



## ГИБРИД УДВОЕНИЙ ПЕРИОДА И КАСАТЕЛЬНОЙ БИФУРКАЦИИ: КОЛИЧЕСТВЕННАЯ УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ И ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СКЕЙЛИНГ

*С.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев*

На примере простого двумерного необратимого отображения исследуется универсальная самоподобная топография пространства параметров, которая может встретиться типичным образом при двухпараметрическом анализе перехода к хаосу.

Хорошо известны два типичных сценария эволюции режимов динамики нелинейных систем при изменении управляющего параметра - через каскад удвоений периода и через касательную бифуркацию («перемежаемость») [1,2]. При двухпараметрическом анализе перехода к хаосу может встретиться такая ситуация, когда изменение одного параметра приводит к удвоениям периода, а другого - к касательной бифуркации. При этом на плоскости параметров линия накопления бифуркаций удвоения периода (фейгенбаумовская критическая линия) оканчивается в некоторой критической точке коразмерности два. Динамика в этой точке допускает анализ методом ренормгруппы (РГ) на основе двумерного обобщения преобразования удвоения Фейгенбаума [3-7]:

$$\begin{aligned} g(X, Y) &\rightarrow \alpha g(g(X/\alpha, Y/\beta), f(X/\alpha, Y/\beta)), \\ f(X, Y) &\rightarrow \beta f(g(X/\alpha, Y/\beta), f(X/\alpha, Y/\beta)), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  - масштабные константы, выбранные так, чтобы выполнялись условия нормировки  $g(0,0) = 1, f(0,0) = 1$ . Рассматриваемой ситуации отвечает решение уравнений (1) в виде седлового цикла периода два

$$(g_1, f_1) \rightarrow (g_2, f_2) \rightarrow (g_1, f_1) \rightarrow (g_2, f_2) \rightarrow \dots \quad (2)$$

Здесь  $g_1, f_1, g_2, f_2$  - функции двух переменных, для которых мы численно нашли полиномиальные аппроксимации, приведенные в табл.1. Факторы, характеризующие пересчет масштаба динамических переменных за период цикла, равны  $\alpha_1 \alpha_2 = \alpha_* = 6.565349$  и  $\beta_1 \beta_2 = \beta_* = 22.120227$ . В нашей предыдущей работе [7] данный тип критического поведения был обозначен символом *C* (от слова «cycle»).

Анализ линеаризованного уравнения (1) вблизи цикла (2) выявляет два существенных собственных числа  $\delta_1 = 92.431263$  и  $\delta_2 = 4.192444$  [7]. Они ответственны за скейлинговые свойства универсальной топографии двумерного

Полиномиальное представление функций  $g_1, f_1, g_2, f_2$ ,  
отвечающих седловому циклу периода 2 для уравнения (1)

	1	X <sup>2</sup>	X <sup>4</sup>	X <sup>6</sup>	X <sup>8</sup>	X <sup>10</sup>	X <sup>12</sup>	X <sup>14</sup>	X <sup>16</sup>
1	1	-1.277	.08729	.00628	-.00077	.00002			
Y		-.49955	.13906	.00422	-.00178	.00012			
Y <sup>2</sup>	.04634	-.00148	-.00142	.00018					
Y <sup>3</sup>	-.00108	-.00045	.00012	-.00001				$g_1(X, Y)$	
Y <sup>4</sup>	-.00004	.00004	-.00001						
1	1	-2.32102	.39699	.0017	-.00489	.00043			
Y	.22671	.50507	-.03003	-.00829	.00144	-.00003	-.00001		
Y <sup>2</sup>	.14401	-.03241	-.00414		.00173	-.00012	-.00001		
Y <sup>3</sup>	-.00869	-.00035	.00096		-.00014				
Y <sup>4</sup>	.00014	.00024	-.00008					$f_1(X, Y)$	
Y <sup>5</sup>	.00002	-.00002							
1	1	-1.52925	.0194	.04473	-.00383		-.00013	.00004	
Y	.23143	-.05923	-.02455	.00454	-.00003		-.00006		
Y <sup>2</sup>	.00999	.00381	-.00179	.0001	.00003				
Y <sup>3</sup>	-.00013	.00029	-.00004	-.00001				$g_2(X, Y)$	
Y <sup>4</sup>	-.00002	.00001							
1	1	-1.65976	-1.44352	.4013	.00759	-.00668	.0001	.00014	-.00002
Y	1.34915	.22124	-.27816	.01273	.00723	-.00061	-.00017	.00004	
Y <sup>2</sup>	.00144	.05558	-.01033	-.00266	.00056	.00007	-.00003		
Y <sup>3</sup>	-.00324	.00229	.00038	-.00022	-.00001	.00001		$f_2(X, Y)$	
Y <sup>4</sup>	-.00016	-.00001	.00004						

пространства параметров в окрестности критической точки типа С. При надлежащем выборе системы координат картина должна воспроизводить себя бесконечно число раз при пересчете масштабов по двум осям координат на факторы  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . Исследование этой топографии - главная цель настоящей статьи.

Благодаря универсальности, для выявления устройства пространства параметров можно использовать любую систему, в которой имеет место данный тип поведения. Поэтому желательно изобрести простейшее удобное для исследования модельное отображение. Для этого возьмем сначала два несвязанных уравнения - отображение  $x_{n+1} = a - x_n^2$ , демонстрирующее при изменении параметра  $a$  каскад удвоений периода, и отображение  $y_{n+1} = dy_n + y_n^2$ , в котором при увеличении  $d$  имеет место касательная бифуркация. Далее включим связь, добавив члены  $by_n$  и  $(-x_n^2)$  соответственно в первое и второе уравнения. Оказывается, что для реализации интересующего нас типа динамики член  $y_n^2$  не существен, и его можно опустить. В итоге получаем двумерное необратимое отображение

$$x_{n+1} = a - x_n^2 + by_n, \quad y_{n+1} = -x_n^2 + dy_n. \quad (3)$$

с тремя параметрами  $a, b, d$ .

Зафиксируем для определенности некоторое отрицательное  $b$ . Тогда при небольших  $d$  с ростом параметра  $a$  можно наблюдать фейгенбаумовский каскад бифуркаций удвоения периода. Найдем точку  $i$ -ой бифуркации, где один из мультипликаторов  $2^i$ -цикла отображения (3), равен  $-1$ , а второй близок к нулю. Далее, будем увеличивать  $d$  и подстраивать  $a$  так, чтобы один мультипликатор сохранял значение  $-1$ . Двигаясь таким образом на плоскости параметров  $(a, d)$  вдоль бифуркационной кривой, доходим до точки  $(a_i, d_i)$ , в которой второй мультипликатор становится равным 1. Эту точку назовем терминальной. На каждой линии удвоений периода обнаруживается своя терминальная точка, так что

эти бифуркационные точки коразмерности два образуют, очевидно, бесконечный каскад (см. [7,8]). Оценивая предел последовательности терминальных точек  $(a_c, d_c)$ , получаем искомую критическую точку типа  $C$ . Попутно вычисляется предел последовательности элементов циклов при  $i \rightarrow \infty$ :  $x_c = \lim x_0 = 0$ ,  $y_c = \lim y_0$ . В общем случае сходимость оказывается медленной, но ее можно оптимизировать выбором параметра  $b$ . Для подобранного специально  $b = -0.6663$  мы нашли

$$a_c = 0.249902800, \quad d_c = 0.452902880, \quad y_c = -1.316447534. \quad (4)$$

Повторяя процедуру построения терминальных точек для бифуркационных кривых удвоенный периода при  $b > 0$  также можно найти критическую точку типа  $C$ . При  $b = 0.6544$ , когда сходимость наилучшая, имеем

$$a_c = 0.566620683, \quad d_c = 1.597132592, \quad y_c = 1.709352174. \quad (5)$$

Как оказывается, критические точки (4) и (5) отвечают двум различным возможным фазам выхода решения уравнения РГ на цикл периода два, соответственно,

$$(a) (g_1, f_1) \rightarrow (g_2, f_2) \rightarrow (g_1, f_1) \rightarrow (g_2, f_2) \rightarrow \dots \text{ и}$$

$$(b) (g_2, f_2) \rightarrow (g_1, f_1) \rightarrow (g_2, f_2) \rightarrow (g_1, f_1) \rightarrow \dots .$$

Замечательное свойство критических точек  $C$  состоит в том, что в этих точках реализуется бесконечное множество сосуществующих аттракторов. Если мы рассмотрим отображение  $X \rightarrow g_1(X, Y)$ ,  $Y \rightarrow f_1(X, Y)$ , то непосредственной проверкой можно убедиться, что оно имеет устойчивую неподвижную точку с мультипликаторами  $-0.725255$  и  $0.847450$ , а также неустойчивый цикл периода 2 с мультипликаторами  $-0.848865$  и  $1.174459$ . Напомним, однако, что в силу уравнения РГ отображение  $(g_1, f_1)$ , выполненное четыре раза и подвергнутое преобразованию масштаба  $X \rightarrow X/\alpha_*$ ,  $Y \rightarrow Y/\beta_*$ , превращается в себя. Поэтому наличие неподвижной точки влечет существование устойчивых циклов периода 4, 16, 64, ..., а наличие цикла периода два - неустойчивых циклов периода 8, 32, 128, ... с теми же самыми мультипликаторами. Следовательно, отображение  $X \rightarrow g_1(X, Y)$ ,  $Y \rightarrow f_1(X, Y)$  имеет бесконечное (счетное) множество аттракторов - циклов периода  $4^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , каждый из которых обладает своей областью притяжения в фазовом пространстве  $(X, Y)$ . Точно так же отображение  $X \rightarrow g_2(X, Y)$ ,  $Y \rightarrow f_2(X, Y)$  имеет в качестве аттракторов циклы периода  $2 \cdot 4^k$ . Если известна точка  $(X^*, Y^*)$ , принадлежащая циклу периода  $N$  отображения  $(g_1, f_1)$  или  $(g_2, f_2)$ , то точка  $(X^*/\alpha_*, Y^*/\beta_*)$  принадлежит циклу периода  $4N$ .

В критических точках отображения (3) циклы асимптотически большого периода обладают теми же свойствами. Как видно из табл. 2, мультипликаторы  $\mu$  хорошо воспроизводят универсальные значения уже начиная с периода 4. Подчеркнем, что для обеспечения соответствия переменных в модельном отображении уравнению РГ следует взять за начало координат точку  $(0, y_c)$ , то есть положить  $X \propto x$ ,  $Y \propto y - y_c$ .

На рис. 1 показаны карты динамических режимов для отображения (3) на плоскости параметров  $(a, d)$ . Структура, реализующаяся вблизи критических точек типа  $C$  достаточно сложна, обладает иерархической организацией и характеризуется наличием мультистабильности. Чтобы получше в ней разобраться, введем *скейлинговые координаты* в пространстве параметров, в которых наиболее просто выражались бы свойства самоподобия картинок.

Поместим начало отсчета в критическую точку  $(a_c, b_c)$ , и произвольным

## Циклы отображения (3) в критических точках (4) и (5)

Период	Критическая точка (4)		Критическая точка (5)	
	$x, y$	$\mu_{1,2}$	$x, y$	$\mu_{1,2}$
4	$4.70280 \cdot 10^{-2}$ $-1.249667476$	$-0.746088$ $0.836959$	$8.77511 \cdot 10^{-2}$ $1.647055174$	$-0.852625$ $1.178436$
8	$-3.29270 \cdot 10^{-2}$ $-1.303805726$	$-0.841748$ $1.171938$	$-1.86563 \cdot 10^{-2}$ $1.693668330$	$-0.723036$ $0.847867$
16	$7.10492 \cdot 10^{-3}$ $-1.313341282$	$-0.729383$ $0.845411$	$1.33566 \cdot 10^{-2}$ $1.706481364$	$-0.849490$ $1.174766$
32	$-5.04333 \cdot 10^{-3}$ $-1.315875350$	$-0.847568$ $1.174246$	$-2.85310 \cdot 10^{-3}$ $1.708642053$	$-0.724878$ $0.847642$
64	$1.07864 \cdot 10^{-3}$ $-1.316306374$	$-0.725956$ $0.846812$	$2.03414 \cdot 10^{-3}$ $1.709221776$	$-0.848973$ $1.174447$
128	$-7.68793 \cdot 10^{-4}$ $-1.316421603$	$-0.848677$ $1.174723$	$-4.34772 \cdot 10^{-4}$ $1.709320067$	$-0.725202$ $0.847534$
256	$1.64128 \cdot 10^{-4}$ $-1.316441156$	$-0.725310$ $0.847087$	$3.09820 \cdot 10^{-4}$ $1.709346278$	$-0.848877$ $1.174403$
512	$-1.17196 \cdot 10^{-4}$ $-1.3164463$	$-0.848865$ $1.174791$	$-6.62279 \cdot 10^{-5}$ $1.709350733$	$-0.725256$ $0.847509$

образом выберем направление  $a$  в качестве первой оси координат  $\xi$ . Далее положим<sup>1</sup>

$$a = a_c + \xi - \eta + v\eta^2 - w\eta^3,$$

$$d = d_c - u\eta, \quad (6)$$

где  $u, v, w$  - некоторые константы. Сначала подберем величину  $u$  так, чтобы производные по  $\eta$  от мультипликатора  $\mu_k$  для циклов периода  $4^k$  и  $2 \cdot 4^k$  вели себя как  $d\mu_k/d\eta \propto (\delta_2)^k$ , затем  $v$  так, чтобы вторые производные  $d^2\mu_k/d\eta^2$  были пропорциональны  $(\delta_2)^{2k}$  и, наконец,  $w$  так, чтобы третьи производные  $d^3\mu_k/d\eta^3$  изменялись как  $(\delta_2)^{3k}$ . Эти соотношения должны выполняться наилучшим образом для обоих мультипликаторов, поэтому при расчетах целесообразно использовать метод наименьших квадратов. В результате для фигурирующих в (6) констант мы нашли:

для точки (4)

$$u = -0.79016607, \quad v = -1.546069, \quad w = 2.15; \quad (7)$$

для точки (5)

$$u = 0.45431477, \quad v = -0.782222, \quad w = 0.65. \quad (8)$$

<sup>1</sup> При выборе формы записи соотношений (6) мы учли, что  $\delta_2 < \delta_1$ ,  $\delta_2^2 < \delta_1$ ,  $\delta_2^3 < \delta_1$ , но  $\delta_2^4 > \delta_1$ . Поэтому при пересчете масштабов  $\xi \rightarrow \xi/\delta_1$ ,  $\eta \rightarrow \eta/\delta_2$  поправки  $\eta^2$  и  $\eta^3$  оказываются существенными, тогда как члены четвертого и более высокого порядка несущественны.

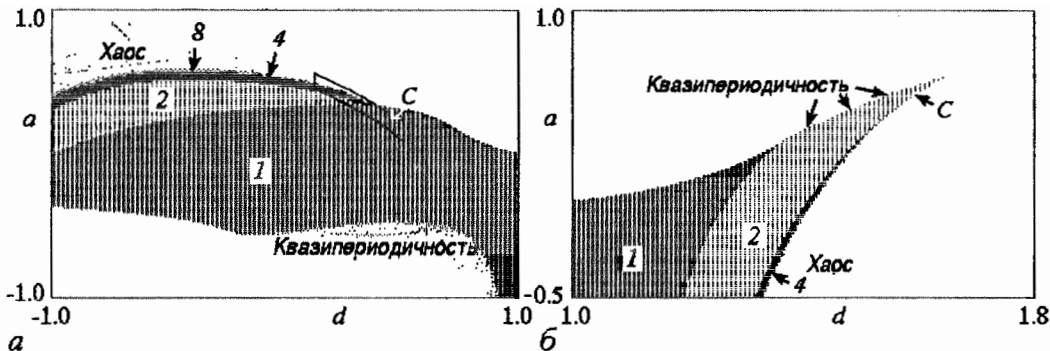


Рис. 1. Топография динамических режимов отображения (3) в областях плоскости параметров  $(a, d)$  включающих критические точки типа  $C$  (4) и (5) ( $a$  и  $b$ , соответственно). Различной штриховкой показаны области устойчивости циклов различного периода; период обозначен цифрами. Криволинейный четырехугольник отвечает области, показанной на рис. 2,  $a$

На рис. 2 и 3 показано, как выглядят в скейлинговых координатах области устойчивости циклов периода  $4^k$  и  $2 \cdot 4^k$  при  $k = 1, 2$ , и  $3$  в окрестности критической

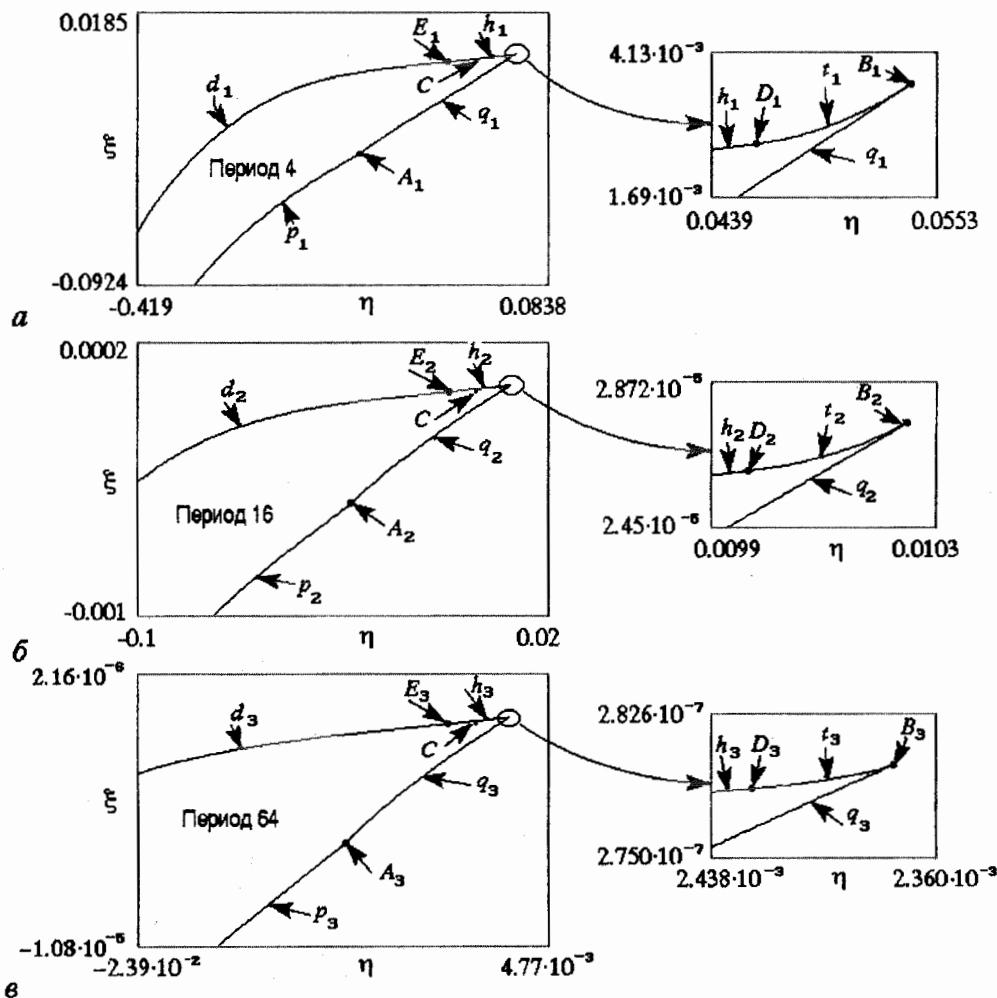


Рис. 2. Области устойчивости циклов периода 4( $a$ ), 16( $б$ ), и 64( $в$ ) отображения (3). Буквами  $p$  и  $d$  отмечены бифуркационные кривые рождения и потери устойчивости цикла через удвоение периода,  $q$  - бифуркация Хопфа,  $h$  - жесткая flip-бифуркация,  $t$  - касательная бифуркация

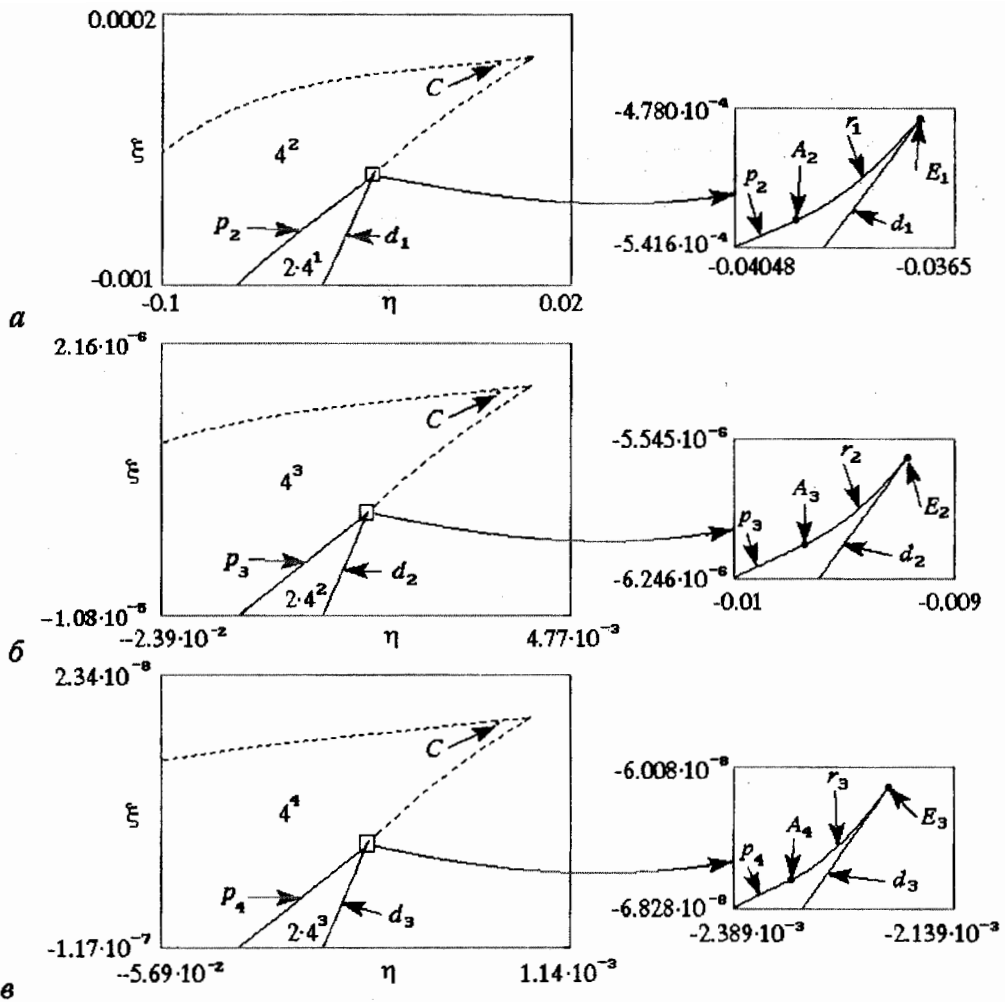
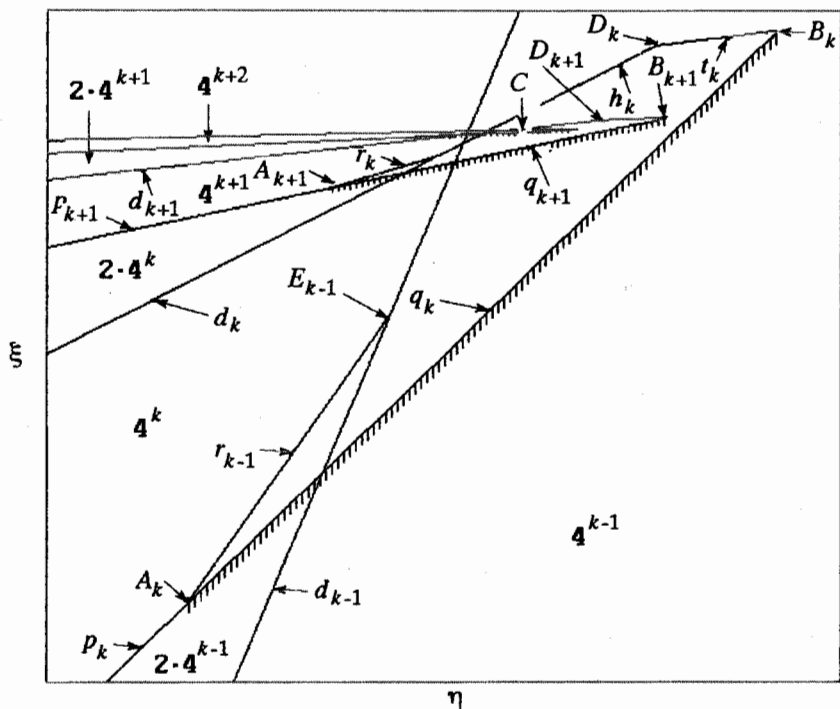


Рис. 3. Области устойчивости циклов периода 8(а), 32(б), и 128(в) отображения (3) вблизи критической точки типа C (4). Буквами  $p$  и  $d$  отмечены кривые рождения и потери устойчивости цикла через удвоение периода,  $r$  - жесткая бифуркация потери устойчивости

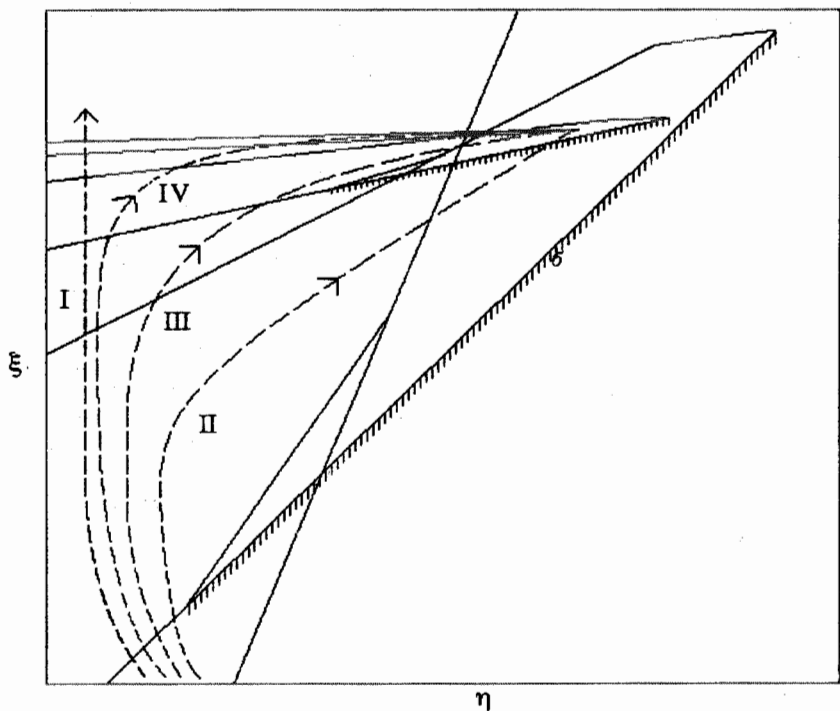
точки (4). Буквами  $p, q, t, h, d, r$  обозначены различные сегменты границ устойчивости (см. ниже), а буквами  $A, B, D, E$  - точки, где эти сегменты стыкуются друг с другом. Отметим, что критическая точка  $C$  принадлежит областям устойчивости периода  $4^k$  циклов и не принадлежит областям устойчивости циклов периода  $2 \cdot 4^k$ . Каждая последующая картинка на рис. 2 и 3 увеличена по сравнению с предыдущей в  $\delta_1=92.431$  раз по вертикальной оси и в  $\delta_2=4.192$  раз по горизонтальной. Хорошее соответствие картинок а, б, и в на рис. 2 и 3 служит наглядной демонстрацией скейлинга, присущего критическому поведению типа C.

На рис. 4, а показано качественно взаимное расположение основных бифуркационных кривых, отвечающих потере устойчивости циклов различного периода. Обозначения кривых и точек те же, что на рис.2, 3. Граница устойчивости цикла периода  $4^k$  содержит, во-первых, участок  $p_k$ , где этот цикл рождается в результате бифуркации удвоения периода. На этом участке один мультипликатор цикла равен 1, а второй по модулю меньше единицы. Данный участок оканчивается в точке  $A_k$ , где оба мультипликатора равны 1. С этого места граница области устойчивости представляет собой линию бифуркации Хопфа  $q_k$ , переход которой влечет рождение квазипериодического движения. Вторым концом линии  $q_k$

является точка  $B_k$ , где оба мультипликатора цикла снова равны 1. Следующий, относительно короткий, участок границы  $t_k$  представляет собой линию жесткого



a



б

Рис. 4. Схематический набросок взаимного расположения бифуркационных кривых потери устойчивости циклов различного периода в окрестности критической точки типа  $C$  (a) и некоторые примеры траекторий движения по плоскости параметров (б): I - путь, отвечающий фейгенбаумовскому удвоению периода, II, III и IV - пути, приводящие к реализации в точке  $C$  устойчивых циклов периода  $4^k$ ,  $4^{k+1}$  и  $4^{k+2}$ , соответственно. Обозначения поясняются в тексте

перехода и отвечает касательной бифуркации (один мультипликатор равен 1, а второй по модулю меньше единицы). Участок  $t$  оканчивается в точке  $D_k$ , в которой мультипликаторы равны 1 и -1. Далее тянется участок границы  $h_k$ , отвечающий жесткой потере устойчивости с переходом одного из мультипликатора через -1. Начиная с некоторой точки  $E_k$  линия  $h_k$  превращается в обычную линию бифуркации удвоения периода  $d_k$ . Граница области устойчивости цикла периода  $2 \cdot 4^k$  содержит уже упоминавшиеся сегменты  $d_k$  и  $p_{k+1}$ , первый из которых соответствует рождению этого цикла, а второй - потере устойчивости в результате бифуркации удвоения периода. Концевые точки этих сегментов  $A_{k+1}$  и  $E_k$  соединены линией жесткой бифуркации  $r_{k+1}$ , связанной с переходом одного из мультипликаторов цикла через 1. В точке  $A_{k+1}$  мультипликаторы цикла периода  $2 \cdot 4^k$  равны -1 и 1. Последовательность терминальных точек, использованная нами для нахождения критической точки типа  $C$ , образована точками  $D_{k-1}, A_k, D_k, A_{k+1}, D_{k+1}, \dots$ .

Если двигаться по плоскости параметров вдоль траектории I (рис.4,б), то наблюдается обычный фейгенбаумовский каскад удвоений периода. Достигая различными путями точки  $C$ , теоретически можно добиться реализации в системе любого из бесконечного множества аттракторов. Например, если двигаться по пути II, то в точке  $C$  реализуется цикл периода  $4^k$ , по пути III - цикл периода  $4^{k+1}$ , по пути IV - цикл периода  $4^{k+2}$ .

Поведение, аналогичное описанному, обнаруживается и во второй критической точке (5) с той лишь разницей, что циклы периода  $4^k$  и  $2 \cdot 4^k$  меняются ролями.

Мы рассмотрели критическое поведение типа  $C$  в двумерном необратимом отображении - простейшей системе, где оно возникает. В реалистичных моделях диссипативных нелинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями, этот тип поведения тоже, по-видимому, будет встречаться при двухпараметрическом анализе. Для этого размерность пространства состояний должна быть 4 или выше. Мы полагаем, что подходящие примеры может доставить динамика под внешним периодическим воздействием систем типа Лоренца, Ресслера, Чуа и др. при анализе каскадов удвоений периода вблизи края языка Арнольда.

Отметим, что наблюдение скейлинговых свойств, присущих критическому поведению типа  $C$ , осложняется наличием в спектре линеаризованного ПГ преобразования собственного числа (формально несущественного), которое лишь немного меньше единицы [7]. По этой причине количественная универсальность в общем случае будет проявляться лишь после очень большого количества удвоений периода. На примере модельного отображения мы видели, как можно преодолеть это затруднение. Если имеется третий параметр, позволяющий управлять уровнем медленно затухающей компоненты решения уравнения ПГ, то его надо подобрать так, чтобы исключить эту компоненту. Поэтому мы полагаем, что критическое поведение типа  $C$  может быть наблюдаемо в численных расчетах и экспериментах. Характерными признаками этого типа поведения является наличие бесконечного, самоподобного множества аттракторов в критической точке, а также характерной топографии двумерного пространства параметров.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 93-02-16169).*

## Библиографический список

1. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
2. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.
3. Feigenbaum M. J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // J. Stat. Phys. 1978. Vol.19, № 1. P. 25.



4. Feigenbaum M. J. The universal metric properties of nonlinear transformations // J. Stat. Phys. 1979. Vol. 21, № 6. P. 669.

5. Eckmann J.P., Koch H. and Wittwer P. Existence of a fixed point of the doubling transformation for area-preserving maps of the plane // Phys.Rev.A. 1982. Vol. 26. P.720.

6. Widom M. and Kadanoff L.P. Renormalization group analysis of area-preserving maps // Physica D. 1982. Vol. 5. P. 287.

7. Kuznetsov S.P. and Sataev I.R. New types of critical dynamics for two-dimensional maps // Phys.Lett.A. 1992. Vol. 162. P. 236.

8. Cathala J.C., Kawakami H. and Mira C. Singular points with two multipliers,  $S_1 = -S_2 = 1$ , in the bifurcation curves of maps // Int.J. of Bifurcation and Chaos. 1992. Vol. 2. P. 1001.

*Институт радиотехники и электроники  
РАН, Саратовский филиал*

*Поступила в редакцию 13.10.94*

## **A HYBRID OF PERIOD - DOUBLING CASCADE AND TANGENT BIFURCATION: QUANTITATIVE UNIVERSALITY AND TWO-PARAMETER SCALING**

*S.P.Kuznetsov, I.R.Sataev*

Universal self-similar topography of the parameter space which may occur in two-parameter analysis of transition to chaos is investigated using a simple two-dimensional model map.