



## О ПРОБЛЕМЕ ГРАНИЦЫ ХАОСА И ТИПИЧНЫХ СТРУКТУРАХ НА ПЛОСКОСТИ ПАРАМЕТРОВ НЕАВТНОМНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С УДВОЕНИЯМИ ПЕРИОДА

*А.П. Кузнецов, А.В. Савин*

Представлен ряд карт ляпуновских показателей для неавтономных систем с удвоениями периода под непериодическим воздействием. С их помощью обсуждается структура границы хаоса, обнаружены новый тип ветвящихся структур, характерный для случая воздействия самоподобных сигналов, а также явление кризиса критичности. Предemonстрирован скейлинг на ляпуновских картах в случае воздействия бинарного шума.

### Введение

Развитие представлений о динамическом хаосе не только обогатило фундаментальные знания о свойствах нелинейных систем, но и дало новые методы их исследования. Одной из наиболее ценных и в то же время легко доступных характеристик сложных колебательных режимов стал ляпуновский показатель. Его положительные значения служат критерием хаотической динамики, а зависимость от параметра может быть использована для идентификации сценария перехода к хаосу, оценки сложности режимов, иллюстраций скейлинга (подобия) на границе хаоса и др. В работе [1] предложена весьма простая идея представления результатов двухпараметрического компьютерного исследования нелинейных систем в виде своего рода «карт» ляпуновских показателей, на которых каждая точка плоскости параметров окрашивается оттенком серого цвета в соответствии с его величиной. В этой работе представлена целая коллекция весьма эффектных подобных карт (названных автором «ляпуновскими пространствами»), относящихся к логистическому отображению при различных периодических воздействиях. Эти иллюстрации поражают тонкой и изысканной организацией даже воображение читателя, привыкшего к современным компьютерным иллюстрациям в области фракталов и хаоса. Однако они оказываются весьма удобными и для исследовательских целей наряду с традиционным бифуркационным анализом и ставшим уже весьма популярным методом построения карт динамических режимов, когда оттенком серого (или цветом) отмечены области с определенным периодом колебаний. Ляпуновские карты не только дополняют такие иллюстрации, но оказываются даже более эффективными в ряде случаев. Прежде всего это относится к весьма интенсивно изучаемым сейчас ситуациям непериодического внешнего воздействия, когда периодических режимов нет вообще и этот метод не имеет альтернативы. Он позволяет визуализировать

режимы максимальной устойчивости, которым отвечает большой по абсолютной величине отрицательный ляпуновский показатель и которые удобны и важны при анализе свойств отображений. (Достаточно сказать, что Фейгенбаум при обосновании своего знаменитого закона сходимости циклов удвоенных периодов к критической точке на границе хаоса существенно использовал свойства именно циклов максимальной устойчивости.) Наконец, он автоматически визуализирует тонкие структуры у порога хаоса, отвечающие очень долгопериодическим режимам, которые весьма непросто выявить бифуркационным анализом и которые не наглядны на картах динамических режимов.

Метод построения карт ляпуновских показателей уже успешно использовался в ряде работ. Так, в [2] в его терминах проведено детальное обсуждение структуры языков синхронизации и их внутреннего устройства для отображения окружности, в [3] даны иллюстрации скейлинга для логистического отображения при квазипериодическом воздействии и др. В настоящей статье представлены некоторые иллюстрации работоспособности этого метода в случае воздействия нелинейных сигналов на канонические модельные дискретные отображения нелинейной динамики с удвоениями периода. В центре внимания свойства границы хаоса и типичные структуры на плоскости параметров. Показано, что в случае воздействия иерархически организованных сигналов неавтономные системы демонстрируют весьма интересные свойства.

## 1. Исследуемые системы

Рассмотрим следующие «эталонные» системы: логистическое отображение

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \epsilon y_n \quad (1)$$

и двухпараметрическое кубическое отображение

$$x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3 + \epsilon y_n. \quad (2)$$

Здесь  $x$  – динамическая переменная;  $\lambda$ ,  $a$ ,  $b$  – управляющие параметры;  $\epsilon$  – амплитуда внешнего сигнала  $y_n$ .

Физически в силу известного свойства универсальности в качестве автономной может выступать любая система с удвоениями периода. Так, это может быть нелинейный осциллятор любой природы. В случае импульсного воздействия он описывается уравнением

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = \sum_n (c + \epsilon y_n) \delta(t - nT_0). \quad (3)$$

Как показано в [4], динамика такого осциллятора может быть приближенно сведена к двумерному отображению вида

$$z_{n+1} = A_n + Bz_n \exp(i|z_n|^2 + \psi),$$

где

$$A_n = [(c + \epsilon y_n) / \omega_0] \{3/8\beta [1 - \exp(-\gamma T)] / (\omega_0 \gamma)\}^{1/2}, \quad B_n = \exp(-\gamma T/2), \quad \psi = \omega_0 T_0. \quad (4)$$

Отображение (4), в свою очередь, в определенной области параметров сводится к одномерному

$$\theta_{n+1} = \lambda_n \cos(\theta_n + \varphi_n), \quad \text{где } \lambda_n = 2A_n B, \quad \varphi_n = A_n^2 + \psi. \quad (5)$$

(Подробное обсуждение моделей (3)–(5) дано в [4].)

При фиксированном периоде воздействия  $T_0$  в автономном режиме все эти три типа моделей демонстрируют удвоения периода. Кроме того, в силу расположения рядом максимума и минимума, одномерное отображение (5)

характеризуется устройством плоскости параметров  $(\lambda, \varphi)$  аналогичным кубическому отображению (2).

Заметим, что (4) представляет собой также и известное отображение Икеды, описывающее возбуждаемый лазером кольцевой оптический резонатор со средой с фазовой нелинейностью [5], а (5) – акустооптическую систему, описанную в [6]. Таким образом, модели (1) и (2) имеют соответствующие физические аналоги.

В качестве внешнего сигнала  $u_n$  мы выберем следующие варианты. *Во-первых*, это сигналы в виде бинарных последовательностей, составленных из нулей и единиц, которые, однако, позволяют ввести в рассмотрение все основные качественно разные ситуации: порядок (периодические последовательности), шум (случайные последовательности) и промежуточные ситуации (самоподобные последовательности с иерархической организацией). Дополнительным аргументом в пользу бинарных последовательностей могут служить мотивы теории информации, широко оперирующей с двоичными кодами. *Во-вторых*, мы рассмотрим введенные в [7–9] и названные фрактальными иерархически организованные сигналы, для которых изображающая точка движется по двумасштабному канторову множеству.

Случаи периодических и шумовых воздействий традиционны для нелинейной динамики, а случай самоподобных последовательностей представляется достаточно новым. Какие еще есть мотивы для рассмотрения воздействий в виде иерархически организованных сигналов? Развитие нелинейной динамики за последние годы убедительно свидетельствует, что новый тип внешнего сигнала приводит к новым интересным феноменам. Так, изучение квазипериодического воздействия на систему с удвоениями периода привело к широкому и объемному исследованию странных нехаотических аттракторов [10,11]. Хаотические внешние сигналы ассоциируются с весьма широко представленной в литературе проблемой хаотической синхронизации (см. [11] и представленную там литературу). В случае воздействия одной системы с удвоениями на другую обнаружено бикритическое поведение на пороге гиперхаоса [12,13]. Следует также отметить, что в работе [14] описано устройство генератора фрактальных сигналов, так что соответствующие явления допускают и экспериментальное исследование.

## 2. Периодические сигналы

Ситуация чисто периодического сигнала достаточно тривиальна и используется нами только для демонстрации особенностей используемого метода и места представленных результатов. На рис. 1 для удобства восприятия дана цветовая палитра, с помощью которой на картах кодируется величина ляпуновского показателя

$$\Lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \sum_{i=1}^N \ln |df(x_i)/dx_i|. \quad (6)$$

В расчетах величина  $N$  выбиралась достаточно большой, так что вид карт не менялся при ее вариациях.

На рис. 2, а показана карта ляпуновского показателя для логистического отображения под действием 2-

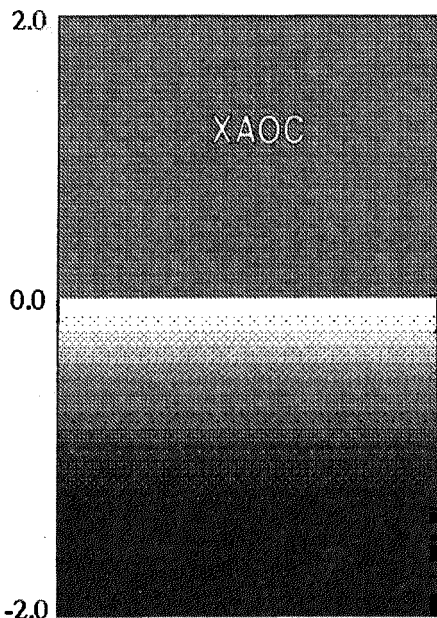
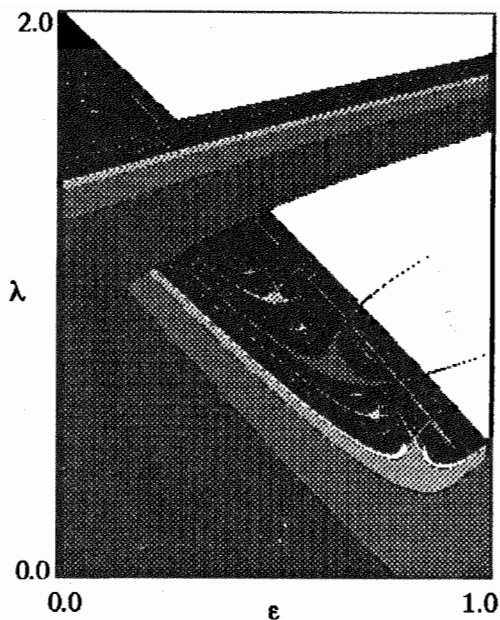
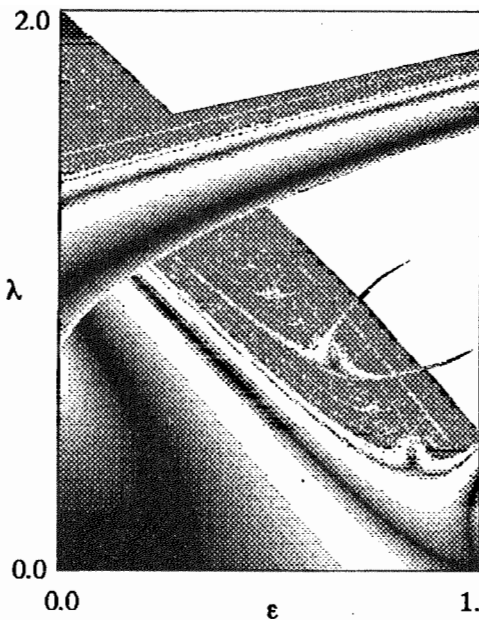
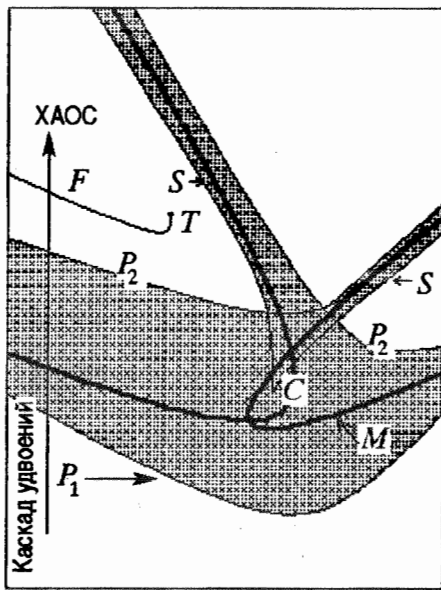


Рис. 1. Соответствие значений показателя Ляпунова и оттенков серого цвета, принятое при построении карт ляпуновских показателей



*a*

*б*



*в*

Рис. 2. *a* – карта ляпуновских показателей для логистического отображения под воздействием 2–периодического сигнала; *б* – карта динамических режимов для того же случая; *в* – характерные структуры на плоскости параметров. Заштрихована область crossroad area, образованная линиями складок  $S$ , сходящимися в точке сборки  $C$ , и линиями удвоений  $P_1$  и  $P_2$ . Линии циклов максимальной устойчивости  $M$  образуют характерную конфигурацию. Каскад удвоений завершается на фейгенбаумовской линии  $F$ , являющейся границей хаоса. Эта линия заканчивается в трикритической точке  $T$

периодической бинарной последовательности вида  $0, 1, 0, 1, \dots$  на плоскости амплитуда воздействия – управляющий параметр отображения. Для сравнения на рис. 2, *б* в тех же координатах и масштабах приведена карта динамических режимов, на которой оттенки серого цвета обозначают регулярные циклы фиксированных периодов. Эти рисунки демонстрируют известные черты устройства плоскостей парамет-

ров систем со сложной динамикой: гладкую границу хаотической области, характерную структуру областей устойчивости циклов и характерную конфигурацию линий циклов максимальной устойчивости. На рис. 2, *в* показано схематическое изображение взаимного расположения соответствующих объектов. Дадим к этим рисункам несколько комментариев. Структуры в виде областей устойчивости циклов (подобные заштрихованной на рис. 2, *в*) образованы линиями удвоений  $P_1$  и  $P_2$ , линиями жестких переходов  $S$  и содержат точку сборки  $C$ . К настоящему времени хорошо осознаны их значение как элементарных объектов на плоскости параметров и универсальность как для одномерных отображений, так и для нелинейных систем общего вида. Как можно заключить из анализа литературы, многие исследователи, по-видимому, «переоткрывали» для себя

подобные структуры, поэтому общепринятого в мировой литературе названия для них нет. Мы используем термин «crossroad area», отдавая дань работам французского математика Кристиана Мира, в которых наиболее глубоко исследованы такие (и подобные им) структуры и изучены их трансформации при вариации третьего параметра [15,16]. Внутри структуры crossroad area для одномерных отображений можно видеть характерные «петли» линий циклов максимальной устойчивости, которые пересекаются в точках, отвечающих суперустойчивым орбитам. На базе каждой ситуации crossroad area реализуется каскад удвоений, приводящий к гладкой фейгенбаумовской критической линии, являющейся границей хаоса (см. рис. 2, в). Вблизи нее наблюдается известный однопараметрический скейлинг (то есть подобие вдоль любой пересекающей ее линии) с универсальной константой  $\delta=4.6692\dots$ . Для одномерных отображений фейгенбаумовские линии обрываются в так называемых трикритических точках  $T$  (см. рис. 2, в), вблизи которых наблюдается уже двухпараметрический скейлинг (подобие «плоских» областей) с универсальными константами  $\delta_1=2.8571\dots$  и  $\delta_2=7.2847\dots$ . Эти особенности плоскости параметров выявлены многими авторами и широко использовались и используются при анализе нелинейных систем (Chang et al. [17], Mackay et al. [18], Komuro et al. [19], Parlitz et al. [20, 21], Ringland et al. [22], Gallas et al. [23, 24]).

### 3. Шумовые сигналы

Перейдем теперь к случаю непериодических сигналов. На рис. 3 показана карта ляпуновских показателей системы (1) в тех же координатах и масштабах, когда внешний сигнал  $u_n$  является бинарным шумом. Мы видим, что четкие структуры бесследно исчезли, нет ничего, что напоминало бы ситуацию crossroad area. Режимы же максимальной устойчивости образовали бесформенные пятна с центрами на вертикальной оси  $\epsilon=0$ , локализованные вблизи соответствующих точек автономного отображения. Существенные трансформации претерпела и граница хаоса, которая стала теперь «диффузной»: область хаоса вторгается в область регулярных режимов в виде «снежной пелены», не имеющей четкого края.

Тем не менее на плоскости параметров логистического отображения (1) при воздействии бинарного шума можно наблюдать двухпараметрический скейлинг. В качестве центра подобия выберем критическую точку фейгенбаумовского перехода к хаосу автономного отображения:  $\epsilon=0$ ,  $\lambda=\lambda_c=1.4011552\dots$ . Пересчет параметров произведем по следующему правилу:

$$\Delta\lambda \rightarrow \Delta\lambda/\delta, \quad \Delta\epsilon \rightarrow \Delta\epsilon/\mu.$$

Это отвечает тому, что некоторый выбранный прямоугольник растягивается в  $\delta=4.669\dots$  раз по оси управляющего параметра  $\lambda$  и в  $\mu=6.618\dots$  раз по оси амплитуды шума  $\epsilon$ . Здесь  $\mu$  – константа, относящаяся к шумовому воздействию и полученная методом ренормгруппы в [25]. Кроме того, цветовая палитра изменялась так, чтобы после преобразования подобия тот же цвет отвечал удвоенному

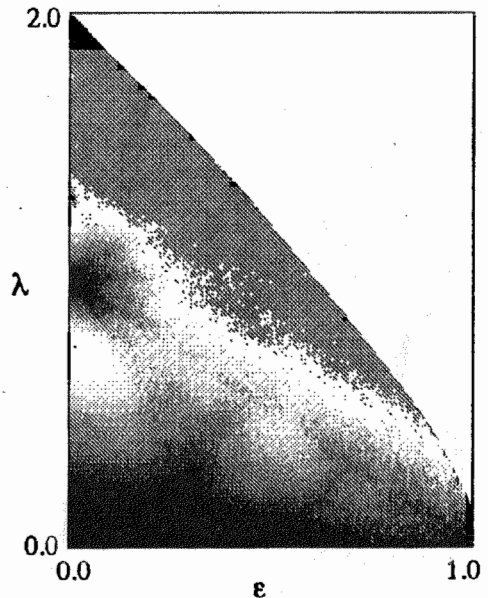


Рис. 3. Карта ляпуновских показателей для логистического отображения под воздействием бинарного шума

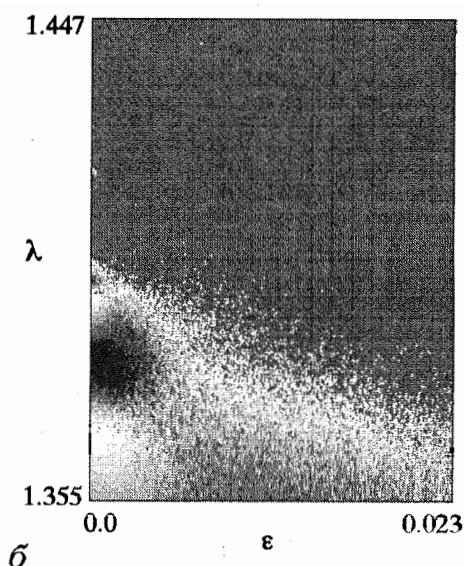
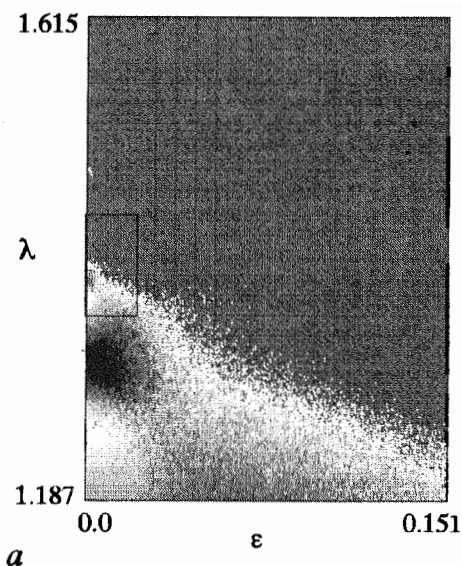


Рис. 4. Скейлинг на карте ляпуновских показателей для логистического отображения под воздействием бинарного шума. На рис. б увеличенный фрагмент рис. а

значению показателя Ляпунова. Полученные результаты представлены на рис. 4. Можно видеть, что исходная и преобразованная картинка хорошо совпадают. Замечательно, что скейлинг выполняется для бинарного шума. При исследовании проблемы воздействия шума, как правило, делаются иные предположения о его природе. Наши результаты говорят о более широкой применимости гипотезы универсальности.

#### 4. Самоподобные сигналы

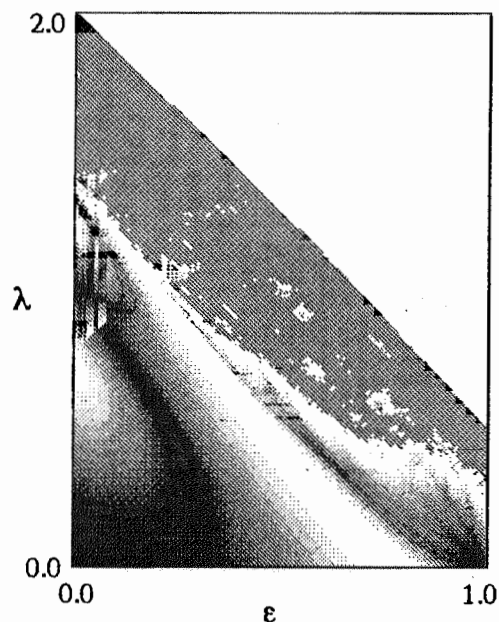


Рис. 5. Карта ляпуновских показателей для логистического отображения под воздействием логистической сигнум-последовательности

Итак, шум радикально изменил картину структур и границы хаоса на ляпуновских картах. Поэтому очень интересно исследовать промежуточные между регулярными и случайными сигналами ситуации. Теория бинарных последовательностей предоставляет для этого замечательную возможность в виде так называемых самоподобных последовательностей [26], которые можно получить из некоторого начального фрагмента многократной заменой каждого из его символов на некоторый фрагмент по так называемому правилу подстановки. Мы выберем две из них: логистическую сигнум-последовательность и известную «последовательность кроликов». Первая представляет собой последовательность знаков динамической переменной логистического отображения при критическом значении параметра  $\lambda$ , причем знаку «+» должна соответствовать единица, а знаку «-» — ноль. Правило подстановки для нее имеет

вид:  $1 \rightarrow 10$ ;  $0 \rightarrow 11$ , а начальный фрагмент  $y_n = 101110101111011 \dots$ . «Последовательность кроликов» можно получить из известной задачи Фибоначчи о размножении кроликов, если единицей обозначить взрослую пару кроликов, а нулем – молодую [26]. Для нее правило подстановки:  $0 \rightarrow 1$ ;  $1 \rightarrow 10$ , а начальный фрагмент  $y_n = 101110101111010 \dots$ .

Ляпуновские карты для случая воздействия внешних сигналов в виде этих последовательностей представлены на рис. 5 и 6, соответственно. Сравнивая их с рис. 2 и 3, можно убедиться, что воздействие самоподобных последовательностей в самом деле приводит к некоторому промежуточному результату по сравнению с регулярными и шумовыми сигналами: Любопытно, что ситуация логистической

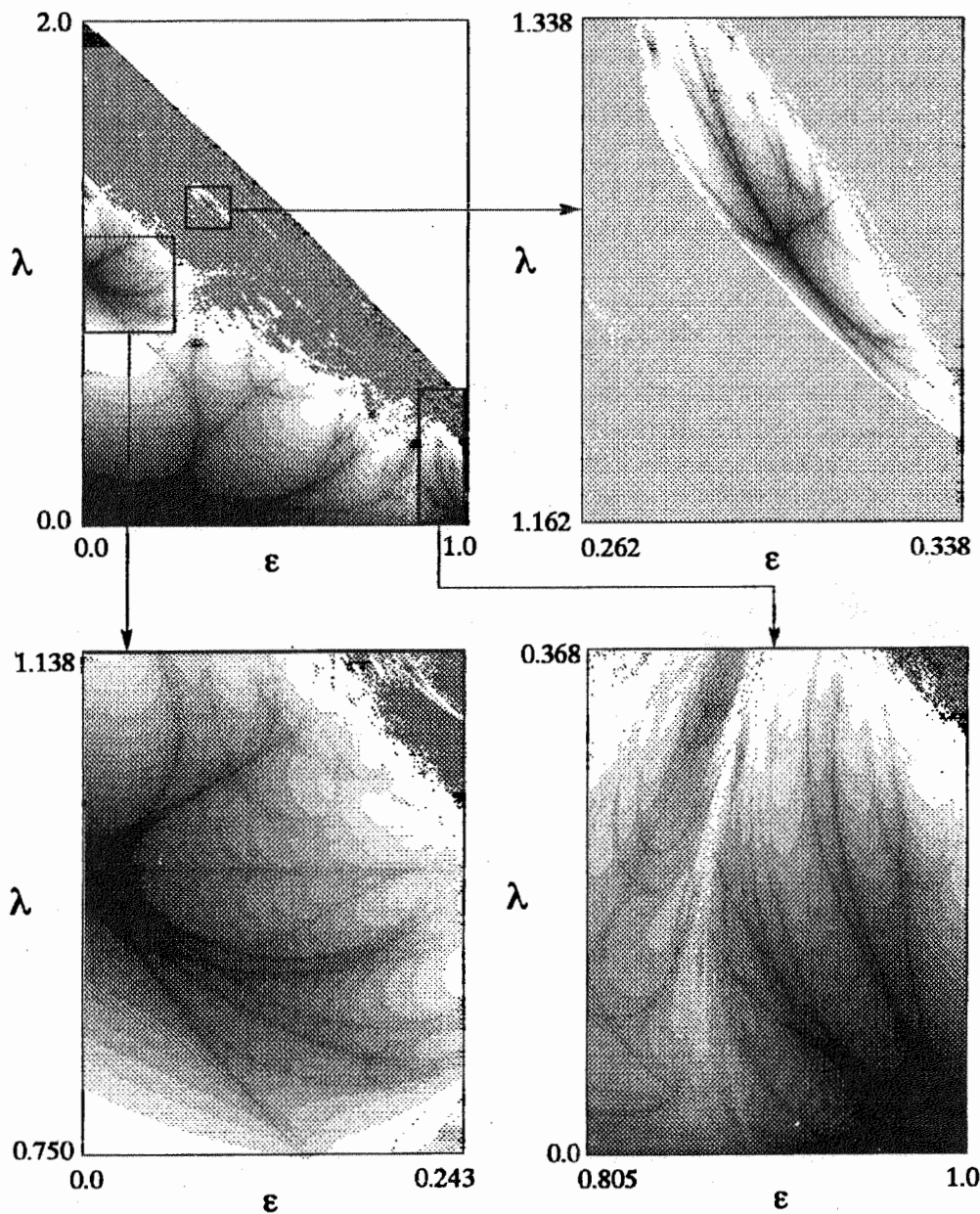


Рис. 6. Карта ляпуновских показателей для логистического отображения под воздействием «последовательности кроликов». Новый тип ветвящихся структур типа «рисунки на листе» на плоскости параметров

сигнум-последовательности ближе к регулярному, а «последовательности кроликов» – к шумовому воздействию.

Обращаясь к рис. 6, видим, что на плоскости параметров реализуется некоторый новый тип структур, представляющих собой систему ветвящихся темных (большой отрицательный ляпуновский показатель) лучей, глубоко внедряющихся в светлые области. Эти структуры своей причудливой формой напоминают рисунки на листе деревьев (см. увеличенные фрагменты ляпуновской карты на рис. 6). Интересно, что по сравнению со случаем регулярного воздействия (см. рис. 2) структуры типа «рисунки на листе» развиваются в поперечном линиям циклов максимальной устойчивости направлению – именно так вытягиваются их ветвящиеся лучи.

Далее, граница хаоса явно не выглядит гладкой линией, но она уже и не столь диффузно устроена, как в случае шума. Теперь она содержит более крупные фрагменты, придающие ей изрезанный характер. Отрываясь от границы, подобные фрагменты образуют «островки» регулярных режимов в области хаоса. Один из них показан на рис. 6 в увеличенном виде. Видно, что он весь пронизан структурами типа «рисунки на листе». Наличие таких островков – еще одна характерная черта устройства плоскости параметров в рассматриваемом случае.

Рис. 5 демонстрирует аналогичные особенности, хотя ветвящиеся структуры наблюдаются хорошо лишь при больших амплитудах воздействия, а граница хаоса менее изрезана.

## 5. Фрактальные сигналы

Приведенные результаты компьютерного исследования заставляют задаться вопросом: какова может быть геометрия границы хаоса? Является ли она гладкой, как в случае периодического сигнала, или «диффузной», как в случае шума? Возможно ли превращение этих двух случаев друг в друга? Это весьма сложный

вопрос, полное теоретическое рассмотрение которого пока недоступно. По-видимому, граница может быть и гладкой, и не гладкой, в зависимости от устройства внешнего сигнала. Приведем некоторые аргументы в пользу этого утверждения. Для этого рассмотрим специальный иерархически организованный сигнал следующего вида:

$$y_{2n} = \beta(1+y_n), \quad (8)$$

$$y_{2n+1} = -\alpha(1+y_n), \quad y_0 = \beta/(1-\beta).$$

Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  – параметры сигнала. В процессе динамики переменная  $y_n$  совершает движение по двухмасштабному канторову множеству с параметрами  $\alpha$  и  $\beta$  в соответствии с правилом обхода в критической точке. В частности, при  $\alpha = -1/a_F$  и  $\beta = \alpha^2$ , где  $a_F = -2.5029...$  – вторая константа Фейгенбаума, сигнал (8) с очень высокой точностью аппроксимирует динамику логистического отображения в

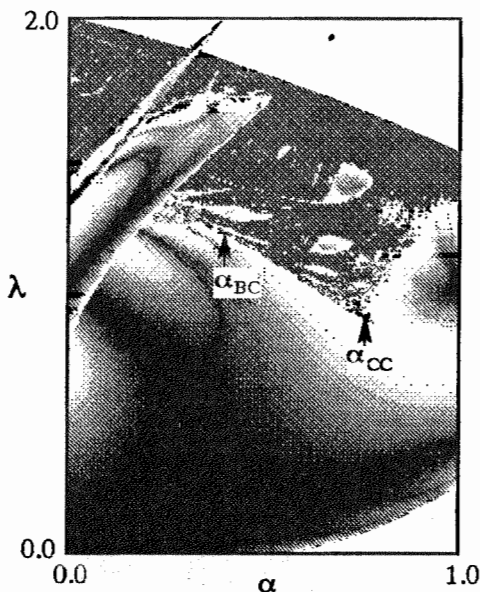


Рис. 7. Карта ляпуновских показателей для логистического отображения под воздействием сигнала (8).  $\alpha_{BC} = -1/a_F = 0.3995...$  – значение параметра фрактального сигнала, отвечающее бифуркации критичности [7–9];  $\alpha_{CC} = 0.77...$  – значение параметра, соответствующее кризису критичности (потере гладкости границы хаоса)



критической точке. Он моделирует и другие типы критического поведения (подробности см. в [7–9]).

Для простоты фиксируем параметр  $\beta=0$ , амплитуду сигнала  $\epsilon=1$  и обратимся к карте ляпуновского показателя на плоскости  $(\alpha, \lambda)$ . Таким образом, мы изучаем теперь трансформацию структур при вариации масштабного фактора сигнала  $\alpha$ , то есть в зависимости от свойств сигнала, а не его амплитуды.

Результат представлен на рис. 7. Сначала, при небольших  $\alpha$ , граница хаоса является гладкой. Более того, случай умеренных  $\alpha$  исследован в [7–9], где показано, что вплоть до значения  $\alpha_{BC}=-1/a_F$  она является фейгенбаумовской линией с характерным классическим скейлингом. При  $\alpha=\alpha_{BC}$  происходит бифуркация в соответствующем уравнении ренормгруппы и скейлинг становится нефейгенбаумовским с константой, зависящей от фактора  $\alpha$ . Рассмотрение рис. 7 убеждает, что этим трансформации критической динамики не исчерпываются. Действительно, при  $\alpha_{CC}\approx 0.77\dots$  гладкая граница хаоса обрывается. Справа от этой точки возникает область диффузно устроенной границы, содержащей в то же время и множество «островков». В ее направлении также вытянуты лучи структуры типа «рисунки на листе».

Таким образом, при  $\alpha=\alpha_{CC}$  граница хаоса теряет гладкость. Мы назвали это явление *кризисом критичности*, поскольку в отличие от обсуждавшегося в [7–9] случая бифуркации критичности, последняя здесь исчезает вообще. Мы не имеем адекватного математического аппарата для описания этого явления, ибо даже традиционная ренормгруппа здесь, надо полагать, не эффективна. Кризис критичности, сопровождающийся столь резкой трансформацией границы хаоса, представляется феноменом нового плана, который заслуживает пристального внимания.

## 6. Двухпараметрическая система под действием шума и самоподобных последовательностей

Наконец, дадим несколько иллюстраций для кубического отображения (2). Оно является двухпараметрическим, и плоскость  $(a, b)$  автономной системы (рис. 8) содержит все характерные элементы, представленные на рис. 2, в: структуры crossroad area, фейгенбаумовские линии, трикритические точки.

Рис. 9 демонстрирует трансформацию карты при воздействии бинарного шума (левая колонка) и «последовательности кроликов» (правая колонка) с ростом амплитуды сигнала  $\epsilon$ . В первом случае можно наблюдать развитие диффузной структуры границы хаоса и весьма причудливые трансформации режимов максимальной устойчивости. Во втором случае наблюдаем развитие ветвящихся структур, а также, в отличие от случая шума, потерю симметрии на карте. При этом при небольшой амплитуде сигнала ( $\epsilon=0.1$  и  $\epsilon=0.25$ ) ляпуновские карты для первого и второго случаев достаточно похожи (рис. 9, а, б), а при ее дальнейшем увеличении (рис. 9, в, г) наблюдается сильное различие.

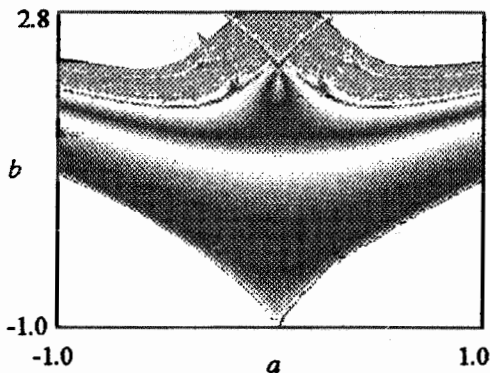


Рис. 8. Карта ляпуновских показателей для автономного кубического отображения

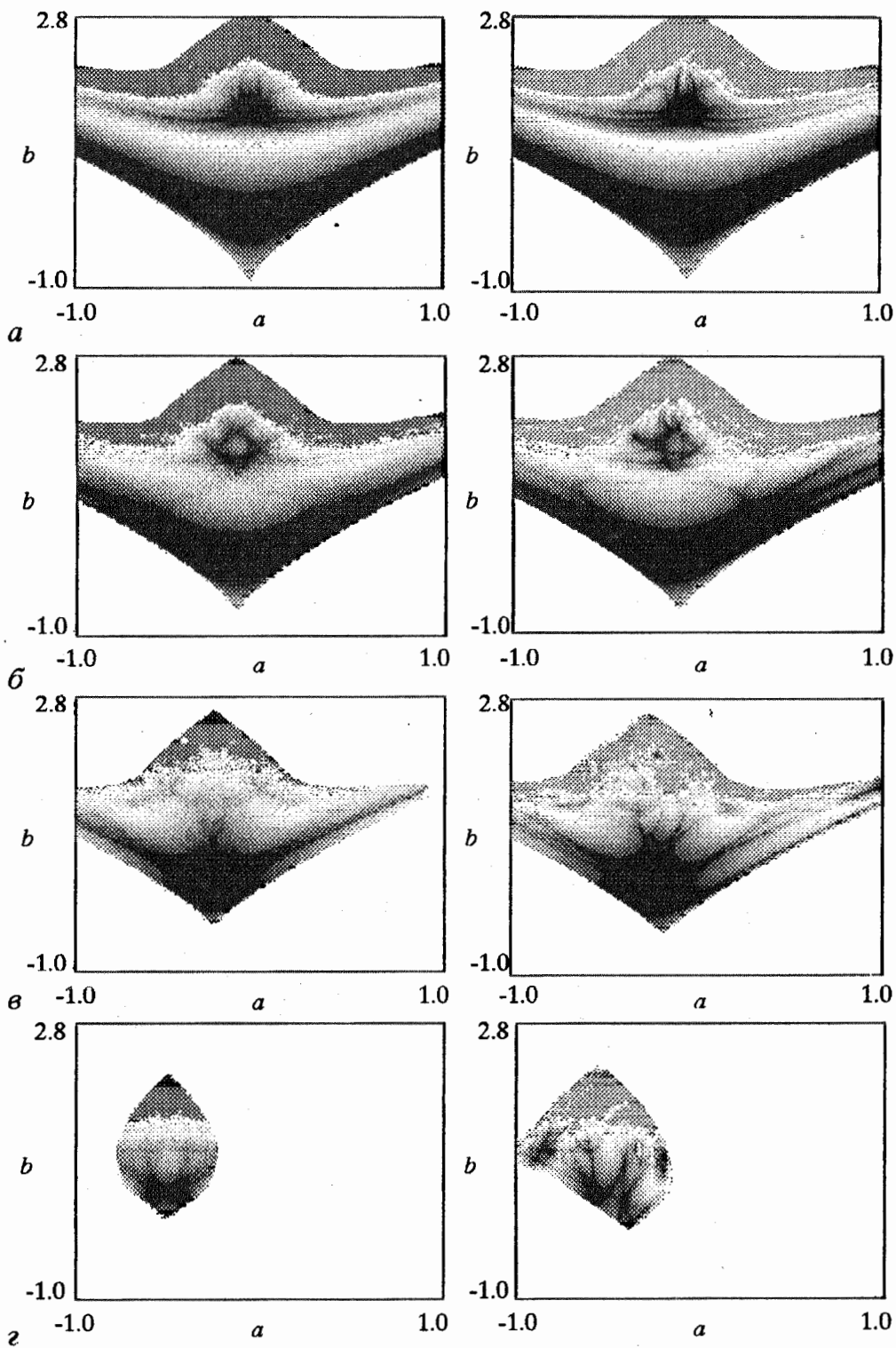


Рис. 9 Карта ляпуновских показателей для кубического отображения (2) под воздействием бинарного шума (слева) и «последовательности кроликов» (справа) при различных интенсивностях сигнала  $\epsilon$ :  $a - 0.1$ ;  $b - 0.25$ ;  $v - 0.5$ ;  $z - 1.0$

## Заключение

Итак, мы представили и обсудили ряд ляпуновских карт для неавтономных систем с удвоениями периода. Приведенные результаты убедительно говорят, что этот метод эффективен для случая непериодических сигналов. Действительно, с его помощью мы имели возможность сделать определенные выводы об устройстве границы хаоса и продемонстрировать двухпараметрический скейлинг в системах с шумом, обнаружить новый тип ветвящихся структур («рисунки на листе»), которые оказались типичными для сигналов с самоподобной организацией, и, наконец, обнаружить феномен кризиса критичности, при котором гладкая граница хаоса скачком разрушается, превращаясь в «диффузную», «островную» структуру. Конечно, наше рассмотрение было основано на чисто визуальной оценке карт и не дает исчерпывающих ответов на целый ряд возникающих вопросов о природе обнаруженных закономерностей. Но нельзя и приуменьшать роль визуальных методов (достаточно указать фазовые портреты). В конечном итоге, именно они и позволяют поставить вопросы для более глубокого теоретического анализа. В этой работе, как мы надеемся, намечено достаточно интересное поле для дальнейших исследований.

Авторы выражают благодарность С.П. Кузнецову и И.Р. Сатаеву за полезное и плодотворное обсуждение.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 99-02-17735).*

## Библиографический список

1. Marcus M. Chaos in maps with continuous and discontinuous maxima // *Computers in Physics*, 1980, Sept/Oct. P. 481
2. Bastos de Figueiredo J.C., Malta C.P. Lyapunov graph for two-parameter map: application to the circle map // *Int. J. of Bif. and Chaos*. 1998. Vol. 8, № 2. P. 281.
3. Иваньков Н.Ю. Свойства скейлинга пространства параметров логистического отображения под внешним воздействием // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1997. Т. 5, №2-3. С. 118.
4. Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. Динамические системы разных классов как модели нелинейного осциллятора с импульсным воздействием // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2000. Т. 8, № 2. P. 31.
5. Ikeda K., Daido H., Akimoto O. Optical turbulence: Chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity // *Phys. Rev. Lett.* 1980. Vol. 45. P. 709.
6. Valley R., Delisle C., Chrostowski J. Noise versus chaos in acousto-optic bistability // *Phys. Rev.* 1984. 30A, № 1. P. 336.
7. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. Period doubling system under fractal signal. Bifurcation in the renormalization group equation // *Chaos, Solitons & Fractals*. 1991. Vol. 1, №4. P. 355.
8. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р. Воздействие фрактального сигнала на систему Фейгенбаума и бифуркация в уравнении ренормгруппы // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1991. Т. 34, № 6. С. 661.
9. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р. Фрактальный сигнал и динамика систем, демонстрирующих удвоения периода // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1995. Т. 3, №5. С. 64.
10. Grebogy C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A. Strange attractors that are not chaotic // *Physica D*. 1984. Vol. 13. P. 261.
11. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во СГУ, 1999. 368 с.
12. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р. Динамика однонаправленно связанных систем у порога гиперхаоса. Бикритический аттрактор // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1992. Т. 35, № 5. С. 398.
13. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. Bicritical dynamics of two period-doubling systems with unidirectional coupling // *Int. J. of Bif. and Chaos*. 1991. Vol. 1, № 4. P. 839.

14. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Генератор фрактального сигнала// Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18, вып. 24. С. 19.

15. Carcasses J., Mira C., Bosch M., Simo C. and Tatjer J.C. Crossroad area – spring area transition. (1) Parameter plane representation // Int. J. of Bif. and Chaos. 1991. Vol. 1. P. 183.

16. Mira C., Carcasses J. On the crossroad area – saddle area and spring area transition // Int. J. of Bif. and Chaos. 1991. Vol. 1, № 3. P. 641.

17. Chang S.J., Pendley P.R. Scaling and universal behavior on the bifurcation attractor // Phys. Rev. 1986. Vol. A33, № 6. P. 4092.

18. Mackey R.S., Tresser C. Some flesh on the bifurcation structure of bimodal maps // Physica 1987. Vol. 27D. P. 412.

19. Komuro M., Tokunaga R., Matsumoto T., Chua L., Hotta A. Global bifurcation analysis of the double scroll circuit // Int. J. of Bif. and Chaos. 1991. Vol. 1. P. 139.

20. Parlitz U. Common dynamical features of periodically driven strictly dissipative oscillators // J. of Bif. and Chaos. 1993. Vol. 3, № 3. P. 703.

21. Scheffczyk C., Parlitz U., Kurz T., Knop W., Lauterborn W. Comparison of bifurcation structures of driven dissipative nonlinear oscillators // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 43, №12. P. 6495.

22. Ringland J., Schell M. Universal geometry in the parameter space of dissipative dynamical systems // Europhys. Lett. 1990, № 12. P. 595.

23. Gallas J.A.C., Catarina S. Structure of the parameter space of Henon map// Phys. Rev. Lett.. Vol. 70, №18. P. 2714.

24. Gallas J.A.C. Structure of the parameter space of a ring cavity //Appl. Phys. 1995. Vol. B60. P. 203.

25. Shraiman B., Wayne C., Martin P. Scaling theory for noisy period-doubling systems //Phys. Rev. Lett.. 1981. Vol. 46. P. 935

26. Schroeder M. Fractals, Chaos, Power Laws. New York: W.H. Freeman and Company, 1990.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 2.02.2000  
после доработки 20.04.2000

## ABOUT THE PROBLEM OF CHAOS BOUNDARY AND TYPICAL STRUCTURES AT THE PARAMETER PLANE OF NON-AUTONOMIC DISCRETE MAPS WITH PERIOD DOUBLING

A.P. Kuznetsov, A.V. Savin

The series of Lyapunov graphs for non-autonomic systems with period doubling under non-periodical influence is shown. With its help the structure of chaos boundary is discussed, the new type of branching structures, which are typical for self-similar signals, and the phenomenon of criticality crisis are found. Scaling at Lyapunov graph for map under noise influence are demonstrated



Савин Алексей Владимирович – родился в Саратове (1980). В 1997 году поступил на физический факультет СГУ. В настоящее время является студентом 4 курса. Участвует в работе студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Область научных интересов – компьютерное моделирование сложной динамики модельных нелинейных систем.