуаций далеко не исчерпывает возможностей, открываемых моделью фрактального сигнала (4), (5), если допустить большую свободу в выборе параметров a и b . Остановимся на некоторых более экзотических примерах.

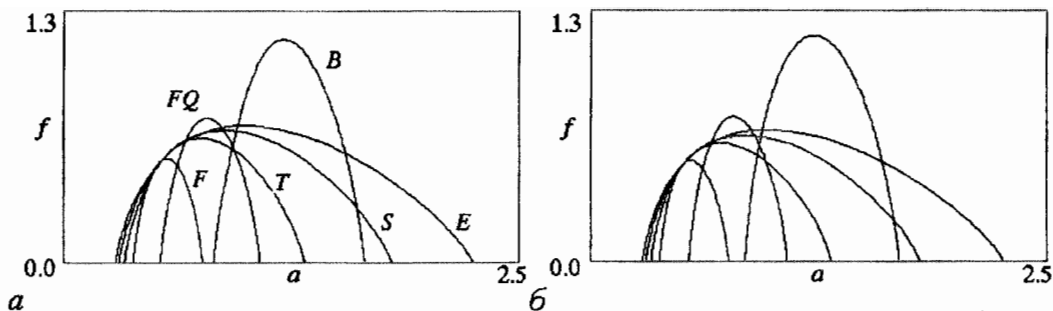


Рис. 8. Скейлинг-спектры, порождаемые одномерными и двумерными отображениями в ситуациях, относящихся к различным классам количественной универсальности F, T, S, E, FQ и B (a) и для модельного фрактального сигнала (4) в соответствующих точках плоскости параметров (b)

Если мы положим $a=1, b=0$, то для $i=1, 2, \dots$ из (4) получаем последовательность $w_i = 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, \dots$, которая в точности соответствует последовательности знаков переменной x , при старте из начала координат в логистическом отображении в точке накопления бифуркаций удвоения периода: $w_i = \text{sign}(x_i)$. Эта последовательность связана с известной в теории чисел последовательностью Морса-Туэ ξ_i (сумма по модулю два значащих цифр целого числа i в двоичной записи) соотношением $w_i = 2|\xi_i - \xi_{i-1}| - 1$ [2].

При $a=b=1/3$ последовательность w_i пробегает по элементам классического канторова множества. Такой сигнал можно было бы назвать канторовым сигналом. На рис.7 ему соответствует точка, обозначенная CS .

Еще одна интересная возможность, которую стоит здесь упомянуть, заключается в исследовании комплексных аналитических отображений $z \rightarrow f(z)$. Как известно, при изменении параметра в комплексной области в простейшем квадратичном отображении

$$z \rightarrow \lambda - z^2 \quad (17)$$

можно наблюдать не только бифуркации удвоения по Фейгенбауму, но также другие варианты усложнения периодических движений, в частности, каскады бифуркаций утроения или учетверения периода [31-33]. Соответствующие типы поведения описываются в рамках РГ анализа, имеющего дело с комплексными

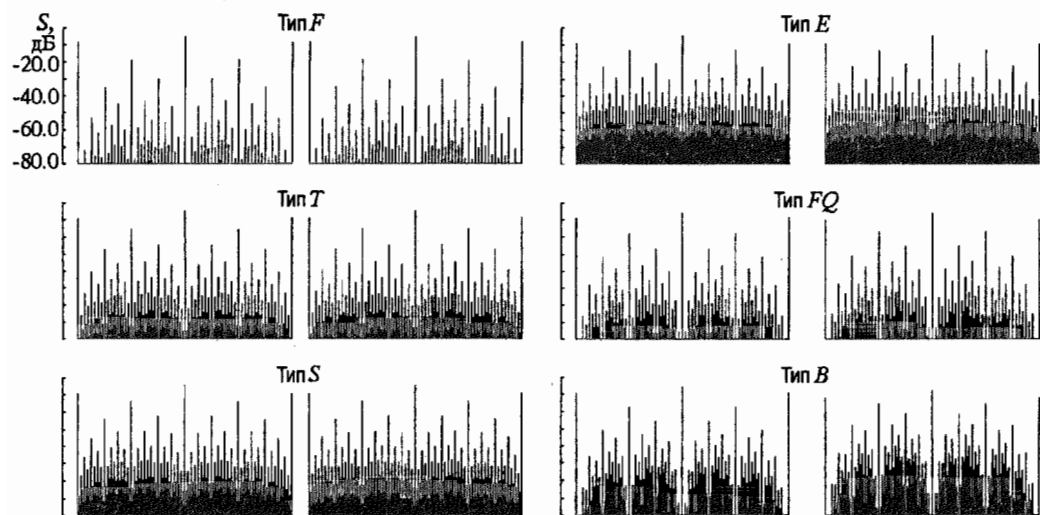


Рис. 9. Спектры Фурье, для одномерных и двумерных отображений в ситуациях, относящихся к различным классам количественной универсальности (левая колонка) и для модельного фрактального сигнала (4) в соответствующих точках плоскости (a, b) (правая колонка)

решениями функциональных уравнений (несколько более сложных нежели (11)) в комплексной области.

Если же мы обратимся к отображениям вида

$$z \rightarrow \lambda - z^m, \quad (18)$$

то для целых $m > 2$ при определенном выборе пути в комплексной плоскости λ можно наблюдать каскады удвоений периода, которые ассоциируются с новыми, комплексными решениями функционального уравнения Фейгенбаума (11). Эти решения могут быть представлены в виде рядов по степеням z^m , причем каждому нечетному m отвечает $(m-1)/2$ различных комплексно-сопряженных пар неподвижных точек (11), а четному - одно действительное решение и $(m-2)/2$ комплексно-сопряженных пар.

В точках накопления бифуркаций удвоения периода, последовательности z_n , порождаемые отображениями вида (18) при старте из $z_0 = 0$, допускают описание в терминах фрактального сигнала (4) с комплексными параметрами $a = -1/\alpha$ и $b = 1/\alpha^m$. В табл. 1 приводятся значения параметра λ , соответствующие точкам накопления каскадов удвоений периода в отображении (18) при различных m , а также полученные в результате численного решения уравнения РГ (11) комплексные константы a и b (см. также [12]). Из рис.10 видно, что соответствие между моделью фрактального сигнала и динамикой комплексных аналитических отображений очень хорошее.

Таблица 1

Точки накопления удвоений периода для комплексных отображений $z \rightarrow \lambda - z^m$ и значения параметров a и b для фрактального сигнала, описывающего их динамику

m	λ	$-a$	b
3	1.063768980 + .244689164i	-0.0711231 + 0.526676i	0.0588262 - 0.1381009i
4	1.168363396 -.662752348 + .733365728i	-0.59160994 0.2289259 - 0.570646i	0.12250162 0.0063919 + 0.1427745i
5	1.106273870 + .081472852i 0.931548081 + .173983111i	-0.4543062 - 0.431655i 0.4078290 - 0.536576i	0.0764963 + 0.0509744i -0.0149815 + 0.1382535i
6	1.109763025 .350140669 + 1.046537760i -.829296309 + .417925362i	-0.68131846 -0.2309544 + 0.625969 0.5233241 - 0.491469i	0.10002324 0.0461123 - 0.0752169i -0.025627 + 0.1344976i
7	1.089143713 + .033432524i .428277386 + .944463146i -.568210546 + .722577612i	-0.596 - 0.345i -0.0339267 - 0.695788i 0.6031723 - 0.448573i	0.065 + 0.037i 0.026627 + 0.750216i -0.031737 + 0.131834i

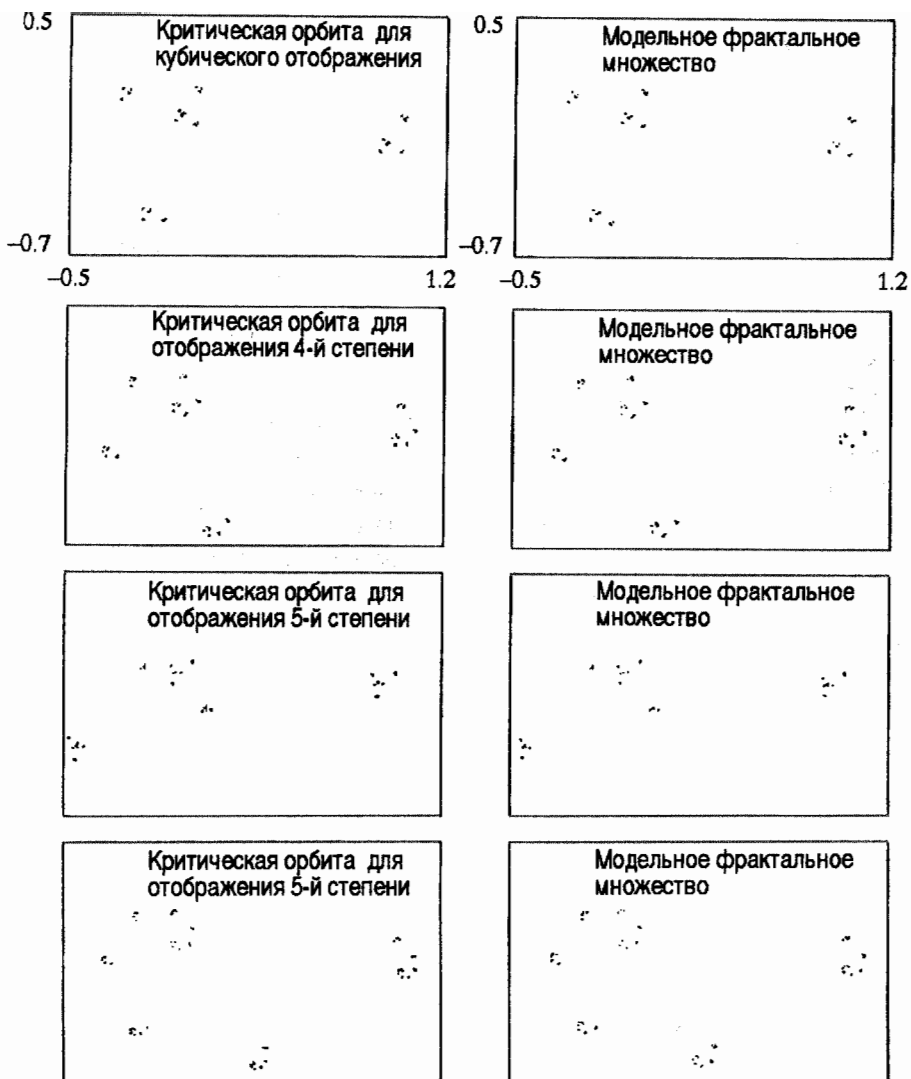


Рис. 10. Фрактальное множество на плоскости комплексной динамической переменной z , порождаемое отображениями вида $z \rightarrow \lambda - z^m$ для $m = 3, 4$ и 5 . Значения параметра λ соответствуют точкам накопления удвоений периода в комплексной плоскости и приведены в табл.1

4. Воздействие фрактального сигнала на динамику системы, демонстрирующей переход к хаосу через удвоения периода. Модельное уравнение и трансформация бифуркационного дерева

Как только мы вводим в рассмотрение фрактальные сигналы, возникает естественный вопрос - что будет происходить при воздействии такого сигнала на нелинейные системы? Можно предположить, что интересные и нетривиальные эффекты могут реализоваться в том случае, если структура фрактального сигнала в каком-то смысле «приспособлена» к динамике системы, так, чтобы сходные по своей природе особенности поведения существовали бы на разных временных масштабах. Или, иначе говоря, - на разных уровнях иерархической структуры, с которой мы имеем дело, когда рассматриваем фрактальный сигнал.

С этой точки зрения, естественным «объектом приложения» для воздействия обсуждаемых в данной статье фрактальных сигналов являются системы, демонстрирующие каскад бифуркаций удвоения периода. Сконструируем

соответствующую модельную систему. Для этого возьмем логистическое отображение $X \rightarrow \lambda - X^2$, содержащее единственный существенный параметр λ , и предположим, что этот параметр включает переменную добавку в виде фрактального сигнала (5):

$$X_{n+1} = \lambda - X_n^2 + \epsilon u_n. \quad (19)$$

Заменой $X = x\lambda$, $\epsilon = c\lambda$, его можно привести к виду [4,5]

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 + c u_n. \quad (20)$$

Параметр c определяет интенсивность воздействия фрактального сигнала, и мы будем именовать его *константой связи*.

Обсудим сначала на качественном уровне, что происходит с бифуркациями удвоения периода при включении фрактального сигнала.

Рассмотрим «усеченный» сигнал, который получается, если использовать для $n < 2^k$ формулу (5), а для $n \geq 2^k$ считать последовательность u_n периодически продолженной. С ростом k это дает все более точную аппроксимацию фрактального сигнала. Рассмотрим отображение, описывающее динамику нашей системы (20) за 2^k шагов. Задавая при различных λ ансамбль начальных условий x_0 , итерируем отображение так, чтобы исключить переходный процесс, а затем откладываем наблюдаемые точки на плоскости (λ, x) . Если константа связи нулевая, то получается обычное бифуркационное дерево Фейгенбаума (рис.11, слева). Каждая бифуркация удвоения представляется вилообразной структурой, «pitchfork» (рис.11, слева внизу). При $c > 0$ происходит трансформация этой структуры, показанная на рис.11 справа. Этот феномен «снятия вырождения» хорошо известен в теории бифуркации «pitchfork» [34]. Если, например, интерпретировать график на рис.11 внизу слева как зависимость прогиба вертикально поставленной металлической линейки от величины продольной нагрузки, то график справа будет представлять аналогичную зависимость для слегка деформированной линейки.

В нашем случае роль фактора, приводящего к снятию вырождения, играет внешнее воздействие на систему, демонстрирующую бифуркацию удвоения

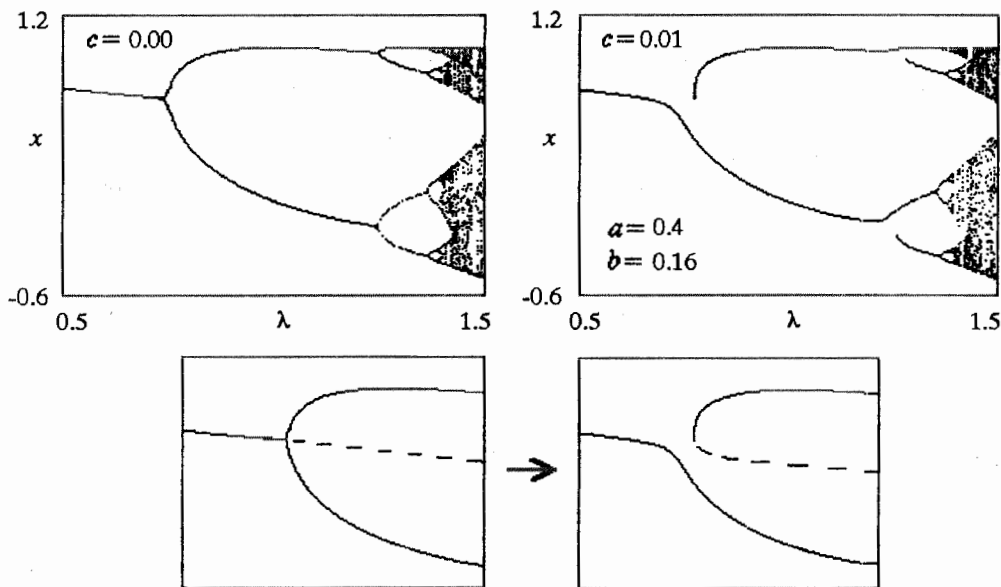


Рис. 11. Трансформация бифуркационного дерева при включении фрактального сигнала (см. текст). На графиках внизу сплошными линиями обозначены устойчивые, а штрихами - неустойчивые состояния

периода. Даже при очень малых c , вблизи точек разветвления «дерева» с номером меньше k , сигнал подталкивает систему так, что способствует выбору одного определенного из двух возможных вариантов фазы возникающих колебаний удвоенного периода. В случае $k \rightarrow \infty$, отвечающем фрактальному сигналу, бифуркации удвоения «разрушены» на всех уровнях. Как прогрессирует этот процесс от уровня к уровню - убывает ли относительная величина возмущения бифуркационной структуры или нарастает, - будет зависеть от параметров фрактального сигнала. Ясно во всяком случае, что при очень малых a и b будет реализоваться первая, а при достаточно больших - вторая возможность. Переход от первой ситуации ко второй находит свое выражение в бифуркации решения уравнения РГ, которая обсуждается ниже.

5. Ренормгрупповой анализ задачи о воздействии фрактального сигнала

Перейдем к РГ анализу, который позволит изучить различные возможности скейлингового поведения при переходе к хаосу в системе, подвергаемой воздействию фрактального сигнала. Основная идея такова. Представим фрактальный сигнал в виде суммы двух компонент I и II, первая из которых представляет собой «усеченный» сигнал периода 2^k , и построим отображение, описывающее динамику системы под действием «усеченного» сигнала за 2^k итераций. Теперь задача переформулирована: мы имеем новое отображение, и на него действует новый фрактальный сигнал, в качестве которого выступает компонента II. Если мы находимся на пороге возникновения хаоса, то оказывается возможным так перенормировать динамическую переменную, что уравнения, сформулированные для последовательных k , будут совпадать (в асимптотике по k). Эта ситуация интерпретируется как наличие неподвижной точки РГ преобразования. Итак, ключевой момент анализа состоит в том, чтобы построить процедуру перехода к описанию динамики на последовательно удваивающихся масштабах времени.

Начнем с самого простого для анализа случая, когда параметр фрактального сигнала $b = 0$. Тогда согласно (5)

$$u_{2n} = 0, \quad u_{2n+1} = -a(1+u_n), \quad (21)$$

причем $u_0 = 0$. Фрактальный сигнал (21) характеризуется единственным параметром a , управляющим его масштабными свойствами*. Из (6) видно, что хаусдорфова размерность в этом случае выражается явно: $D_0 = 1/\ln(a)$.

Введем обозначение $f(x) = 1 - \lambda x^2$ и исходя из отображения (20) перейдем к описанию динамики за два шага итераций. Поскольку каждый второй элемент внешнего сигнала равен нулю, то оператор эволюции выглядит очень просто:

$$x_{n+2} = f(f(x_n)) + cu_{n+1}. \quad (22)$$

Используя определение фрактального сигнала (5), получим

$$x_{n+2} = f(f(x_n)) - ca - cau_{n/2}. \quad (23)$$

Перенормируем переменную x по правилу $x \rightarrow x/\alpha$ и произведем переобозначение индекса n на $2n$. В результате получаем уравнение

$$x_{n+1} = f_1(x_n) + c_1u_n, \quad (24)$$

которое совпадает по форме с исходным, но с новой функцией f и другой константой связи c :

* В схеме генератора на рис.6 случай $b = 0$ соответствует тому, что каждый двухполосник на выходе дает сигнал, равный нулю, если в соответствующем разряде счетчика имеется ноль. Кроме того, отсутствует сигнал на входе цепочки.

$$f_1(x) = \alpha f(f(x/\alpha)) + c_1, \quad c_1 = -\alpha a c. \quad (25)$$

Множкратно повторяя эту процедуру, можно построить последовательность перенормированных операторов эволюции системы за 2^k шагов итераций. При этом оператор эволюции задается функцией $f_k(x)$ и константой связи c_k , которые подчиняются рекуррентным уравнениям РГ

$$f_{k+1}(x) = \alpha f_k(f_k(x/\alpha)) + c_k, \quad c_{k+1} = -\alpha a c_k. \quad (26)$$

Нас будут интересовать теперь неподвижные точки РГ преобразования (26), отвечающие за поведение системы на пороге возникновения хаоса. Сразу видно, что имеется две возможности - с нулевой и с ненулевой константой связи c .

При $c = 0$ для функции f получаем уравнение, совпадающее с уравнением Фейгенбаума (11). Его решением является функция Фейгенбаума $g(x)$, а масштабная константа $\alpha = \alpha_F = -2.5029...$ Соответствующую неподвижную точку РГ преобразования $\{g(x), c = 0\}$ мы называем *фейгенбаумовской*. В частности, она описывает поведение автономной системы на пороге хаоса.

При $c \neq 0$ из второго уравнения (26) следует, что должно быть $\alpha = -1/a$, и мы приходим к новому функциональному уравнению

$$g(x) = -g(g(ax))/a + c. \quad (27)$$

В этом уравнении масштабный фактор a не подлежит определению, как в уравнении Фейгенбаума, а представляет собой фиксированную величину, определяемую параметром фрактального сигнала. С другой стороны, аддитивная постоянная c должна быть найдена в процессе решения уравнения так, чтобы обеспечить существование решения в классе гладких четных функций с квадратичным экстремумом при заданном a . Найденное уравнение определяет *нефейгенбаумовскую* неподвижную точку РГ преобразования.

На рис. 12 показано семейство универсальных функций $g_a(x)$, полученных при различных значениях параметра фрактального сигнала a в результате численного решения уравнения (27). Заметим, что с ростом a максимум функции $g_a(x)$ становится все более пологим.

Из второго уравнения (26) видно, что если параметр фрактального сигнала $a < 1/|\alpha_F|$, то эффективная константа связи уменьшается по абсолютной величине при последовательных итерациях ренормпреобразования вблизи фейгенбаумовской неподвижной точки. Поэтому при надлежащем выборе управляющего параметра λ поведение системы будет определяться именно этой неподвижной точкой несмотря на то, что на нее действует внешний фрактальный сигнал. С другой стороны, при $a > 1/|\alpha_F|$ эффективная константа связи нарастает при итерациях, так что система уходит от фейгенбаумовской неподвижной точки.

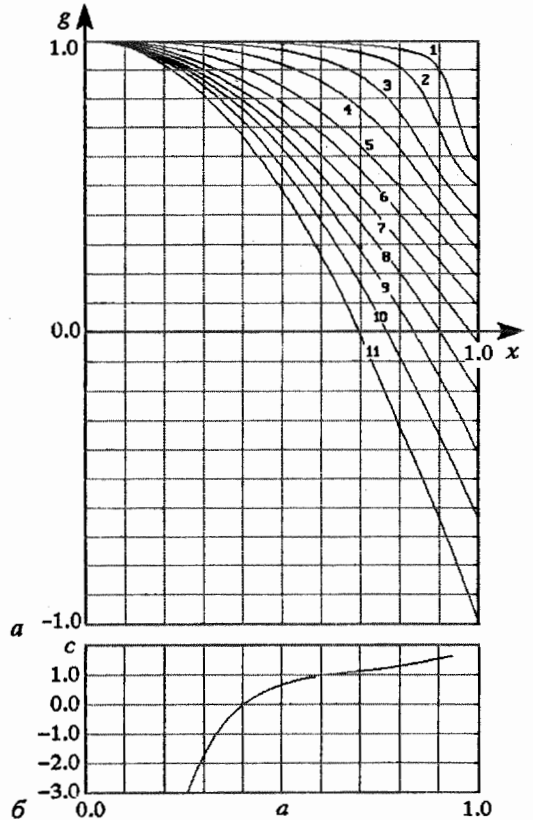


Рис. 12. Решения функционального уравнения РГ для задачи о воздействии фрактального сигнала на квадратичное отображение при $b = 0$; цифрами 1 - 11 обозначены кривые, для $a = 0.93, 0.9, 0.86, 0.82, 1/a = 1.31, 1.45, 1.7, 2.1, \alpha_F, 3, 3.7(a)$. Зависимость параметра c в уравнении (27) от a (б)

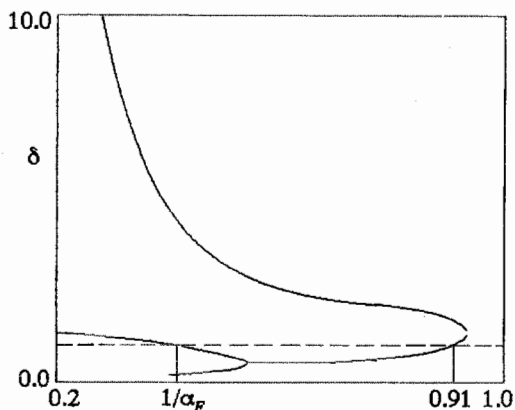


Рис. 13. Модуль собственного значения δ для нефейгенбаумовской неподвижной точки от параметра фрактального сигнала a при $b = 0$

Если мы рассмотрим линеаризованное уравнение (26), описывающее динамику возмущений вблизи фейгенбаумовской неподвижной точки, то при $a < 1/|\alpha_F|$ единственное существенное (приводящее к нарастанию при итерациях) собственное возмущение характеризуется собственным числом $\delta_1 = 4.6692\dots$, которое известно из теории Фейгенбаума и играет роль масштабного фактора, ответственного за скейлинговые свойства системы по управляющему параметру λ . При $a > 1/|\alpha_F|$ к нему добавляется второе существенное собственное число $\delta_2 = -\alpha_F a$. При $a = 1/|\alpha_F|$ происходит *бифуркация в уравнении ренормгруппы*; с этого момента за поведение системы на пороге хаоса отвечает нефейгенбаумовская неподвижная точка.

Для нефейгенбаумовской неподвижной точки линеаризованное РГ преобразование (26) приводит к следующей задаче на собственные значения:

$$\delta h(x) = -[g_\alpha'(g_\alpha(-ax))h(-ax) + h(g_\alpha(-ax))]/a. \quad (28)$$

Численное решение показывает, что спектр собственных чисел δ , который зависит от параметра фрактального сигнала a , содержит единственное существенное собственное число $\delta_1(a)$, превышающее по модулю 1, в интервале a от $1/|\alpha_F|$ до 0.91 (рис.13 и табл.2). Это собственное число представляет собой масштабный фактор, который отвечает за скейлинг по управляющему параметру λ в указанной области изменения a .

Таблица 2

Масштабные константы и собственные числа для нефейгенбаумовской неподвижной точки уравнения (14)

b	a	α_{NF}	$\delta_{NF}^{(1)}$	$\delta_{NF}^{(2)}$
0	0.28571	3.50000	9.451	1.232
	0.38462	2.60000	5.03506	1.03642
	0.43416	2.30329	3.99075	<1
0.05	0.5	2.00000	3.15823	
	0.1	3.62884	10.08665	1.41811
	0.15	3.27345	8.08463	1.30943
0.1	0.2	2.95726	6.52502	1.19965
	0	3.16228	7.42181	1.36605
	0.1	2.74442	5.57055	1.14818
	0.3	2.04806	3.33476	
	0.4	1.17701	2.75770	<1
	0.5	1.53259	2.39421	
0.15963	0.39954	1.54945	2.44700	<1
0.2	0.1	2.03762	3.36808	
	0.2	1.83305	2.93239	<1
	0.3	1.62654	2.57723	
0.3	0.1	1.68773	2.71621	<1

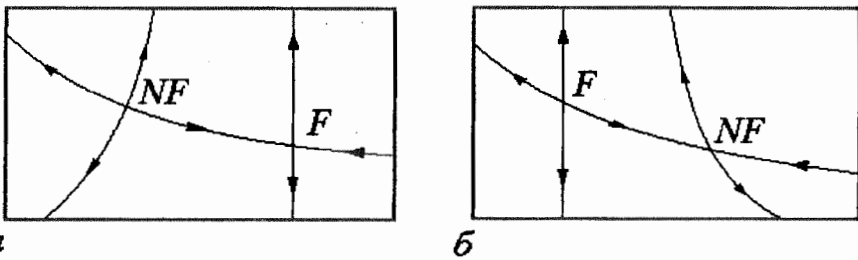


Рис. 14. Качественное пояснение порождаемой уравнением РГ динамики в системе под действием фрактального сигнала: *a* - до бифуркации, когда за критическое поведение отвечает фейгенбаумовская неподвижная точка *F*, *б* - после бифуркации, когда эта роль переходит к нефейгенбаумовской неподвижной точке *NF*

Рис. 14 схематически иллюстрирует динамику решения уравнения РГ до и после бифуркации. Тип этой бифуркации хорошо известен в общей теории [34] и соответствует слиянию и обмену характера устойчивости двух неподвижных точек. Заметим, что в теории фазовых переходов аналогичная по своей природе бифуркация имеет место в ситуации, когда размерность пространства рассматривается как непрерывный параметр и изменяется таким образом, что переходит через критическое значение (4 для моделей типа Изинга) [35].

При переходе *a* через 0.91 два комплексно-сопряженных собственных числа становятся по модулю больше 1, и происходит какое-то новое изменение характера динамики, детали которого пока не ясны.

Если оба параметра фрактального сигнала *a* и *b* отличны от нуля, то РГ анализ усложняется: в этом случае приходится иметь дело с функциями двух переменных. Однако основной феномен - наличие бифуркации слияния и обмена устойчивости неподвижных точек - сохраняется.

Обозначим правую часть (20) через $f_0(x, u)$ и перейдем к отображению, описывающему изменение состояния за два временных шага:

$$x_{n+2} = f_0(f_0(x_n, u_n), u_{n+1}). \quad (29)$$

Изменяя масштаб динамической переменной *x* в некоторое число раз α и выражая u_n и u_{n+1} через $u_{n/2}$ в соответствии с (5.1), получаем новое отображение $f_1(x, u)$. Многократно повторяя процедуру, приходим к рекуррентному уравнению

$$f_{k+1}(x, u) = \alpha f_k(f_k(x/\alpha, b(1+u)), -a(1+u)). \quad (30)$$

Нахождение неподвижных точек этого РГ преобразования подразумевает определение масштабной константы α и функции $f(x, u)$, удовлетворяющей уравнению

$$f(x, u) = \alpha f[f(x/\alpha, b(1+u)), -a(1+u)]. \quad (31)$$

Если рассмотреть малое возмущение неподвижной точки в виде $f_m(x, u) = f(x, u) + \delta^m h(x, u)$, где *h* - малая добавка, то в линейном приближении получаем:

$$\delta h(x, u) = \alpha [f'(f(x/\alpha, b(1+u)), -a(1+u))h(x/\alpha, b(1+u)) + h(f(x/\alpha, b(1+u)), -a(1+u))]. \quad (32)$$

Отсюда могут быть найдены собственные функции $h(x, u)$ и собственные числа δ , характеризующие скейлинговые свойства по параметрам вблизи точки перехода к хаосу в системе с фрактальным сигналом (см. табл.2).

На рис. 15 сплошными линиями показаны найденные путем численного решения уравнений (31), (32) зависимости скейлинговых констант δ и *a* от параметра фрактального сигнала *a* при $b = 0, 0.1$ и 0.2 . Характерный излом на графиках отвечает точке бифуркации. До бифуркации критические индексы

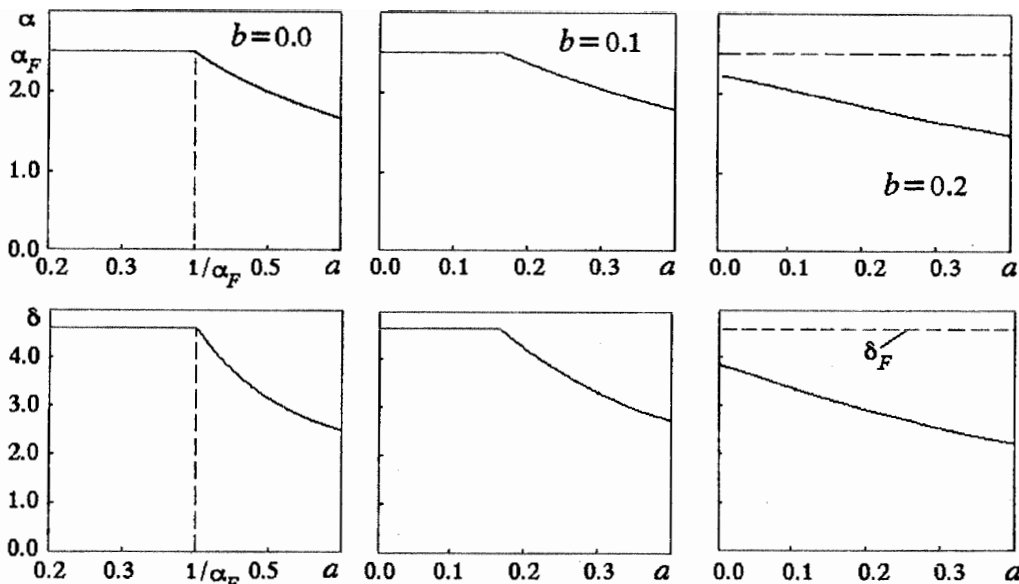


Рис. 15. Масштабные факторы α и δ , при воздействии на квадратичное отображение фрактального сигнала в зависимости от его параметра f при фиксированных $b = 0, 0.1$ и 0.2 . Излом соответствует бифуркации в уравнении ренормгруппы

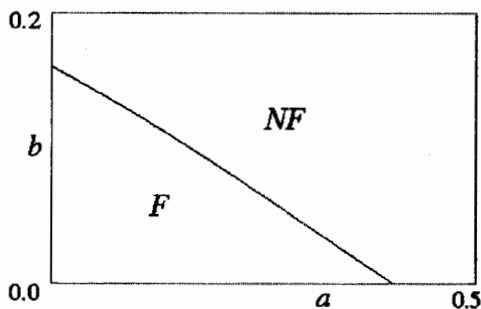


Рис. 16. Бифуркационная линия на плоскости параметров фрактального сигнала, F и NF - области, где критическое поведение системы под воздействием этого сигнала определяется фейгенбаумовской и нефейгенбаумовской неподвижной точкой уравнения РГ

фейгенбаумовские и не зависят от параметров фрактального сигнала, а после бифуркации - зависят.

Чтобы найти бифуркацию слияния неподвижных точек, подставим в (30) $f(x,u) = g(x) + uh(x)$, где $g(x)$ - функция Фейгенбаума, а $uh(x)$ - малая добавка. Приравнявая члены первого порядка малости, получаем следующее условие существования двукратно вырожденной неподвижной точки:

$$h(x,u) = \alpha[(b/a)g'(g(x/\alpha))h(x/\alpha) - h(g(x/\alpha))]. \quad (33)$$

На плоскости параметров a, β точки бифуркации располагаются на кривой, показанной сплошной линией на рис. 16.

6. Динамика под действием фрактального сигнала: свойства скейлинга

В этом разделе мы рассмотрим компьютерные иллюстрации, которые демонстрируют скейлинговые свойства динамики модельного отображения под действием фрактального сигнала в различных ситуациях, выявленных при РГ анализе.

На рис.17 и 18 показаны примеры зависимостей ляпуновского показателя Λ от управляющего параметра λ и бифуркационные деревья при таких параметрах фрактального сигнала, когда поведение на пороге хаоса определяется фейгенбаумовской и нефейгенбаумовской неподвижными точками. На каждом графике выделены фрагменты, внутри которых, согласно результатам РГ анализа, картинки должны воспроизводиться: пересчет масштаба производится в δ раз по

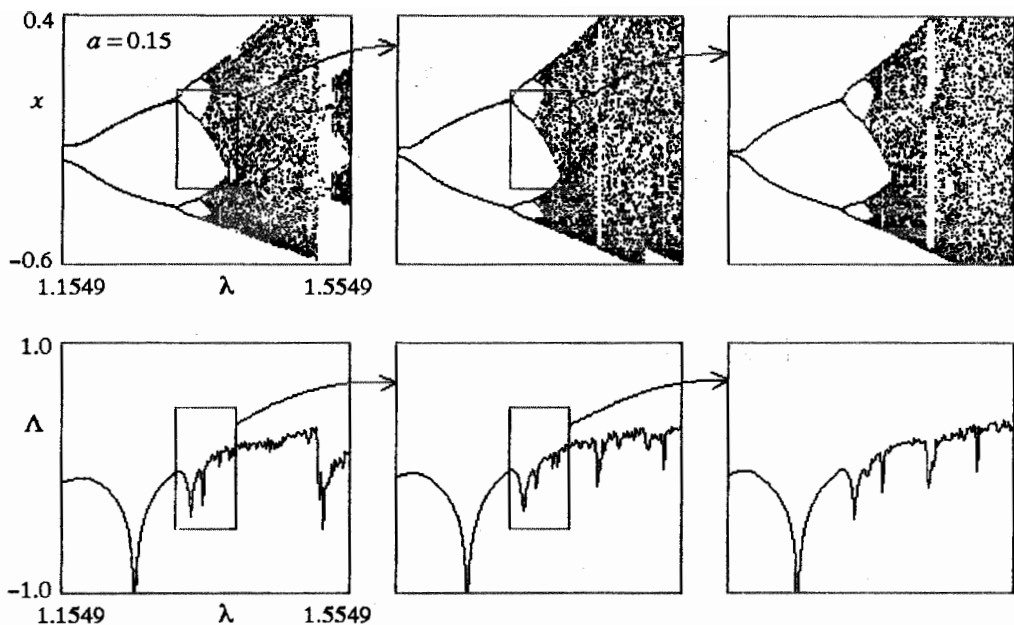


Рис. 17. Бифуркационные деревья на графиках x от λ и ляпуновские показатели Λ в зависимости от λ для отображения (20). Критическая точка находится в центре каждой картинке. Фейгенбаумовский скейлинг - факторы пересчета масштаба по оси x : $\alpha_F = -2.5029\dots$, по оси λ : $\delta_F = 4.6692\dots$, по оси Λ : 2

оси параметра λ , в α раз по оси x , и в 2 раза по оси Λ . Здесь δ и α - масштабные факторы, полученные из РГ анализа для соответствующих неподвижных точек уравнений РГ при данных значениях параметров фрактального сигнала (см. подписи к рисункам).

Заметим, что в области до бифуркации графики «деревьев» и ляпуновских показателей хотя и отличаются внешне от классических фейгенбаумовских, но с увеличением разрешения, на глубоких уровнях фрактальной структуры, это отличие становится все меньше и меньше. Напротив, после бифуркации графики выглядят совершенно иначе. Более того, их вид начинает существенно зависеть от a и b . В этом находит свое выражение зависимость решения уравнения РГ от параметров фрактального сигнала, характерная для нефейгенбаумовской неподвижной точки.

При еще больших значениях параметров a и b характер динамики изменяется, причем детали этого изменения еще неясны. В частности, при $b = 0$ это изменение, по-видимому, связано с обнаруживающейся при $a = 0.91$ еще одной бифуркацией в уравнении ренормгруппы, когда два комплексно-сопряженных собственных числа нефейгенбаумовской неподвижной точки становятся по модулю больше 1. Заметим, впрочем, что при $a=1, c=1, \lambda=1$ имеет место замечательный по простоте частный случай динамики системы (20): имеется ровно два сверхустойчивых неперiodических режима динамики, в каждом из которых переменная x последовательно принимает одно из трех значений $-1, 0$ и 1 . Начальный участок обеих последовательностей и фрактального сигнала u_n для этого случая приводится в табл. 3.

В заключение продемонстрируем, как можно воспользоваться результатами исследования динамики под действием фрактального сигнала для анализа задачи о переходе к хаосу в системе двух одномерных отображений при наличии однонаправленной связи. Рассмотрим модельную систему следующего вида:

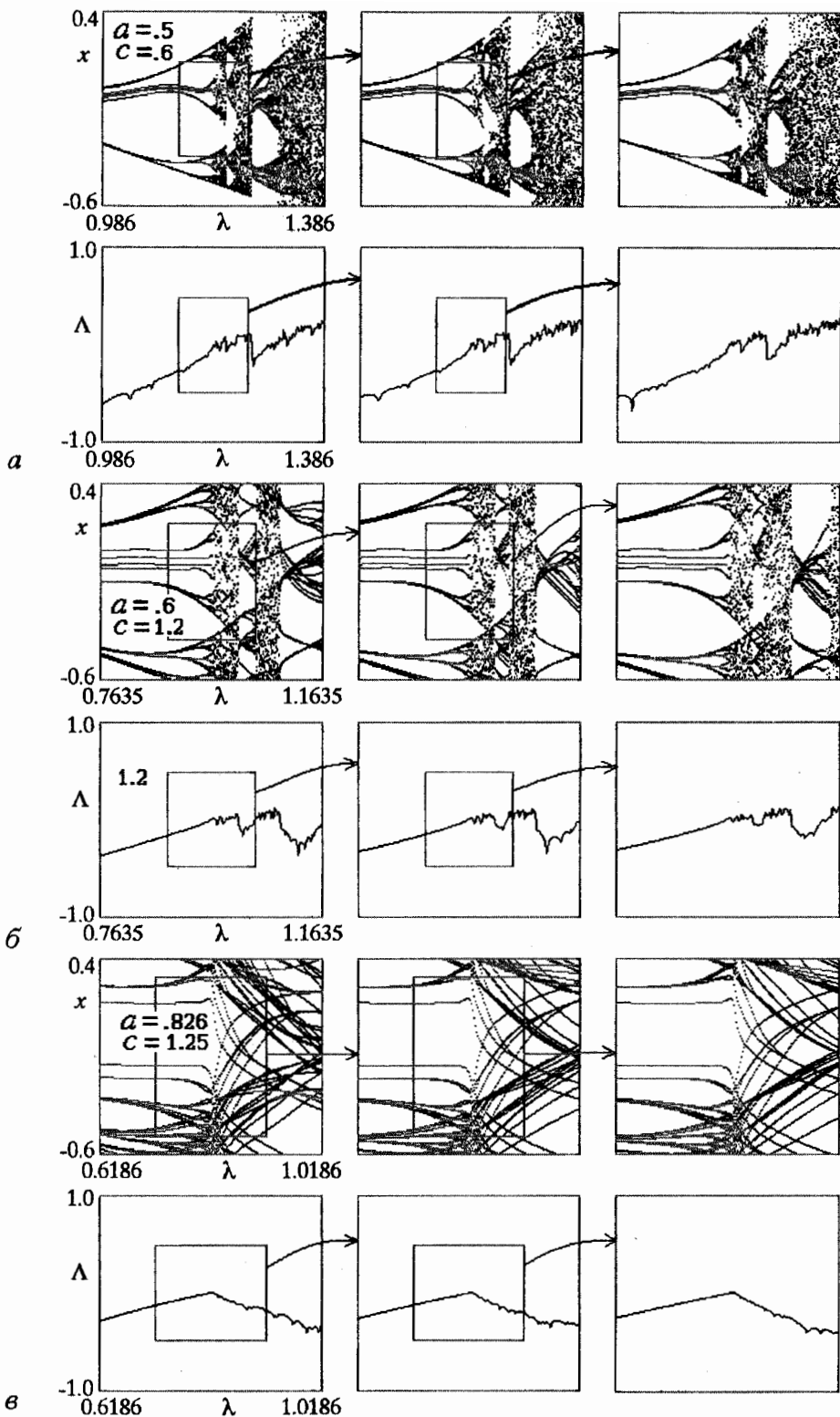


Рис. 18. Бифуркационные деревья на графиках x от λ и ляпуновские показатели Λ в зависимости от λ для отображения (20) при различных a и $b = 0$. На каждой картинке критическая точка находится в центре. Нефейгенбаумовский скейлинг - факторы пересчета масштаба по осям x и λ зависят от параметров фрактального сигнала: а) $\alpha = -2$, $\delta = 3.1582$, б) $\alpha = -1.6666$, $\delta = 2.5203$, в) $\alpha = -1.2106$, $\delta = 2$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
u_n	0	-1	0	0	0	-1	0	-1	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	
режим	1	0	1	-1	0	1	0	0	1	-1	0	0	1	0	1	-1	0	1
x_n																		
режим	2	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	-1	0	1	0	0	1	0

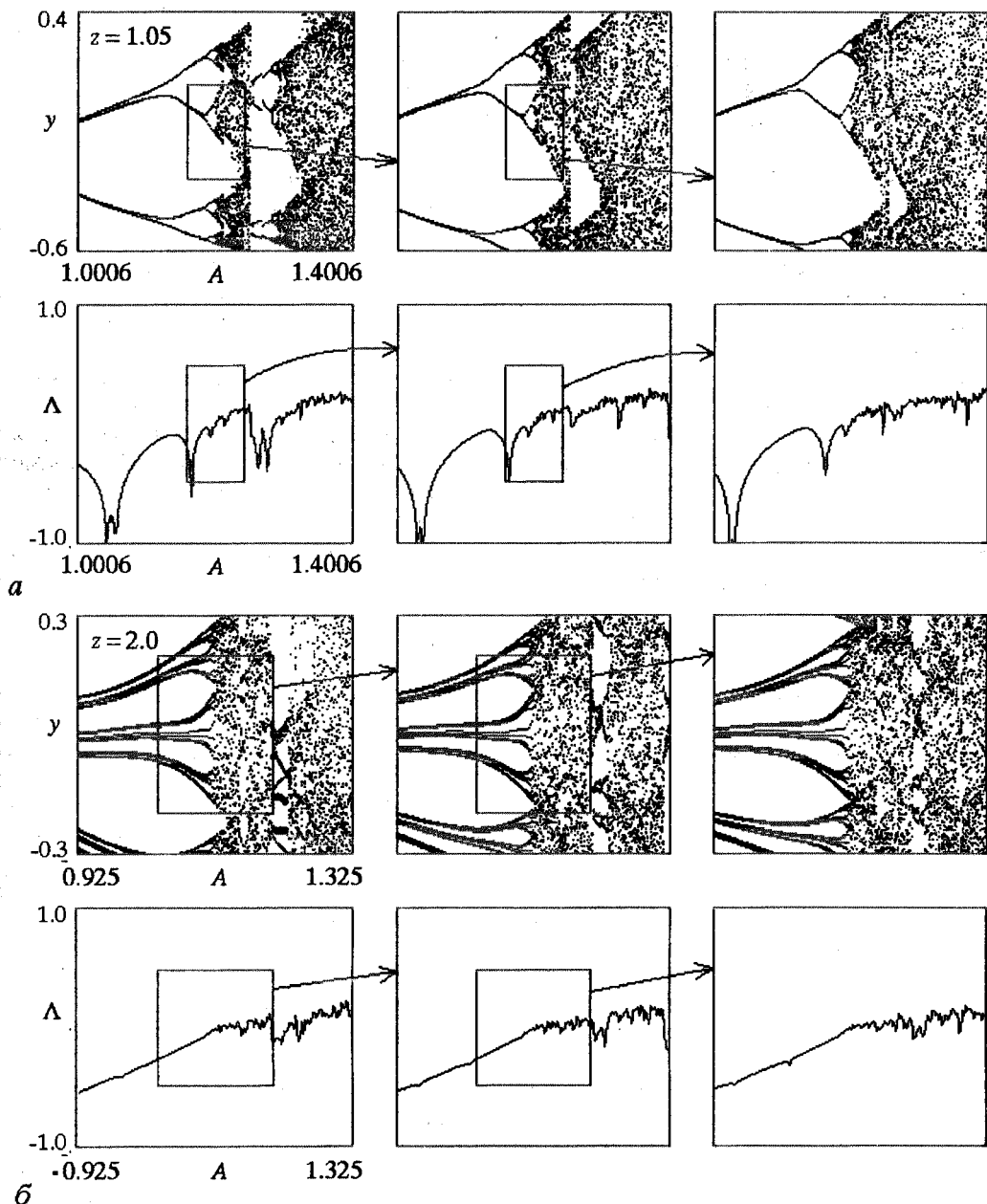


Рис. 19. Бифуркационные деревья на графиках y от λ и ляпуновские показатели Λ_y в зависимости от λ для системы двух отображений с односторонней связью (34): а - в первой подсистеме $z=1.05$, $\lambda=1.08164912$, во второй - фейгенбаумовский скейлинг, факторы пересчета масштаба по оси y и λ , соответственно α_F и δ_F ; б - в первой подсистеме $z=2$, $\lambda=1.401155189$, во второй - нефейгенбаумовский скейлинг, факторы пересчета масштаба по оси y и λ , соответственно $\alpha_B = -1.50532$ и $\delta_B = 2.39272$

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda |x_n|^z, \\y_{n+1} &= 1 - Ay_n^2 - B|x_n|^z,\end{aligned}\tag{34}$$

где $z > 1$.

Выберем параметр λ так, чтобы он соответствовал точке накопления бифуркаций удвоения периода в первой подсистеме, и будем рассматривать ее как генератор фрактального сигнала (см. разд.3). Сопоставляя параметры этого фрактального сигнала $a = 1/|\alpha(z)|$ и $b = 1/|\alpha(z)|^z$ и расположение бифуркационной линии на рис.16, мы обнаруживаем, что при $z = 1.05$ точка лежит ниже, а при $z = 2$ - выше этой линии. Это значит, что поведение второй подсистемы на пороге хаоса будет определяться в первом случае фейгенбаумовской, а во втором - нефейгенбаумовской неподвижной точкой РГ уравнений.

Отсюда следует, что динамика второй подсистемы в зависимости от управляющего параметра A в первом случае должна подчиняться скейлингу с классическим масштабным фактором $\delta_F = 4.6692\dots$, тогда как во втором случае масштабный фактор будет другим. В соответствии с численными данными табл.2, масштабный фактор для динамической переменной равен в этом случае -1.54945 , а для управляющего параметра 2.44700 . Действительно, как мы знаем, при однонаправленной связи двух логистических отображений возникает тип критического поведения, названный бикритическим (см. [23,24,11,22,26,27] и разд.3). Приведенные значения масштабных констант хорошо согласуются с результатами для бикритичности (соответственно, $-1.50532\dots$ и $2.39272\dots$).

На рис. 19 показаны бифуркационные деревья и графики ляпуновских показателей, построенные для модельной системы (34) при $z = 1.05$ и 2. Параметр первой подсистемы отвечает точке накопления удвоений периода при данном z , соответственно, $\lambda = 1.0816491238\dots$ и $1.401155189\dots$; константа связи $B = 0.375$. Фрагменты картинок, показанные в увеличенном виде, демонстрируют скейлинг, согласующийся с проведенным анализом.

Заключение

Достигнутые за последние годы успехи в области теории фракталов и ее приложений доказали плодотворность этого подхода, существенно повлияли на формирование научной картины мира. С одной стороны, идеи фрактальной геометрии позволяют описывать и интерпретировать как фракталы многие естественные объекты, которые имеют самподобную (в той или иной степени) структуру в широком диапазоне масштабов. В частности, вошли в обиход и получили распространение количественные характеристики, такие как фрактальная размерность, отражающие иерархические свойства фрактальных объектов. С другой стороны, идея фрактала подразумевает наличие определенной системы правил (детерминированных или стохастических), позволяющих воспроизводить структуру шаг за шагом от одних масштабов к другим. Сформулировать в явном виде такую систему правил - это значит сконструировать точную или приближенную теоретическую модель фрактального объекта.

В этом ключе можно рассматривать и проблему фрактальных сигналов. В этой статье обсуждается только одна простая модель, которая, тем не менее, позволяет описывать свойства достаточно широкого класса сигналов, порождаемых нелинейными системами на пороге возникновения хаоса. Можно надеяться, что идея конструирования моделей фрактальных сигналов с использованием более сложных «правил игры», как детерминированных, так и стохастических, окажется плодотворной для описания и анализа широкого круга явлений, встречающихся в разных областях в природе и технике.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 93-02-16169).

Библиографический список

1. *Peinke J., Castaing B., Chabaud B., et al.* On a fractal and an experimental approach to turbulence.
2. *Schroeder M.* Fractals, Chaos, Power Laws. Freeman & C°, NY, 1991. P. 295.
3. *Ebeling W., Nicolis G.* Entropy of symbolic sequences: The role of correlations // *Europhysics Letters.* 1991. Vol. 14, № 3. P. 191.
4. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Воздействие фрактального сигнала на систему Фейгенбаума и бифуркация в уравнении ренормгруппы // *Изв.вузов. Радиофизика.* 1991. Т. 34, № 6. С. 661.
5. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Period doubling system under fractal signal: bifurcation in the renormalization group equation // *Chaos, Solitons and Fractals.* 1991. Vol. 1, № 4. P. 355.
6. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* Генератор фрактального сигнала // *Письма в ЖТФ.* 1992. Т. 18, вып.24. С. 19.
7. *Feigenbaum M.J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // *J. Stat. Phys.* 1978. Vol. 19, № 1. P. 25.
8. *Feigenbaum M. J.* The universal metric properties of nonlinear transformations // *J. Stat. Phys.* 1979. Vol. 21, № 6. P. 669.
9. *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем // *УФН.* 1983. Т. 141, № 2. С. 343.
10. *Halsey T. S., Jensen M. H., Kadanoff L. P., Procaccia I., Shraiman B.I.* Fractal measures and their singularities // *Phys. Rev.* 1986. Vol. A33. P. 1141.
11. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Bicritical dynamics of period-doubling system under the fractal signal // *Int. J. of Bifurc. and Chaos.* 1991. Vol.1, № 4. P. 839.
12. *Кузнецов С.П.* Каскад удвоений периода в комплексном кубическом отображении: ренормгрупповой анализ и количественная универсальность (в печати).
13. *Huberman B., Zisook A.* Power spectra of strange attractors // *Phys. Rev. Lett.* 1981. Vol. 26. P. 626.
14. *Nauenberg M., Rudnik J.* Universality and the power spectrum at the onset of chaos // *Phys. Rev.* 1981. Vol. B24. P. 493.
15. *Hu B., Mao J.M.* Period Doubling: universality and critical point order // *Phys.Lett.* 1982. Vol. 25A, № 6. P. 3259.
16. *Van der Weele J.P., Capel H.W., Kluiving R.* On the scaling factors (z) and (\bar{z}) // *Phys.Lett.* 1986. Vol. A119, № 1. P. 15.
17. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. С. 239.
18. *Chang S.J., Wortis M., Wright J.* Iterative properties of a one-dimensional quartic map: Critical lines and tricritical behavior // *Phys.Rev.* 1981. Vol. A24. P.2669.
19. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* Дерево сверхустойчивых орбит и скейлинг в трехпараметрических отображениях // *Письма в ЖТФ.* 1992. Т. 18, вып.21. С. 34.
20. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Three- parameter scaling for one-dimensional maps // *Phys.Lett.* 1994. Vol. A189. P. 367.
21. *Eckmann J.P., Koch H., Wittwer P.* Existence of a fixed point of the doubling transformation for area-preserving map of the plane // *Phys.Rev.* 1982. Vol.A26. P. 720.
22. *Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* New types of critical dynamics for two-dimensional maps // *Phys.Lett.* 1992. Vol. A162, № 3. P. 236.
23. *Безручко Б.П., Гуляев Ю.В., Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Новый тип критического поведения связанных систем при переходе к хаосу // *Доклады АН СССР.* 1986. Т. 287, № 3. С. 619.
24. *Кузнецов С.П.* Динамика двуз однонаправленно связанных систем Фейгенбаума у порога гиперхаоса. Ренормгрупповой анализ // *Изв.вузов Радиофизика.* 1990. Т. 33, №7. С. 788.
25. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Variety of types of critical behavior

- and multistability in period doubling systems with uni-directional coupling near the onset of chaos // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 1993. Vol. 3, № 1. P. 139.
26. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Multi-parameter transition to chaos and fractal nature of critical attractors // In book: *Fractals in the Natural and Applied Sciences* / Ed. M. Novak. Elsevier Science, B.V. 1994. P. 413.
27. *Erastova E.N., Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Two-parameter criticality in nonlinear systems near the onset of chaos: *Proc. Int. Seminar «Nonlinear Circuits and Systems»*. M., 1992. Vol. 2. P. 131.
28. *MacKay R.S., Van Zeijts J.B.* Period doubling for bimodal maps: A Horseshoe for a Renormalization Operator // *Nonlinearity*. 1988. Vol. 1. P. 253.
29. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Chua L.O.* Two-parameter study of transition to chaos in Chua's circuit: Renormalization Group, Universality and Scaling // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 1993. Vol. 3, № 4. P. 943.
30. *Кузнецов С.П.* Критический квазиаттрактор: бесконечное самоподобное множество устойчивых циклов, возникающих при двухпараметрическом анализе перехода к хаосу // *Письма в ЖТФ*. 1994. Т. 20, вып. 10. С. 11.
31. *Гольдберг А.И., Синай Я.Г., Ханин К.М.* Универсальные свойства для последовательности бифуркаций удвоения периода // *УМН*. 1983. Т. 38, № 1. С. 159.
32. *Cvitanovic P., Myrheim J.* Universality for period n-tupling in complex mappings // *Phys. Lett.* 1983. Vol. 94A. P. 329.
33. *Cvitanovic P., Myrheim J.* Complex universality // *Commun. Math. Phys.* 1989. Vol. 121. P. 225.
34. *Иосс Ж., Джозеф Д.* Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир, 1983.
35. *Балеску Р.* Равновесная и неравновесная статистическая механика. М.: Мир, 1978. Т. 1.

*Институт радиотехники и электроники
РАН, Саратовский филиал*

Поступила в редакцию 13.01.95

FRactal Signal and Dynamics of Periodic-Doubling Systems

A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov and I.R. Sataev

The model of fractal signal having a phase portrait in a form of two-scale Cantor set provides a possibility to describe many real signals generating by dynamical systems at the onset of chaos and to treat them in a unified way. The points in the parameter plane of the fractal signal are outlined, which correspond to these real types of dynamical behavior. Simple electronic circuit admitting experimental realization is suggested, that generates the fractal signal with tunable parameters. Renormalization group analysis is developed for the case of period-doubling system forced by the fractal signal. It is shown that a bifurcation takes place in the RG equation, and the behavior at the onset of chaos may be described by either Feigenbaum or non-Feigenbaum fixed point solutions. The results of numerical simulations are presented to illustrate the scaling properties of the dynamics forced by the fractal signal.