



ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЛАМПЫ ОБРАТНОЙ ВОЛНЫ

А.П. Кузнецов, А.П. Широков

Получено дискретное двухпараметрическое отображение, приближенно описывающее динамику во времени амплитуды поля в релятивистской лампе обратной волны. Построена карта динамических режимов на плоскости параметр взаимодействия – релятивистский параметр. Найдена трикритическая точка и исследован нефейгенбаумовский каскад бифуркаций удвоения периода.

Введение

В настоящее время ведутся интенсивные исследования динамических систем, способных демонстрировать хаотическое поведение, в частности, различных радиофизических устройств. Среди них можно назвать нелинейный колебательный контур с внешним воздействием [1,2], электронную схему Чуа [3,4], различные радиофизические генераторы [5–7], а также практически все известные генераторы с распределенным взаимодействием, относящиеся к микроволновой электронике [8–11]. Однако полноценное адекватное описание в терминах нелинейной динамики пока возможно лишь для систем, представляемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Такие системы в той или иной мере поддаются аналитическому, а в большей степени – численному исследованию. Для них можно найти стационарные и периодические решения, исследовать их устойчивость, определить бифуркационные значения параметров, построить карты динамических режимов. Значительно хуже обстоит дело с анализом сложной динамики распределенных систем, которые описываются нелинейными уравнениями в частных производных. Причина этого состоит как в ограниченности соответствующих аналитических методов, так и в резком увеличении затрат машинного времени при переходе к численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. Так построение карты динамических режимов все еще остается за пределами возможностей современных компьютеров. Восполнить соответствующие пробелы можно, привлекая к анализу распределенных систем простые конечномерные дискретные модели. Идея построения таких моделей для популярных в микроволновой электронике систем типа электронный пучок – обратная электромагнитная волна, к которым относится лампа обратной волны и аналогичные ей устройства, была предложена в работе [12]. С помощью такой модели удастся предсказать существование каскада бифуркаций удвоения периода и возникновение хаоса в системе, наблюдаемых при увеличении тока пучка. В настоящем сообщении мы развиваем аналогичный подход в релятивистском случае.

1. Построение дискретного отображения

Для построения дискретного отображения вслед за [12] предположим, что обмен энергией между пучком электронов и электромагнитной волной происходит исключительно в двух узких интервалах, расположенных в начале и в конце пространства взаимодействия. (Соответствующее приближение известно в микроволновой электронике как «клизотронная модель» [12].) Известные уравнения, описывающие эволюцию во времени и пространстве амплитуды электромагнитного поля и движение пучка, в этом случае принимают вид [12,13]

$$\partial^2\theta/\partial\xi^2 = -(1 + v\partial\theta/\partial\xi)^{3/2} \operatorname{Re}\{1/2L[\delta(\xi) + \delta(\xi-L)]Fe^{i\theta}\}, \quad (1)$$

$$\partial F/\partial\tau - \partial F/\partial\xi = -[1/\pi]_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta_0 1/2L[\delta(\xi) + \delta(\xi-L)]$$

с граничными условиями

$$\theta(0,\tau) = \theta_0, \quad \partial\theta(0,\tau)/\partial\xi = 0, \quad F(L+0,\tau) = 0.$$

Здесь θ – фаза электрона относительно волны, F – безразмерная комплексная амплитуда волны, $\tau \sim \tau - \xi/v_0$ – безразмерное «запаздывающее» время, ξ – безразмерная координата, L – безразмерная длина пространства взаимодействия, $v=2C(\gamma_0^2-1)$ – релятивистский параметр, C – модифицированный параметр усиления, γ_0 – отношение энергии электрона к энергии покоя на входе в пространство взаимодействия.

Модуляция электронов по скорости происходит на пушечном конце ЛОВ, и их грушировка развивается по мере движения вдоль системы. Таким образом в начале пространства взаимодействия (то есть при $\xi=0$) можно не учитывать воздействие пучка на поле, а в конце (то есть при $\xi=L$) – поля на пучок. Поэтому уравнения (1) упрощаются

$$\partial^2\theta/\partial\xi^2 = -(1 + v\partial\theta/\partial\xi)^{3/2} \operatorname{Re}(Fe^{i\theta})1/2L\delta(\xi), \quad (2)$$

$$\partial F/\partial\tau - \partial F/\partial\xi = -L\delta(\xi-L)/(2\pi) \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta_0. \quad (3)$$

Уравнение движения пучка (2) можно представить таким образом, чтобы в левой части стояла производная от некоторого выражения по ξ

$$\partial/\partial\xi[(2/v)(1 + v\partial\theta/\partial\xi)^{-1/2}] = \operatorname{Re}(Fe^{i\theta})1/2L\delta(\xi). \quad (4)$$

Теперь, полагая $F(\tau,0)=A(\tau)e^{i\varphi(\tau)}$, где $A(\tau)$ – модуль комплексной амплитуды волны в точке $\xi=0$ в момент времени τ , проинтегрируем уравнение (4) по ξ

$$(2/v)/(1 + v\partial\theta/\partial\xi)^{1/2} = 2/v + 1/2L A \cos(\theta_0 + \varphi). \quad (5)$$

После повторного интегрирования приходим к окончательному выражению для фазы электрона относительно волны

$$\theta = \theta_0 + \xi/v \{ [1 + 1/4vLA \cos(\theta_0 + \varphi)]^{-2} - 1 \}. \quad (6)$$

Как видно из формулы (6), после дельтообразного воздействия фазовая переменная для каждого электрона изменяется по линейному закону на протяжении его следования в пространстве взаимодействия. При этом коэффициент пропорциональности является функцией параметров L , v , а также начальной фазы электрона θ_0 и амплитуды модулирующей волны A , и может быть как положительным, так и отрицательным, что соответствует ускорению и замедлению электронов в момент воздействия волны в точке $\xi=0$.

Используя соотношение (6), уравнение возбуждения (3) можно представить в следующем виде:

$$\partial F / \partial \tau - \partial F / \partial \xi = L \delta(\xi - L) I, \quad (7)$$

где

$$I = -(e^{i\varphi} / 2\pi) \int_0^{2\pi} \exp\{-i[\alpha + (L/\nu)(1 + 1/4\nu L A \cos\alpha)^{-2} - L/\nu]\} d\alpha. \quad (8)$$

Здесь через I обозначен ток на выходе пространства взаимодействия. В области $0 < \xi < L$ источников нет, и уравнение (7) имеет общее решение в виде $F(\tau, \xi) = f(\tau + \xi)$, где f – некоторая функция. Учитывая, что $F(\tau, L + 0) = 0$, проинтегрируем уравнение (7) по ξ . Тогда нетрудно получить следующее выражение:

$$F(\tau, 0) = -I(L, \tau - L)L. \quad (9)$$

Поскольку в переменных τ, ξ скорость переноса возмущений в соответствии с уравнением (7) равна единице, то подставляя выражение для тока (8) в формулу (9) и полагая, что $F(\tau, 0) = A(\tau)e^{i\varphi(\tau)}$, получаем

$$A(T + \tau)e^{i\varphi(T + \tau)} = 1/2 L e^{i\varphi(\tau)} / \pi \int_0^{2\pi} \exp\{-i[\alpha + (L/\nu)(1 + 1/4\nu L A(\tau) \cos\alpha)^{-2} - L/\nu]\} d\alpha. \quad (10)$$

Взяв модуль этого выражения, приходим к уравнению для действительной амплитуды волны

$$A_{n+1} = L / (2\pi) \left| \int_0^{2\pi} \exp\{-i[\alpha + (L/\nu)(1 + 1/4\nu L A_n \cos\alpha)^{-2} - L/\nu]\} d\alpha \right|, \quad (11)$$

где введены обозначения $A_{n+1} = A(T + \tau)$ и $A_n = A(\tau)$, а n – дискретное время.

Уравнение (11) представляет собой одномерное двухпараметрическое отображение, в котором L – безразмерный параметр длины пространства взаимодействия, а ν – релятивистский параметр. В нерелятивистском пределе при стремящемся к нулю ν оно превращается в

$$A_{n+1} = 1/2 L^3 J_1(A_n), \quad (12)$$

где J_1 – функция Бесселя, что совпадает с выражением, найденным в [12].

2. Карта динамических режимов

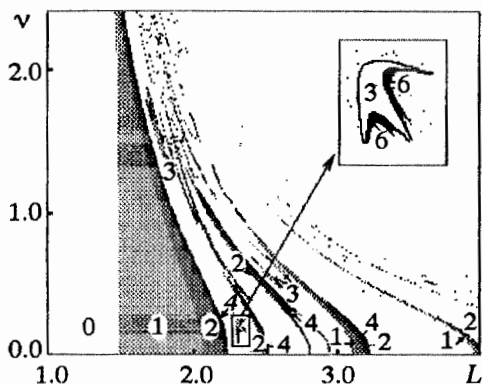


Рис. 1. Карта динамических режимов отображения (11). Цифрами обозначены следующие режимы: 0 – отсутствие колебаний; 1 – колебания с постоянной амплитудой; 2, 3, 4, 6 – автомодуляция по амплитуде с соответствующими периодами

На рис. 1 приведена карта динамических режимов, полученная при численном исследовании отображения (11). В области малых значений параметра $L < 1.6$ в дискретном отображении существует единственная неподвижная точка в нуле (рис. 2, а), причем, как нетрудно показать, она является устойчивой. При увеличении L происходит бифуркация (ее можно интерпретировать как бифуркацию «вилка»), в результате которой появляется новая устойчивая неподвижная точка, а точка в начале координат становится неустойчивой (рис. 2, б). При дальнейшем увеличении L происходят бифуркации удвоения периода: отличная от нуля неподвижная точка становится неустой-

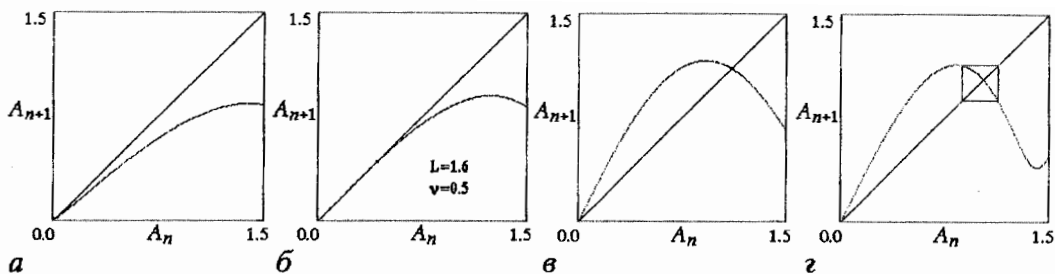


Рис. 2. Диаграммы Ламерея при различных значениях параметров L и v : а – $L=1.5$, $v=0.5$; б – $L=1.6$, $v=0.5$; в – $L=2.0$, $v=0.1$; г – $L=2.0$, $v=0.5$

чивой, и возникает цикл периода 2, затем и он теряет устойчивость, и рождается цикл периода 4 и т.д. до бесконечности. Бифуркационные значения параметров L_n сходятся к критическому значению L_{cr} по закону Фейгенбаума, причем величина L_{cr} зависит от релятивистского параметра v . Соответственно, на плоскости (L, v) имеется фейгенбаумовская критическая линия. В области слева от этой линии существует регулярная динамика, а справа от нее система может демонстрировать хаотическое поведение. В области хаоса находятся многочисленные островки периодических режимов.

Применительно к лампе обратной волны можно сказать, что при небольших значениях тока генерация отсутствует, а малые возмущения поля в системе затухают. При превышении током пучка некоторого порогового значения возникает генерация с постоянной амплитудой выходного сигнала. Затем этот режим становится неустойчивым к малым возмущениям, и появляется автомодуляция сигнала по амплитуде. Далее наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода автомодуляции, после чего в системе возможно как хаотическое поведение, так и весьма разнообразные режимы автомодуляции.

В нерелятивистском случае аналогичная картина установлена в [12] для дискретного отображения (12), причем она в определенной мере подтверждается и непосредственным численным исследованием исходных уравнений лампы обратной волны [14]. В работе [12] при численном решении дифференциальных уравнений в релятивистском случае было предсказано, что значение параметра L , при котором возникает автомодуляция, уменьшается с ростом релятивистского параметра v . Такой же характер зависимости наблюдается и на рис. 1. Как можно видеть, подобная ситуация соответствует уменьшению угла наклона касательной в неподвижной точке отображения (11) с ростом параметра v (рис. 2, в, г).

Карта динамических режимов на рис. 1 дает, однако, существенно более богатую количественную и качественную информацию о возможных режимах динамики в релятивистском случае.

3. Трикритическая точка

На рис. 3, а показан в увеличенном виде фрагмент карты динамических режимов, выделенный на исходном рис. 1. На нем присутствует характерная для мультимодальных одномерных отображений конфигурация линий удвоения периода – «crossroad area» по терминологии [15]. Представленный фрагмент карты соответствует области параметров, в пределах которой наблюдаются удвоения цикла периода 3 отображения (11). Линии, являющиеся границами областей устойчивости циклов удвоенного периода (6, 12, 24, ...), при увеличении n сходятся к фейгенбаумовской критической линии Γ_{cr} , которая теперь обрывается в так называемой трикритической точке [16].

На рис. 3, а показана также найденная численно линия Γ , соответствующая значениям параметров, при которых происходит отображение ближайшего к началу координат максимума в следующий за ним минимум.

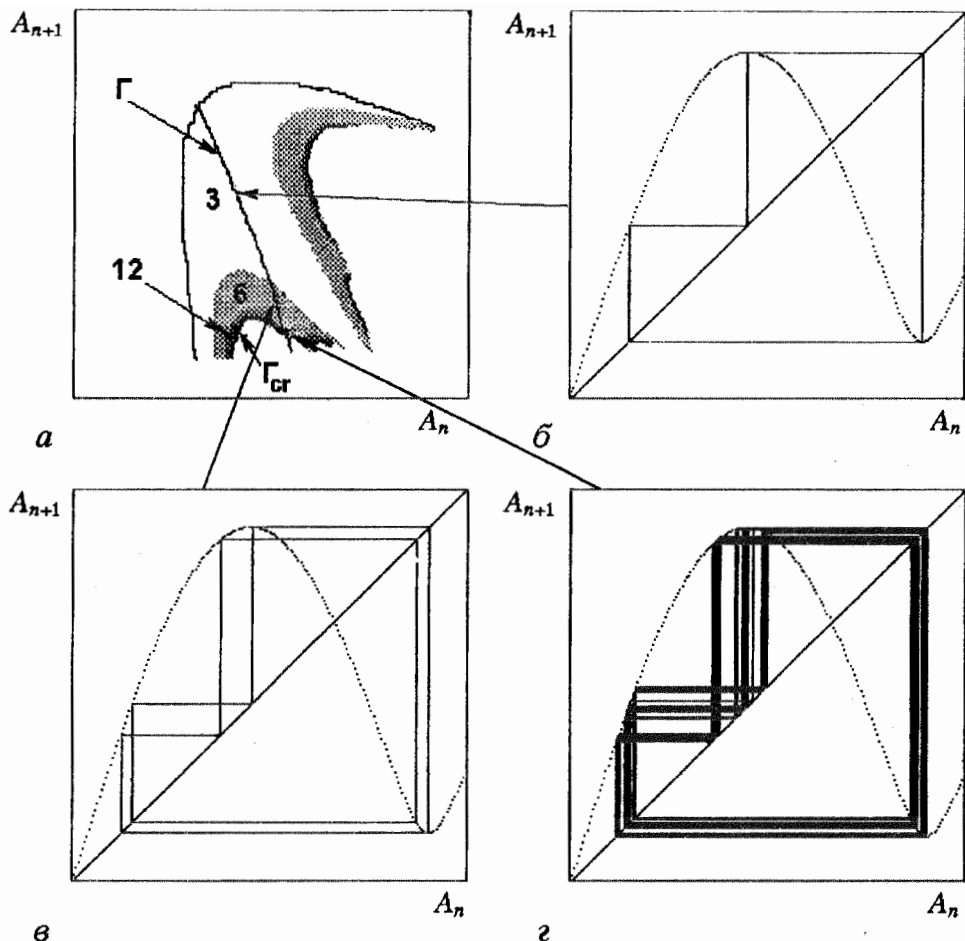


Рис. 3. Фрагмент карты динамических режимов (а) и итерационные диаграммы в некоторых характерных точках: б - $L=2.314$, $v=0.214$; в - $L=2.330$, $v=0.167$; г - $L=L_T$, $v=v_T$. Γ_{cr} обозначает фейгенбаумовскую критическую линию; Γ - линию, соответствующую значениям параметров, при которых происходит отображение экстремума в экстремум

Как мы уже отмечали, при движении по карте динамических режимов по типичному маршруту (например, вдоль линии $v=\text{const}$) наблюдается переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума. Однако при движении по особому маршруту, которым является линия Γ , можно наблюдать нефейгенбаумовский каскад бифуркаций удвоения периода. Соответствующие итерационные диаграммы показаны на рис. 3, б, в. Бифуркационные значения параметров приведены в таблице. Они накапливаются к предельной точке $L_T=2.334075433$, $v_T=0.158449576$. Используя данные таблицы, легко показать, что закон накопления бифуркационных точек соответствует геометрической прогрессии, однако, ее показатель $\delta_T=7.284$ отличен от известного фейгенбаумовского значения $\delta_F=4.669$ и характерен для отображений, имеющих экстремум четвертой степени. Причина этого состоит в том, что при условии отображения максимума в минимум дважды проитерированное отображение будет иметь экстремум четвертой степени [17]. Отметим, что предельная точка (L_T, v_T) является концевой точкой фейгенбаумовской линии, то есть трикритической точкой.

Итерационная диаграмма для отображения (11) в трикритической точке приведена на рис. 3, г. Видно, что аттрактор как бы организован «на базе» цикла периода 3, причем аттрактору принадлежат два экстремума. Трикритический

Значения параметров, соответствующих нефейгенбаумским бифуркациям удвоения периода, при движении вдоль линии Γ

Период цикла	L_n	ν_n
3	2.328043	0.176106
6	2.333301	0.160800
12	2.333970	0.1587700
24	2.3340610	0.1584929
48	2.33407350	0.15845479
96	2.334075200	0.158449576
.....
∞	2.334075433	0.158449576

аттрактор представляет собой фрактальное множество, подобное Канторовскому, и характеризуется дробной размерностью Хаусдорфа.

На рис. 4, *a* показано бифуркационное дерево, дающее зависимость переменной A на аттракторе от параметра L при движении по плоскости параметров вдоль линии Γ . Хорошо видны точки бифуркаций удвоения периода, в которых каждая ветвь расщепляется на две. Точно при трикритических значениях параметров L_T, ν_T существует бесконечное число «ветвей». Серия рис. 4, *a-v* иллюстрирует скейлинг на бифуркационном дереве. Каждый последующий рисунок серии представляет собой увеличенный фрагмент предыдущего. Пересчет картинок производился относительно трикритической точки по оси L с масштабным фактором $\delta_T=7.284686217$, а по оси A_n – с константой скейлинга

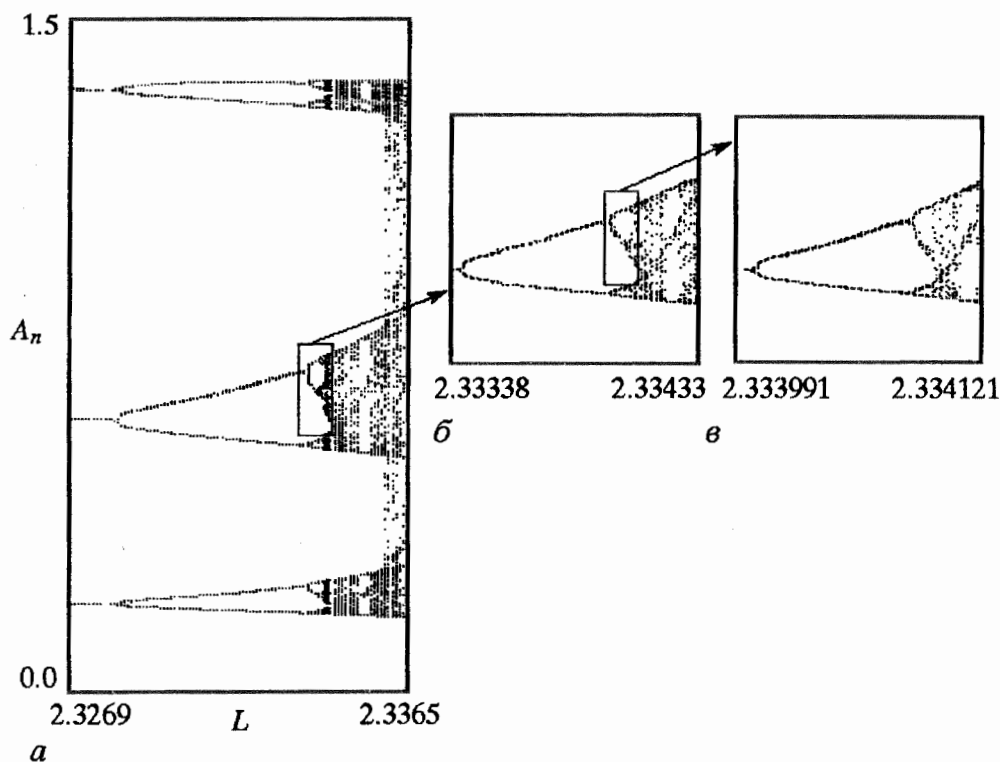


Рис. 4. Бифуркационное дерево и иллюстрации скейлинга в окрестности трикритической точки

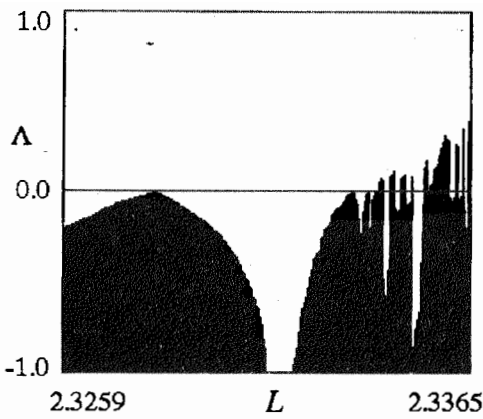


Рис. 5. График зависимости ляпуновского показателя от параметра L вдоль линии Γ

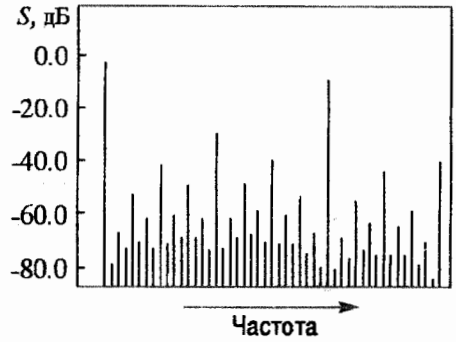


Рис. 6. Спектр отображения (11) в трикритической точке

$a_T = -1.6903029714$ (значения констант δ_T и a_T получены в [16] с помощью ренормгруппового анализа). Поскольку константа a_T отрицательна, то для того, чтобы наблюдалось совпадение картинок, все четные рисунки необходимо перевернуть.

График зависимости ляпуновского показателя от параметра L , соответствующий линии Γ , изображен на рис. 5. При значениях $L < L_T$ ляпуновский показатель Λ всюду отрицателен за исключением точек, в которых происходят бифуркации удвоения цикла, где Λ обращается в нуль. При превышении параметром L значения L_T показатель Ляпунова может быть положительным, что отвечает хаотическим режимам. В закритической области существуют также различные «окна» периодичности, которым соответствуют отрицательные значения ляпуновского показателя.

Спектр колебаний отображения (11) в трикритической точке представлен на рис. 6. Можно видеть, ярко «выраженную» гармонику, соответствующую циклу периода 3. Как и в фейгенбаумовском случае, спектр на рис. 6 имеет иерархическую организацию по уровням амплитуд субгармоник. Отметим, однако, что для трикритической точки перепад между субгармониками соседних уровней составляет 10.40 дБ [17] в отличие от универсального значения 13.35 дБ, соответствующего фейгенбаумовской критической динамике.

Авторы выражают благодарность Д.И. Трубецкову, С.П. Кузнецову, Н.М. Рыскину за полезное обсуждение.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 96-15-96921).

Библиографический список

1. Linsay P.S. Period doubling and chaotic behaviour in a driven anharmonic oscillator // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol.47, №19. P.1349.
2. Астахов В.В., Безручко Б.П., Селезнев Е.П. Исследование динамики нелинейного колебательного контура при гармоническом воздействии // РЭ. 1987. Т.32, №12. С. 2558.
3. Леон О. Чуа. Генезис схемы Чуа // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т.1, №3. С.4.
4. Matsumoto T. A chaotic attractor from Chua's circuit // IEEE Trans. 1984. Vol. CAS-31. P. 1055.

5. *Anishchenko V.S.* Dynamical Chaos – Models and Experiments. Singapore–New Jersey–London–Hong Kong: World Scientific, 1995.

6. *Андрюшкевич А.В., Кипчатов А.А., Красичков Л.В., Короновский А.А.* Путь к хаосу в кусочно–линейной модели генератора на туннельном диоде // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т.1, № 1. С. 93.

7. *Пиковский А.С., Рабинович М.И.* Простой автогенератор со стохастическим поведением // Докл. ДАН СССР. 1978. Т. 239, № 2. С.301.

8. *Соколов Д.В., Трубецков Д.И.* Нелинейные волны, динамический хаос и некоторые задачи сверхвысокочастотной электроники // Проблемы физической электроники. Л., 1988. С. 141.

9. *Трубецков Д.И., Четвериков А.П.* Автоколебания в распределенных системах электронный поток – встречная (обратная) электромагнитная волна // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т.2, № 5. С. 9.

10. *Блиох Ю.П., Бородкин А.В., Любарский М.Г., Онищенко И.Н., Файнберг Я.Б.* Применение метода функционального отображения для исследования ЛБВ–генератора с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т.1, №1. С. 34.

11. *Афанасьева В.В., Лазерсон А.Г.* Динамический хаос в двухрезонаторных клистронных автогенераторах с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т.3, №5. С. 88.

12. *Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П.* Периодические и стохастические режимы в электронных генераторах с распределенным взаимодействием // Релятивистская высокочастотная электроника. Проблемы повышения мощности и частоты излучения. Горький: ИПФ АН СССР, 1980. С. 29.

13. *Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П., Федосеева Т.Н.* Теория переходных процессов в релятивистской ЛОВ // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21, № 7. С. 1037.

14. *Рыскин Н.М., Титов В.Н., Трубецков Д.И.* О сценарии перехода к хаосу в однопараметрической модели лампы обратной волны // Матер. Всероссийской межвуз. конф. «Современные проблемы электроники и радиофизики СВЧ». Саратов, 4–8 сентября 1997. С. 40.

15. *Carcasses J., Mira C., Bosch M., Simo C., Tatjer J.C.* Crossroad area – spring area transition (1). Parameter plane representation // Int. J. Bifurc. & Chaos, 1991. Vol. 1. P. 183.

16. *Chang S. J., Wortis M., Wright J.A.* Iterative properties of a one–dimensional quartic map. Critical lines and tricritical behavior. // Phys. Rev. 1981. Vol. 24, № 5.

17. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Критическая динамика одномерных отображений. Часть 2. Двухпараметрический переход к хаосу // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т.1, № 3–4. С. 17.

*Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
Высший колледж прикладных наук СГУ*

Поступила в редакцию 11.12.97

DISCRETE MODEL OF A BACKWARD–WAVE TUBE

A.P. Kuznetsov, A.P. Shirokov

The discrete two–parameter map approximately describing dynamics of a field amplitude in the backward–wave tube is received. The bifurcation diagram on a plane «parameter of interaction – relativistic parameter» is obtained. The tricritical point is found and nonfeigenbaum cascade of period–doubling bifurcations is investigated.