

СКЕЙЛИНГ ПРИ ПЕРЕХОДЕ К ХАОСУ ЧЕРЕЗ РАЗРУШЕНИЕ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ С ОТНОШЕНИЕМ ЧАСТОТ, ЗАДАНЫМ ЗОЛОТЫМ СРЕДНИМ

А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов, Н. Ю. Иваньков, А. А. Осин

Дан обзор результатов, касающихся перехода к хаосу через разрушение квазипериодических движений на двумерном торе и полученных на основании анализа модельной системы – синус-отображения окружности. Кратко изложен метод ренормализационной группы для случая, когда число вращения задано равным «золотому среднему», рассмотрена структура критического аттрактора, приведены иллюстрации скейлинга в пространстве параметров модельного отображения. Впервые обращено внимание на тот факт, что для наблюдения двумерного скейлинга необходимо выполнить нелинейную замену параметров, соответствующую переходу в специальную систему локальных координат вблизи критической точки.

Введение

Как известно, один из распространенных сценариев возникновения сложной динамики в многомерных нелинейных системах состоит в том, что хаосу предшествует несколько бифуркаций рождения колебательных составляющих, отношение частот которых, вообще говоря, зависит от параметров задачи. Когда оно иррационально, реализуются квазипериодические режимы. В фазовом пространстве им соответствуют аттракторы в виде торов, размерность которых определяется количеством основных частотных компонент. При отношениях частот близких к рациональным из-за присущей системе нелинейности эти компоненты взаимодействуют, обнаруживая тенденцию к взаимной синхронизации («захвату частот», *mode locking*) с возникновением периодических режимов. Квазипериодические и периодические режимы, в свою очередь, могут претерпевать различные бифуркации.

Общая картина перехода к хаосу через квазипериодичность сложна и многопланова. Начиная с основополагающих статей Ландау [1] и Рюэля и Такенса [2], ее обсуждению посвящено огромное количество работ разных авторов (см., например, [3–39]). Один из важнейших фрагментов этой картины составляет круг вопросов, касающихся разрушения двумерного тора. Модельная система, подходящая для детального исследования данной проблемы, – одномерное отображение окружности [9–39].

Одним из самых замечательных достижений в нелинейной динамике было открытие Фейгенбаумом закономерностей универсальности и скейлинга (масштабного подобия) при переходе к хаосу через удвоения периода в нелинейных диссипативных системах [40–42]. Для их объяснения в нелинейную динамику был

привнесен метод ренормгруппы (РГ), аналогичный тому, который ранее использовался в теории фазовых переходов. В случае перехода к хаосу по Фейгенбауму исчерпывающее представление о динамике системы достигается при ее исследовании в зависимости от *одного* управляющего параметра. Иными словами, критическое поведение на пороге хаоса, ассоциирующееся с каскадом удвоений периода по Фейгенбауму, есть *феномен коразмерности 1*. Характерные для этого сценария свойства скейлинга (на бифуркационном дереве, на графике ляпуновских показателей, в структуре аттрактора на пороге хаоса и др.) были представлены и обсуждались во многих работах [43–47].

Под влиянием результатов Фейгенбаума аналогичные по своей методологии исследования были предприняты также для перехода к хаосу через разрушение квазипериодичности в отображении окружности. По ряду причин, в том числе в силу удобства и прозрачности теоретического анализа, особое внимание было уделено рассмотрению специального отношения частот, заданного «золотым средним» – иррациональным числом $w=(5^{1/2}-1)/2$. Точку в пространстве параметров, отвечающую моменту разрушения квазипериодического режима с таким соотношением частот, будем называть *критической точкой* GM (от слов «golden mean» – золотое среднее). Закономерности универсальности и скейлинга, характерные для этой критической точки и ее окрестности, были обнаружены эмпирически в численных расчетах Шенкера [12] и получили теоретическое объяснение в рамках РГ-анализа, развитого в работах Фейгенбаума, Каданова и Шенкера [13] и Рэнда, Остланда, Сетна и Сиггиа [14,15]. В дальнейшем к вопросу о свойствах универсальности и скейлинга квазипериодической динамики на пороге разрушения двумерного тора обращались многие авторы [16–39].

Настоящая статья носит обзорно-методический характер и имеет целью представить достаточно полный набор графических иллюстраций свойств скейлинга, присущих критической точке GM. Статья содержит изложение наиболее существенных результатов, касающихся динамики отображения окружности, и доступна для широкого круга читателей, в том числе студентов и аспирантов, интересующихся проблемой перехода к хаосу.

В отличие от удвоений периода, критическое поведение, ассоциирующееся с точкой GM, есть *феномен коразмерности 2*, то есть для исчерпывающего исследования структуры окрестности критической точки необходим двухпараметрический анализ. Плоскость параметров должна характеризоваться свойством двумерного скейлинга, то есть воспроизводить себя при пересчете масштабов в определенное число раз по двум осям подходящей локальной системы координат¹. Выбор этой системы координат представляет собой, как мы увидим, нетривиальный момент. По-видимому, этим обусловлено то обстоятельство, что убедительных иллюстраций двумерного скейлинга в литературе до сих пор представлено не было.

Отображение окружности и критическая точка GM

К отображению окружности можно прийти, отправляясь от задачи о синхронизации автоколебаний периодической последовательностью импульсов. Пусть мы имеем нелинейную диссипативную систему, в фазовом пространстве которой присутствует аттрактор в виде предельного цикла, и на нее действует внешняя сила в виде периодических импульсных толчков (рис. 1, а). Каждый очередной толчок выводит систему из установившегося режима, после чего амплитуда колебаний постепенно возвращается к предельному циклу. Если частота колебаний зависит от амплитуды, то этот процесс релаксации сопровождается накоплением добавки к фазе. Реалистичные уравнения, описывающие динамику в промежутке времени между толчками, записываются в виде

¹ Другие примеры двумерного скейлинга см. в [48, 49].

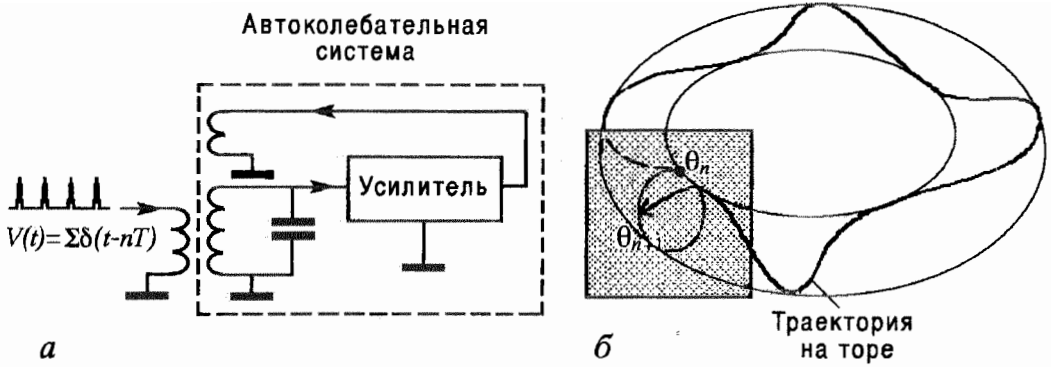


Рис. 1. К выводу отображения окружности применительно к задаче о динамике автоколебательной системы под действием периодической последовательности импульсов (а); описание динамики на двумерном торе с помощью этого отображения (б)

$$\dot{r} = -\gamma r, \quad \dot{\theta} = \omega + \nu r. \quad (1)$$

Здесь r – отклонение амплитуды от предельного цикла; γ – коэффициент затухания возмущения амплитуды, характеризующий скорость релаксации к предельному циклу; θ – фаза; ω – частота колебаний на предельном цикле, поправка к которой учитывается в уравнениях (1) в первом порядке по r ; коэффициент ν – некоторая константа.

Предположим, что перед очередным n -м толчком отклонение по амплитуде от предельного цикла отсутствовало, а фаза равнялась θ_n . В результате толчка возникнет добавка к амплитуде, и эта добавка обязана быть периодической функцией θ_n . Простейшее предположение состоит в том, что это просто синус, так что сразу после толчка имеем

$$r_n = A \sin \theta_n,$$

где A – параметр, характеризующий интенсивность толчков. Интегрируя уравнения (1) с начальными условиями r_n, θ_n , получаем

$$r(t) = (r_n + A \sin \theta_n) e^{-\gamma t}, \quad (2)$$

$$\theta(t) = \theta_n + \omega t + \nu \int_0^t (r_n + A \sin \theta_n) e^{-\gamma \tau} d\tau = \theta_n + \omega T + \nu (r_n + A \sin \theta_n) (1 - e^{-\gamma T}) / \gamma.$$

Если принять, что $\gamma T \gg 1$, то возмущение амплитуды практически полностью затухает за интервал времени между импульсами T . В этом случае к моменту очередного толчка будем иметь

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega T + \nu \int_0^T (r_n + A \sin \theta_n) e^{-\gamma t} dt \cong \theta_n + \omega T + \nu (r_n + A \sin \theta_n) / \gamma. \quad (3)$$

Вводя обозначения

$$\Delta = \omega T, \quad k = A(1 - e^{-\gamma T}) / \gamma,$$

получаем одномерное отображение

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta + k \sin \theta_n \pmod{2\pi}. \quad (4)$$

Значок $\pmod{2\pi}$ напоминает, что значения фазы θ , различающиеся на $2\pi m$, следует считать эквивалентными. Переменную θ можно трактовать как координату точки на окружности, поэтому о соотношении (4) говорят как об *отображении окружности (circle map)*. Это отображение содержит два

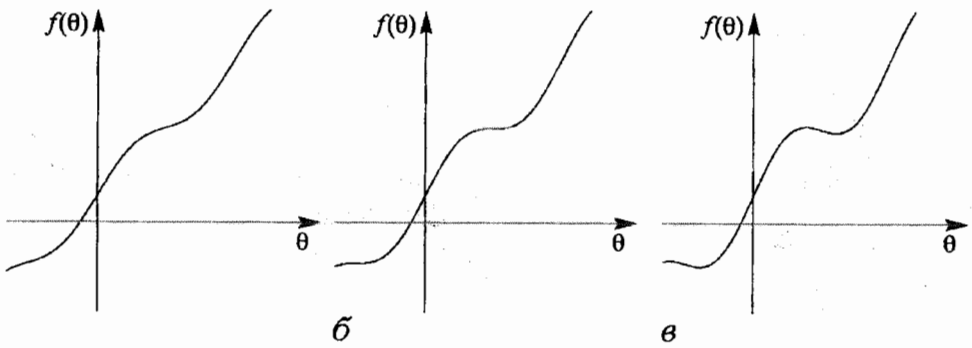


Рис. 2. График функции $f(\theta) = \theta + \Delta + k \sin \theta$ в докритической области $k < 1$ (а), при критическом значении параметра $k = 1$ (б) и в закритической области $k < 1$ (в)

управляющих параметра, k и Δ . В контексте задачи о периодическом импульсном воздействии на автоколебательную систему они характеризуют, соответственно, интенсивность толчков и расстройку частоты воздействия относительно частоты автоколебаний.

Поясним, как возникает отображение окружности в общем случае при рассмотрении динамики на двумерном торе. Имея тор-аттрактор в фазовом пространстве некоторой системы, мы можем рассмотреть его сечение площадкой S , расположенной, как показано на рис. 1, б. В сечении получится замкнутая кривая, точкам которой можно приписать угловую координату θ . Если выпустить траекторию из точки $\theta = \theta_n$, то, оставаясь на торе, она обойдет вокруг него и вновь пересечет поверхность S в какой-то другой точке $\theta = \theta_{n+1}$. Соотношение, связывающее θ_{n+1} и θ_n , будет иметь вид $\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta + f(\theta_n)$, где $f(\theta)$ – некоторая периодическая функция, а параметр Δ определяется отношением периодов обхода тора по параллели и меридиану. Функцию $f(\theta)$ можно представить в виде ряда Фурье. Если мы ограничимся первой гармоникой, обозначим ее амплитуду через k и примем за начало отсчета точку, где $f(\theta)$ обращается в нуль, то придем, очевидно, к отображению (4).

Как можно видеть из приведенных на рис. 2 графиков отображения (4), при $k < 1$ зависимость x_{n+1} от x_n монотонная и взаимно однозначная, при $k = 1$ отображение имеет кубическую точку перегиба, а при $k > 1$ – теряет свойство взаимной однозначности. В субкритической области $k < 1$ установившиеся режимы динамики могут быть периодическими или квазипериодическими, а в суперкритической области $k > 1$ – периодическими или хаотическими.

На рис. 3 показана карта динамических режимов отображения окружности. На плоскости параметров (Δ, k) периодические режимы обозначены оттенками серого цвета. На карте можно видеть известную структуру языков Арнольда (областей синхронизации), упирающихся своими острями в линию $k = 0$. На рис. 4 показаны портреты аттракторов в виде итерационных диаграмм, которые относятся к некоторым определенным точкам плоскости параметров и соответствуют периодическим, квазипериодическим и хаотическим режимам.

Полезной характеристикой, позволяющей различать типы динамических режимов, служит число вращения

$$w(\Delta, k) = \lim_{n \rightarrow \infty} ((\theta_n - \theta_0) / (2\pi n)). \quad (5)$$

Режим считается периодическим, если начальное значение θ через некоторое число шагов q воспроизводится с точностью до добавки целого числа полных периодов, то есть $\theta_{n+q} - \theta_n = 2\pi p$. Такому режиму отвечает рациональное число вращения $w = p/q$. Квазипериодические режимы характеризуются иррациональными числами вращения.

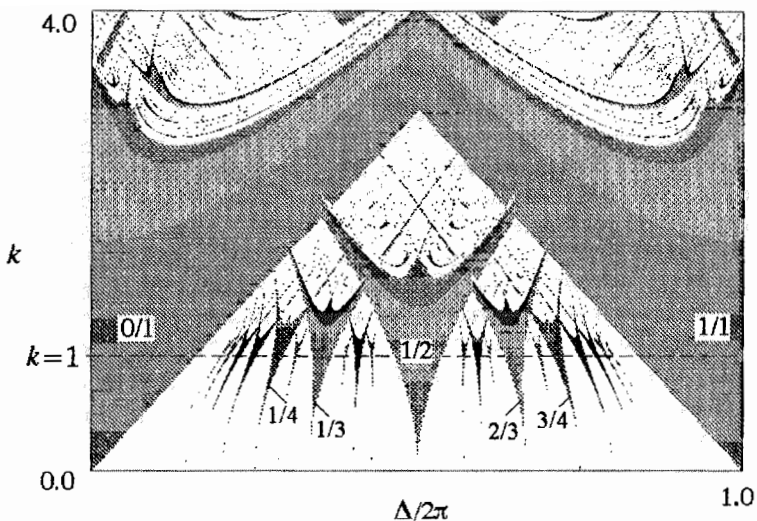


Рис. 3. Карта динамических режимов на плоскости параметров отображения окружности $\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta + k \sin \theta_n$. Области, изображенные различными тонами серого цвета, отвечают периодическим режимам (языки Арнольда); для нескольких языков цифрами указано число вращения. Области квазипериодичности и хаоса показаны белым; $k=1$ – критическая линия

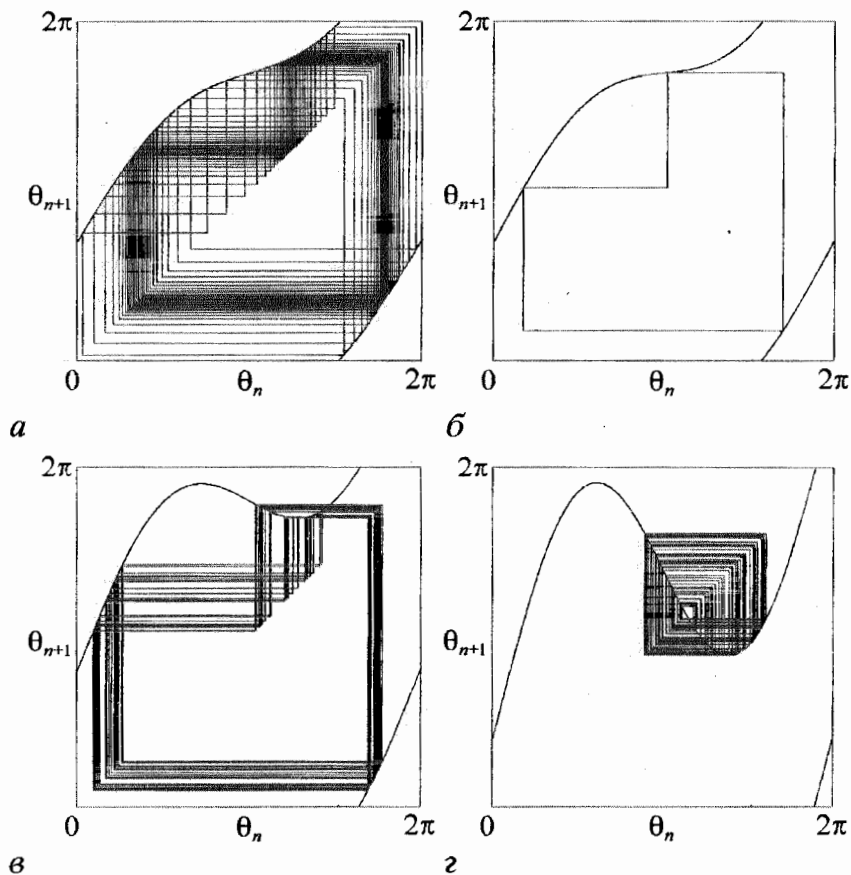


Рис. 4. Итерационные диаграммы, иллюстрирующие различные режимы динамики отображения окружности: а – квазипериодический, $k=0.7$, $\Delta/(2\pi)=0.35$; б – периодический, $k=0.9$, $\Delta/(2\pi)=0.35$; в – хаотический, $k=1.56$, $\Delta/(2\pi)=0.4$; г – хаотический, $k=3$, $\Delta/(2\pi)=0.2$

При $k=0$ число вращения выражается как $w=\Delta/(2\pi)$, поэтому при рациональных значениях $\Delta/(2\pi)$ имеют место периодические, а при иррациональных – квазипериодические режимы. Языки Арнольда имеют остриями как раз рациональные точки оси абсцисс. Несмотря на то, что количество языков бесконечно, между ними остается место для квазипериодических режимов. Это очевидно при $k=0$, но оказывается справедливым и при конечных k , пока $k<1$. При фиксированном $0<k<1$ для каждого рационального числа p/q существует свой интервал значений параметра расстройки, в пределах которого число вращения фиксировано и равно p/q . Этот интервал определяется шириной соответствующего языка Арнольда при данном k . Зависимость числа вращения от параметра расстройки оказывается монотонной непрерывной функцией, содержащей бесконечное число горизонтальных ступенек (рис. 5). Ее называют «чертовой лестницей» (*Devil's staircase*). При $k\rightarrow 0$ суммарная длина всех ступенек чертовой лестницы стремится к нулю; при увеличении k она монотонно возрастает и при $k=1$ становится равной единице. Множество значений параметра $\Delta/(2\pi)$, не принадлежащих ступенькам, соответствует иррациональным числам вращения, то есть квазипериодическим режимам динамики. Мера этого множества равна единице при $k=0$ и убывает до нуля при $k=1$. В этом последнем случае чертову лестницу называют полной. Достаточно убедительные и аккуратные численные расчеты показывают, что при $k=1$ квазипериодическим режимам отвечает фрактальное множество значений параметра расстройки, которое имеет нулевую меру, а его размерность Хаусдорфа приблизительно равна 0.870 [17–19].

На рис. 6 зависимость числа вращения от k и $\Delta/(2\pi)$ показана в виде трехмерного графика. Проекция этого графика на плоскость (Δ, k) дает расположение языков синхронизации, а сечение плоскостью $k=1$ – полную чертову лестницу.

В закритической области $k>1$ языки Арнольда частично перекрываются, что говорит о наличии мультистабильности: при одних и тех же значениях параметров может сосуществовать несколько аттракторов, отвечающих разным динамическим режимам. Каждый из них реализуется при задании начальных условий в бассейне притяжения соответствующего аттрактора. Внутри языков можно видеть сложную картину областей, где имеет место переход к хаосу через каскад удвоений периода на базе основного для данного языка периодического режима, присутствуют структуры типа «crossroad» (перекресток), точки сборки, линии складок.

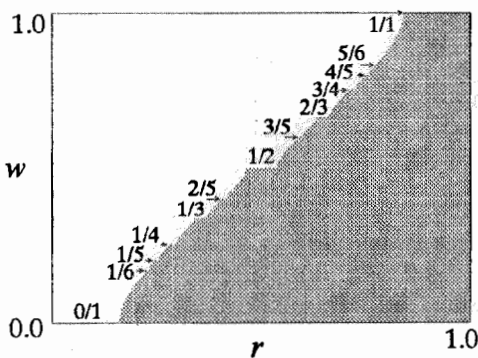


Рис. 5. «Чертова лестница» – зависимость числа вращения от параметра $r=\Delta/(2\pi)$ в критическом отображении окружности, $k=1$

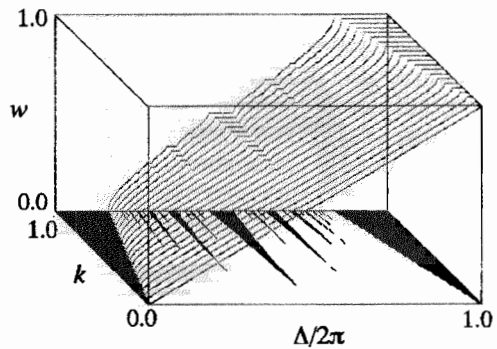


Рис. 6. Зависимость числа вращения от k и $\Delta/(2\pi)$ в виде трехмерного графика

Критическая точка GM и ренормгрупповой анализ

Представим себе, что мы движемся на плоскости параметров (Δ, k) от $k=0$ в сторону увеличения параметра k вдоль линии постоянного иррационального числа вращения w . При $k=1$ эта линия оканчивается: аттрактор перестает быть гладким тором и превращается в некоторый фрактальный объект. Это соответствует *критической точке, ассоциирующейся с данным числом вращения w* . С точки зрения фрактальных свойств критического аттрактора и устройства окрестности критической точки на плоскости параметров, существенной оказывается *структура разложения иррационального числа w в цепную дробь*.

Представление числа, принадлежащего интервалу $(0,1)$, цепной дробью имеет вид

$$w = \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}}, \quad (6)$$

где элементы a_0, a_1, a_2, \dots – положительные целые. Для любого иррационального числа w цепная дробь бесконечна. Наилучшие рациональные аппроксиманты, или подходящие дроби, получаются путем обрыва цепной дроби на некотором конечном шаге номера m . Самую простую структуру представления цепной дробью имеет *золотое среднее* $w=(5^{1/2}-1)/2$: в этом случае все элементы a_i равны 1. Рациональные аппроксиманты золотого среднего даются отношениями последовательных чисел Фибоначчи

$$w_m = F_m/F_{m+1}, \quad w = \lim_{m \rightarrow \infty} w_m, \quad (7)$$

$$F_0=0, F_1=1, F_2=1, F_3=2, F_4=3, F_5=5, \dots, F_{m+1}=F_m+F_{m-1}.$$

Критическую точку на плоскости (Δ, r) , отвечающую данному числу вращения, мы обозначили, как точку GM (рис. 7).

Изложим теперь вкратце содержание РГ-анализа, развитого в работах [13–16, 21, 22, 38, 39]. Для удобства введем вместо θ новую переменную $x=\theta/(2\pi)+1/2$ и нормируем параметр расстройки на 2π , положив $r=\Delta/(2\pi)$. Тогда отображение окружности (4) примет вид

$$x_{n+1} = x_n + r - k \sin(2\pi x_n)/(2\pi) \pmod{1}, \quad (8)$$

а точка перегиба окажется расположенной в начале координат.

Как показывают численные расчеты, критическая точка GM на плоскости параметров отображения (8) имеет координаты²

$$(r, k)_{GM} = (0.60666106347011201228\dots, 1). \quad (9)$$

Основная идея метода РГ состоит в том, чтобы рассмотреть последовательность операторов эволюции в критической точке, определенных на возрастающих временных интервалах, которые задаются последовательными знаменателями подходящих дробей. Для золотого среднего это числа Фибоначчи F_m .

Введем обозначение

$$f_m(x) = \underbrace{f^{F_m}(x)}_{(F_m \text{ раз})} - F_{m-1} = f(f(f(\dots(x)\dots))) - F_{m-1}, \quad (10)$$

² Процедура вычисления значения r , при котором число вращения равно заданному иррациональному числу, упрощается тем обстоятельством, что на линии $k=1$ число вращения еще является монотонной функцией параметра расстройки.

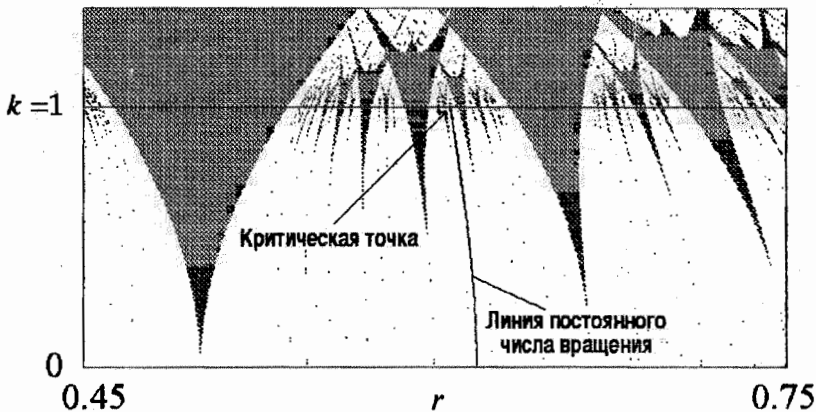


Рис. 7. Траектория на плоскости параметров (линия постоянного иррационального числа вращения $(5^{1/2}-1)/2$) и критическая точка, отвечающая моменту перехода к хаосу через разрушение квазипериодического движения

где $f(x)=x+r-k\sin(2\pi x)/(2\pi)$. Если известны $f_m(x)$ и $f_{m-1}(x)$, то в соответствии с (7) и (10) можно записать

$$f_{m+1}(x) = f_{m-1}(f_m(x)), \quad (11)$$

где принято во внимание, что для любого целого p функция $f(x)$ обладает тем свойством, что $f(x+p)=f(x)+p$.

Далее, на каждом шаге построения введем свою нормировку динамической переменной на фактор A_m , так что оператор эволюции за F_m шагов будет представлен функцией

$$g_m(x) = A_m f_m(x/A_m). \quad (12)$$

Этот фактор удобно выбрать так, чтобы $g_m(0)=1$, то есть положить

$$A_m = 1/f_m(0). \quad (13)$$

С использованием обозначения $\alpha_m = A_m/A_{m-1}$ можно переписать уравнения, определяющие последовательность функций g_m , в следующем виде:

$$\alpha_{m+1} = 1/[\alpha_m g_{m-1}(\alpha_m^{-1} g_m(0))], \quad (14)$$

$$g_{m+1}(x) = \alpha_{m+1} \alpha_m g_{m-1}(\alpha_m^{-1} g_m(x/\alpha_{m+1})).$$

Операция, позволяющая получить новую функцию g_{m+1} из пары старых – это и есть преобразование РГ. Для краткости его можно обозначить как

$$g_{m+1} = R_m[g_m, g_{m-1}]. \quad (15)$$

Альтернативная формулировка РГ-преобразования получается, если при построении оператора эволюции f_{m+1} вместо (11) использовать выражение

$$f_{m+1}(x) = f_m(f_{m-1}(x)). \quad (16)$$

В этом случае приходим к системе уравнений

$$\alpha_{m+1} = 1/g_m(\alpha_m), \quad (17)$$

$$g_{m+1}(x) = \alpha_{m+1} g_m(\alpha_m g_{m-1}(x/(\alpha_m \alpha_{m+1}))).$$

которая формально эквивалентна (14).

Можно составить программу для компьютера, которая строила бы графики

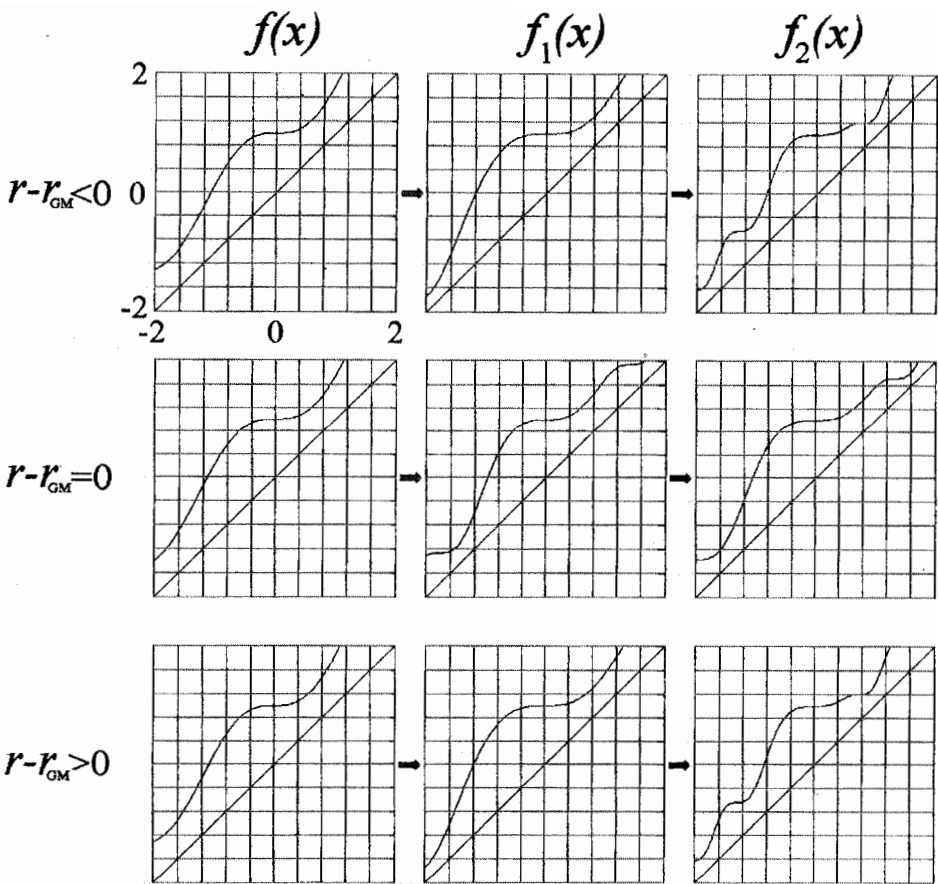


Рис. 8. Действие PG-преобразования на функцию $f(x)$ при $k=1$ и значениях r , меньшем, равном и большем критического $r_{GM}=0.60666106\dots$

функций g_m при $m=1,2,3,\dots$. На рис. 8 показано, как они выглядят при $k=1$ и значениях r , немного меньшем, равном и немного большем критического r_{GM} . При $r=r_{GM}$ замечаем, что вид графика при итерациях не меняется. Это говорит о сходимости последовательности пар функций (g_m, g_{m-1}) к неподвижной точке PG-преобразования. Факторы α_m также сходятся к определенному пределу α . При $r < r_{GM}$ и при $r > r_{GM}$ наблюдается уход от неподвижной точки.

Из (14) видно, что предельная функция, получаемая при $r=r_{GM}$, должна удовлетворять функциональному уравнению

$$g(x) = \alpha^2 g(\alpha^{-1} g(x/\alpha)). \quad (18)$$

Оно было получено в работе [13] и называется поэтому *уравнением Фейгенбаума – Каданова – Шенкера*. Решение этого уравнения, подчиненное дополнительному условию наличия кубической точки перегиба в начале координат, может быть найдено без апелляции к исходной форме «затравочного» отображения (8). Это означает универсальность рассматриваемого типа критического поведения. Полученное численно в виде полиномиальной аппроксимации решение имеет вид

$$\begin{aligned} g(x) = & 1 + 0.765184x^3 - 0.215464x^6 - 0.053469x^9 + 0.032921x^{12} + \\ & + 0.001231x^{15} - 0.004304x^{18} + 0.000668x^{21} + 0.000501x^{24} + \\ & + 0.000177x^{27} - 0.000042x^{30} + 0.000031x^{33} - 0.000004x^{39} \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Заметьте, что здесь представлены только степени, кратные трем. Попутно численное решение позволяет найти также масштабный фактор α , который оказывается равным

$$\alpha = -1.288574553954368866... \quad (20)$$

График универсальной функции $g(x)$ показан на рис. 9³.

Следующий шаг состоит в том, чтобы рассмотреть малое возмущение, соответствующее сдвигу из критической точки GM. Для упрощения рабочих соотношений полезен следующий трюк. Переопределим ПГ-преобразование, подставив в (17) вместо переменного масштабного фактора константу $\alpha = -1.28857...$. Полученное рекуррентное функциональное уравнение

$$g_{m+1}(x) = \alpha^2 g_{m-1}(\alpha^{-1} g_m(x/\alpha)) \quad (21)$$

имеет ту же неподвижную точку (19) и столь же правомерно, как исходное (действительно, правила перенормировки масштаба мы вправе установить по своему усмотрению, лишь бы было обеспечено существование неподвижной точки). Будем исходить из уравнения (21) и искать его решение в виде $g_m(x) = g(x) + \epsilon h_m(x)$, $\epsilon \ll 1$. В первом порядке по ϵ получаем

$$h_{m+1}(x) = \alpha^2 g'(\alpha^{-1} g(x/\alpha)) h_m(x/\alpha) + \alpha h_{m-1}(\alpha^{-1} g(x/\alpha)). \quad (22)$$

Относительно $h_m(x)$ это линейное разностное функциональное уравнение. Подстановка $h_m(x) = \delta^m h(x)$, где δ – константа, приводит к следующей задаче на собственные функции и собственные значения:

$$\delta^2 h(x) = \alpha^2 g'(\alpha^{-1} g(x/\alpha)) h(x/\alpha) + \alpha h(\alpha^{-1} g(x/\alpha)). \quad (23)$$

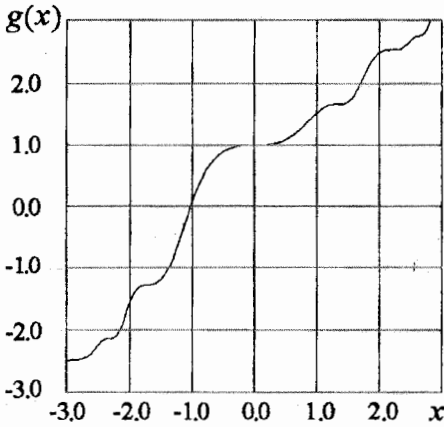


Рис. 9. График универсальной функции $g(x)$, являющейся неподвижной точкой уравнения ПГ (17)

Численное решение показывает, что имеется два существенных собственных числа⁴, превышающих по абсолютной величине единицу [13–15, 39]:

$$\delta_1 = -2.833610655891167799..., \quad (24)$$

$$\delta_2 = \alpha^2 = 1.660424381098700680...$$

Собственная функция, ассоциирующаяся с δ_1 , имеет разложение Тейлора вида $h_1(x) = 1 + \sum h_n x^{3n}$. Очевидно, она соответствует возмущению исходного отображения окружности, оставляющему его на критической линии $k=1$. Вторая собственная функция содержит в своем разложении все

³ Отметим, что представление (19) справедливо при $|x| \leq 1$. Универсальная функция определена и вне этой области, но для ее вычисления там следует привлекать функциональное уравнение (18) с тем, чтобы использовать (19) только в указанном интервале.

⁴ Кроме δ_1 и δ_2 , спектр собственных значений содержит несущественные числа, связанные с инфинитезимальными заменами переменной, а также с возмущениями, выводящими решение из подпространства коммутирующих функциональных пар. Чтобы пояснить последний момент, заметим, что все операторы эволюции f_m (см. (10), (11)) коммутируют, то есть результат их действия не зависит от порядка, поскольку они представляют собой многократные композиции одного и того же отображения. Например, $f_m(f_{m+1}(x)) = f_{m+1}(f_m(x))$. Это влечет за собой определенные ограничения и на вид функций h_m

степени x . Она включается при наличии возмущения, уводящего отображение с критической линии.

Итак, если слегка переместиться по параметрам из критической точки GM, то операторы эволюции для интервалов времени, заданных последовательными числами Фибоначчи F_m , будут вести себя асимптотически в зависимости от m следующим образом:

$$g_m(x) = g(x) + C_1 \delta_1^m h_1(x) + C_2 \delta_2^m h_2(x), \quad (25)$$

где коэффициенты C_1 и C_2 зависят от параметров исходного отображения и обращаются в нуль в критической точке.

В более общем случае, когда добавки малы в исходном отображении, но при итерациях PГ-преобразования становятся значительными, решение можно представить в виде

$$g_m(x) = G(x, C_1 \delta_1^m, C_2 \delta_2^m), \quad (26)$$

где функция трех аргументов $G(x, C_1, C_2)$ отвечает двумерному неустойчивому многообразию неподвижной точки функционального уравнения, причем $G(x, 0, 0) = g(x)$.

В следующем разделе мы рассмотрим и проиллюстрируем выводы, которые проведенный анализ позволяет сделать относительно свойств скейлинга в критической точке GM и в ее окрестности.

Критический аттрактор GM

Предположим сначала, что параметры исходного отображения выбраны точно соответствующими критической точке GM. Тогда, согласно результатам PГ-анализа, операторы эволюции в критической точке за интервалы времени, даваемые числами Фибоначчи F_m , определяются универсальной функцией, и при этом на каждом очередном шаге m пересчет масштаба динамической переменной производится на фактор $\alpha = -1.28857\dots$. Отсюда следует, что структура критического аттрактора в окрестности кубической точки перегиба должна воспроизводить себя при указанном изменении масштаба.

Попытка проиллюстрировать это свойство скейлинга на обычной итерационной диаграмме оказывается не очень удачной: траектория плотно заполняет критический аттрактор из-за присущей квазипериодической динамике эргодичности, и детали структуры становятся неразличимы. Используем поэтому диаграмму, выполненную в специальной технике кодирования тонами серого цвета (рис. 10). При выводе каждой точки на экран компьютера число, задающее яркость в данном пикселе, увеличивается на единицу. Более темные области на диаграмме соответствуют большему относительному времени пребывания, а более светлые – редкому посещению. По существу, картина отражает распределение инвариантной меры на критическом аттракторе.

Если выделить фрагмент картины вблизи точки перегиба, то можно убедиться, что структура полос в нем воспроизводит себя при изменении масштаба на фактор α (с изменением ориентации, поскольку масштабный фактор отрицателен).

Таким образом, фрактальные свойства критического аттрактора на пороге разрушения квазипериодичности проявляются в распределении на нем инвариантной меры. Эту меру можно исследовать с помощью следующего приема. Рассмотрим отображение окружности на себя, состоящее в повороте на фиксированный угол

$$y_{n+1} = y_n + w \pmod{1}, \quad (27)$$

где $w = (5^{1/2} - 1)/2$, и попытаемся найти такую функцию $\phi(y)$, чтобы соотношение $x_n = \phi(y_n)$ в точности давало последовательность итераций синус-отображения

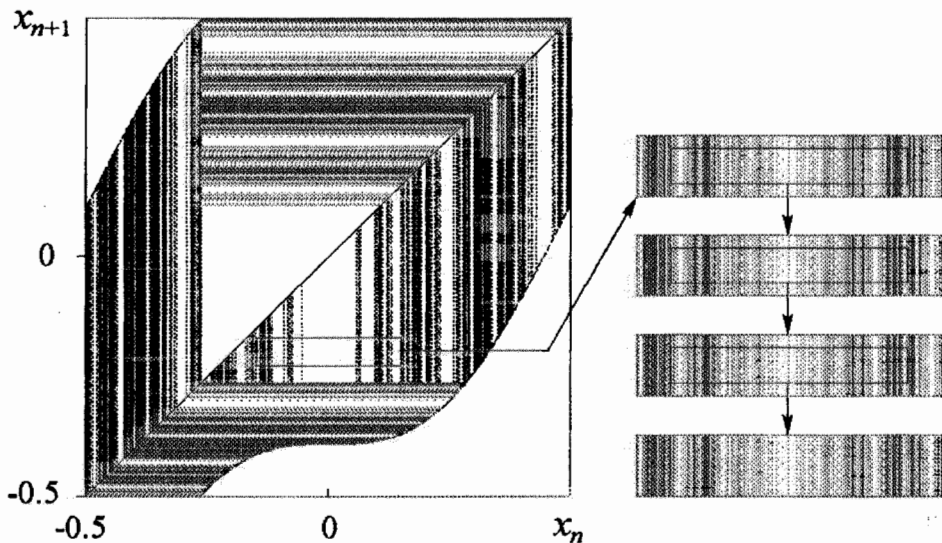


Рис. 10. Итерационная диаграмма, иллюстрирующая распределение инвариантной меры на аттракторе отображения окружности в критической точке GM. При выводе каждой точки на экран компьютера число, кодирующее яркость в данном пикселе, увеличивается на единицу. Вставка показывает фрагмент изображения в окрестности точки перегиба отображения окружности и результат последовательного увеличения с изменением масштаба от уровня к уровню в α раз

окружности в критической точке GM. Функции $x=\varphi(y)$ и $y=\varphi^{-1}(x)$ будут определять замену, переводящую отображение поворота в критическое отображение окружности и обратно. Для y инвариантная мера отвечает, очевидно, равномерному распределению на единичном интервале $[0,1)$. Соответственно, плотность распределения для x будет получаться как $\rho(x)=\int \delta(x-\varphi(y))dy$.

График функции $\varphi(y)$ можно построить численно следующим образом: стартовав из точки $x=0, y=0$, будем итерировать одновременно критическое отображение окружности (8) и отображение поворота (27), откладывая получаемые пары величин в координатах (y,x) . Полученный таким образом график показан на рис. 11, и он выглядит как фрактальная кривая. Чтобы убедиться в наличии масштабного подобия, выделим фрагмент кривой в окрестности точки $(0,0)$. При пересчете масштаба по оси x на фактор α и по оси y на фактор $\beta=-(5^{1/2}+1)/2$ картина воспроизводит себя тем с большей точностью, чем глубже уровень разрешения.

Для анализа критического аттрактора можно привлечь мультифрактальный формализм [50, 51]. Построим последовательность x_n , порождаемую критическим отображением окружности при старте из $x_0=0$ для $n=1,2,\dots,F_{m+1}$, где F_{m+1} – некоторое достаточно большое число Фибоначчи. Пусть l_n обозначает длину интервала между точками x_n и x_{n+F_m-1} , вычисленную по модулю 1. Каждому интервалу $l_n, n=1,\dots,F_m$ припишем одинаковую меру (вероятность) $p=1/F_m$. Далее определим суммы вида

$$\Gamma_{q\tau}^{(m)} = \sum_{i=1}^{F_m} p^q |l_i|^{-\tau} = F_m^{-q} \sum_{i=1}^{F_m} l_i^{-\tau} \quad (28)$$

и потребуем, чтобы при $k \rightarrow \infty$ они не убывали до нуля и не увеличивались до бесконечности. Для этого полагаем

$$q(\tau) = \lim_{m \rightarrow \infty} (\log \Gamma_{q\tau}^{(m)} / \log F_m). \quad (29)$$

Имея функцию $q(\tau)$, строим график обобщенной размерности как зависимость

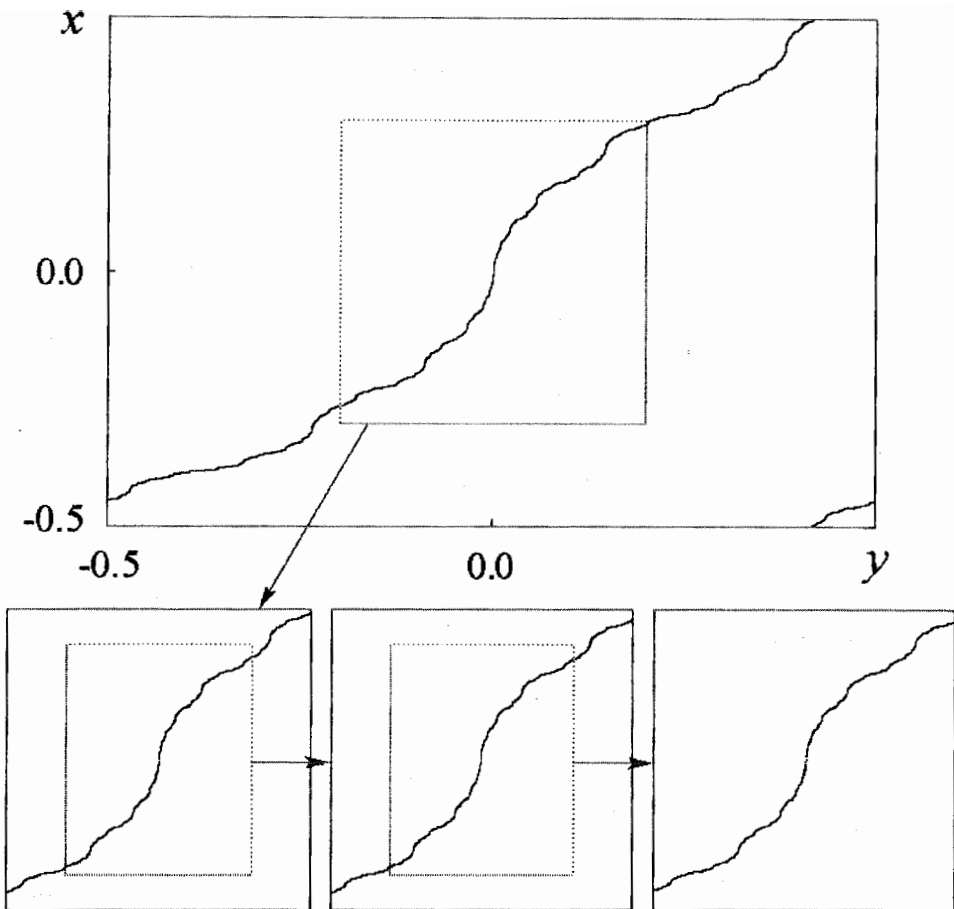


Рис. 11. Построенный численно график функции $x=\varphi(y)$, которая определяет замену, приводящую критическое отображение окружности к отображению поворота. Для иллюстрации свойства скейлинга, присущего этой фрактальной кривой, фрагмент графика воспроизводится на нескольких последовательных шагах пересчета масштаба по оси x на фактор $\alpha=-1.28857$ и по оси y на фактор $\beta=-(5^{1/2}+1)/2$

между величинами $q=q(\tau)$ и $D(q)=\tau/(q-1)$, а также скейлинг-спектр как зависимость между $\alpha=d\tau/dq$ и $f=\alpha q-\tau$ (рис. 12).

Как известно, $D(0)$ представляет собой размерность Хаусдорфа. Согласно результатам вычислений, в данном случае она равна 1. Так и должно быть, поскольку существует непрерывная замена, сводящая критическую динамику к отображению поворота (27). Однако критический аттрактор все же является фракталом, о чем говорит наличие нетривиальных дробных информационной и корреляционной размерностей $D(1)=0.9220$ и $D(2)=0.8664$. При $q \rightarrow \pm\infty$ имеем $D(-\infty)=\log w^{-1}/\log|\alpha|=1.8980$ (максимальная размерность) и $D(\infty)=\log w^{-1}/\log|\alpha|^\beta=0.6326$ (минимальная размерность). Скейлинг-спектр располагается в интервале изменения α от $D(\infty)$ до $D(-\infty)$ и имеет экстремум, равный величине хаусдорфовой размерности аттрактора $f_{\max}=D(0)=1$.

Перейдем к обсуждению спектра Фурье критического аттрактора. Поскольку переменная x имеет смысл фазы, то все физически значимые величины должны зависеть от нее периодически. Следовательно, мы должны интересоваться спектральным составом не самой по себе последовательности x_n , а последовательностей вида $s_n=F(x_n)$, где F – некоторая гладкая функция периода 1.

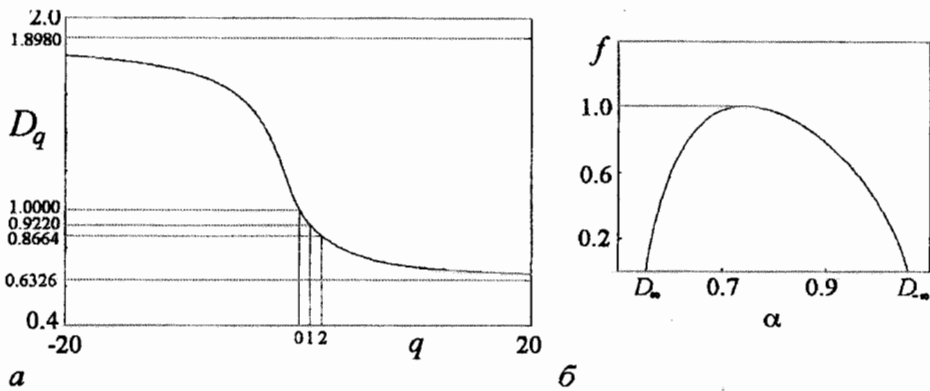


Рис. 12. Спектр обобщенных размерностей (а) и скейлинг-спектр (б) для критического аттрактора отображения окружности в точке GM

Для практического построения спектра возьмем близкое к критическому, но не равное ему значение параметра r в отображении окружности, так чтобы при $k=1$ реализовался стартующий из $x=0$ цикл с периодом, равным достаточно большому числу Фибоначчи, скажем, $N=F_{17}=1597$. Далее вычисляем амплитуды компонент Фурье стандартным образом

$$c_m = 1/N \sum_{n=0}^{N-1} F(x_n) \exp(-2\pi i m n / N). \quad (30)$$

При этом $f=m/N$ есть частота m -ой компоненты, а квадрат модуля коэффициента — ее интенсивность $S(f)=S(m/N)=|c_m|^2$. Что касается функции F , то ее зададим просто в виде $F(x)=\sin 2\pi x$.

На рис. 13, а спектр показан в том виде, который обычно используется в экспериментальных исследованиях: по оси абсцисс отложена частота, а по оси

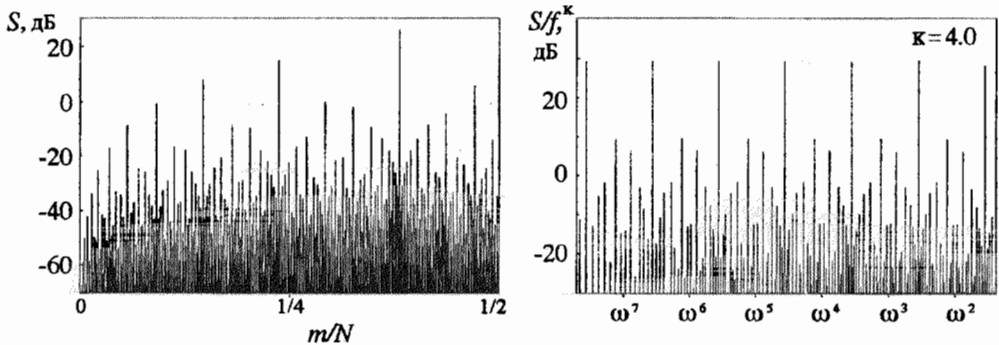


Рис. 13. Спектры Фурье для критической динамики отображения окружности (аппроксимация циклом периода $N=F_{17}=1597$). На левой диаграмме использован логарифмический масштаб по оси амплитуд и обычный пропорциональный по оси частот. На правой диаграмме использован логарифмический масштаб по обеим осям, и при этом спектральные интенсивности отнесены к f^k , где показатель $k \approx 4.0$ подобран эмпирически, $\omega = (5^{1/2} - 1)/2$

ординат — амплитуда компонент в логарифмическом масштабе $S(\text{дБ}) = 10 \lg |c_m|^2$. Чтобы сделать видимыми присущие спектру свойства подобия, используют двойной логарифмический масштаб (рис. 13, б). Как можно заметить, относительная высота и взаимное расположение пиков воспроизводят друг друга с правильной периодичностью по оси логарифма частот.

Скейлинг на критической линии

Выведем отображение из критической точки изменением параметра расстройки r , оставив величину k неизменной и равной единице. При этом

отображение сохраняет кубическую точку перегиба с нулевой первой производной в ней. В решении линеаризованного уравнения РГ (25) коэффициент C_1 будет пропорционален $r-r_{GM}$, а коэффициент C_2 будет нулевым: наличие добавки $h_2(x)$ привело бы к «разрушению» кубической точки перегиба и уходу с критической линии. Таким образом, асимптотическое выражение для перенормированного оператора эволюции за F_m шагов принимает вид

$$g_m(x) = g(x) + \text{const}(r-r_{GM})\delta_1^m h_1(x). \quad (31)$$

Если уменьшить отклонение от критической точки в $\delta_1 = -2.8336\dots$ раз, то форма оператора эволюции за F_{m+1} шагов будет такой же, какой она была для F_m шагов при старом значении параметра. Следовательно, характер динамики должен быть аналогичным, но с временным масштабом в $F_{m+1}/F_m = =w^{-1} = 1.6180\dots$ раз больше. Соответственно, ляпуновский показатель будет в такое же число раз меньше.

На рис. 14 вверху показан график зависимости ляпуновского показателя отображения окружности от параметра расстройки вдоль линии $k=1$. «Провалы» ниже нуля соответствуют областям периодичности, то есть языкам Арнольда, а множество точек, где показатель нулевой, — множеству сохранившихся на критической линии квазипериодических режимов. В нижней части рисунка представлены диаграммы, показывающие детали структуры в окрестности точки $r=r_{GM}$, так что каждая последующая представляет собой увеличенный фрагмент предыдущей. При этом масштаб по оси ляпуновского показателя пересчитывается в w^{-1} раз, а по оси параметра r — в δ_1 раз относительно критической точки $r=r_{GM}$. Можно видеть, что вид графиков хорошо воспроизводится на разных уровнях разрешения. На более глубоких уровнях степень соответствия, как можно ожидать, будет еще выше.

Другим проявлением скейлинга служит масштабное подобие полной чертовой лестницы в окрестности той ее точки, где число вращения равно золотому среднему. Как известно, при переходе к аппроксимации золотого среднего очередной подходящей дробью погрешность уменьшается на фактор $v = (-w^{-2})$ (знак минус означает, что погрешность попеременно положительная или отрицательная). Это будет фактор скейлинга по вертикальной оси. По горизонтальной оси фактором скейлинга служит, как следует из (31), константа δ_1 . Если выделить фрагмент чертовой лестницы вблизи соответствующей точки и представить его с увеличением на указанные факторы по осям координат, то конфигурация ступеней воспроизведет себя (рис. 15).

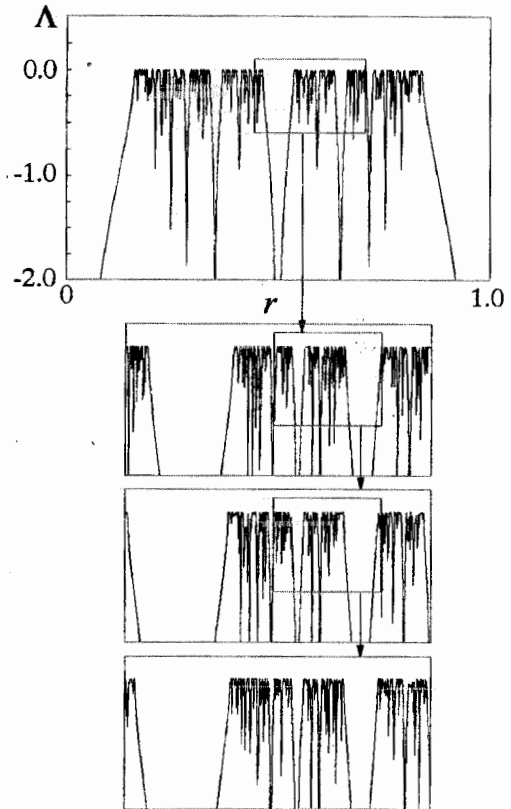


Рис. 14. Вверху — график зависимости ляпуновского показателя отображения окружности от параметра r при $k=1$. Каждый следующий рисунок представляет собой увеличенный фрагмент предыдущего. Пересчет масштаба по оси параметра r производится на фактор $\delta_1 = -2.8336\dots$, а по оси ляпуновского показателя — в $w^{-1} = 1.6180\dots$ раз

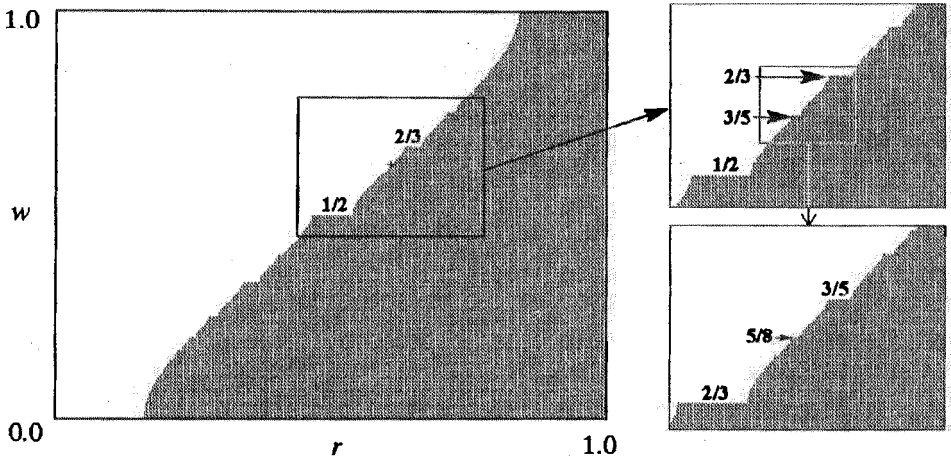


Рис. 15. Иллюстрация скейлинга чертовой лестницы в окрестности точки, где число вращения равно золотому среднему. Структура воспроизводит себя при пересчете масштаба на фактор $\delta_1 = -2.8336\dots$ по горизонтали и $\nu = (-w^{-2}) = -2.6180\dots$ по вертикали

Скейлинг языков Арнольда на плоскости параметров

Как следует из результатов РГ-анализа, вблизи критической точки GM выражение для оператора эволюции, получаемое при многократных итерациях РГ-преобразования, зависит от двух параметров – коэффициентов C_1 и C_2 (см. (25)). Если построить карту динамических режимов на плоскости этих параметров, то она должна обладать свойством двумерного скейлинга. Действительно, одновременный пересчет параметров по правилу $C_1' = C_1/\delta_1$, $C_2' = C_2/\delta_2$ и увеличение индекса t на единицу оставляет форму оператора эволюции неизменной. Поэтому в точке (C_1, C_2) и в точке (C_1', C_2') будут существовать подобные режимы, отличающиеся масштабом времени – во второй точке он в $(5^{1/2}+1)/2$ раз больше. Поскольку мы не имеем явного соотношения, связывающего коэффициенты C_1 и C_2 с параметрами исходного отображения, задача построения системы координат, подходящей для иллюстрации скейлинга, должна быть решена численно с достаточной степенью точности.

В качестве начала координат естественно выбрать саму критическую точку GM. Координатная ось C_1 должна быть направлена вдоль критической линии $k=1$, поскольку именно собственная функция h_1 отвечает возмущению, не разрушающему кубическую точку перегиба. Что касается второй координатной линии, то она, как можно сообразить, должна идти вдоль кривой на плоскости (r, k) , отвечающей постоянному числу вращения – золотому среднему (рис. 16). Эту кривую можно найти численно. Используем аппроксимацию полиномом:

$$\Delta r = ac_2 + bc_2^2 + o(c_2^2), \quad \Delta k = c_2, \quad (32)$$

где $\Delta r = r - r_{GM}$, $\Delta k = k - 1$. Тогда численные расчеты дают

$$a \approx -0.01749, \quad b \approx -0.00148. \quad (33)$$

Рис. 16. К выбору «скейлинговых координат» вблизи критической точки GM для отображения окружности

С учетом сделанных замечаний, связь между «скейлинговыми координатами»

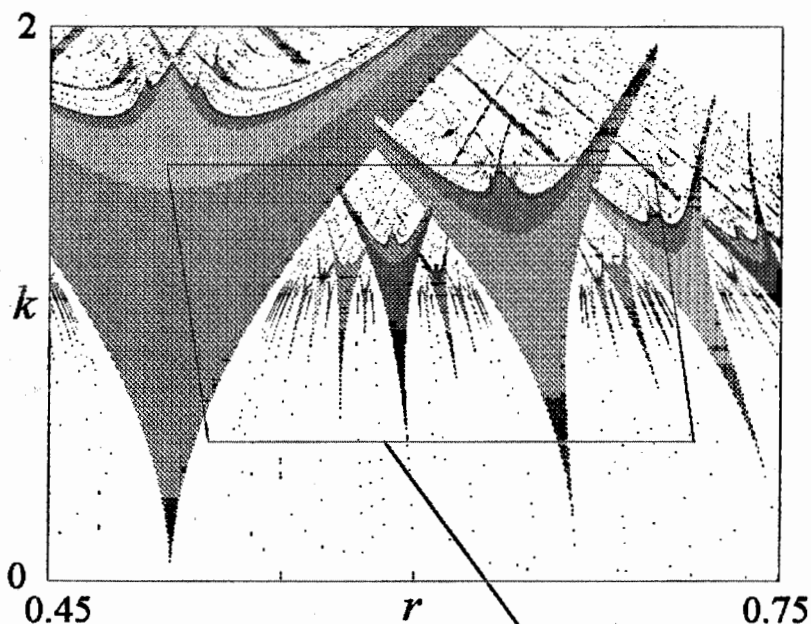


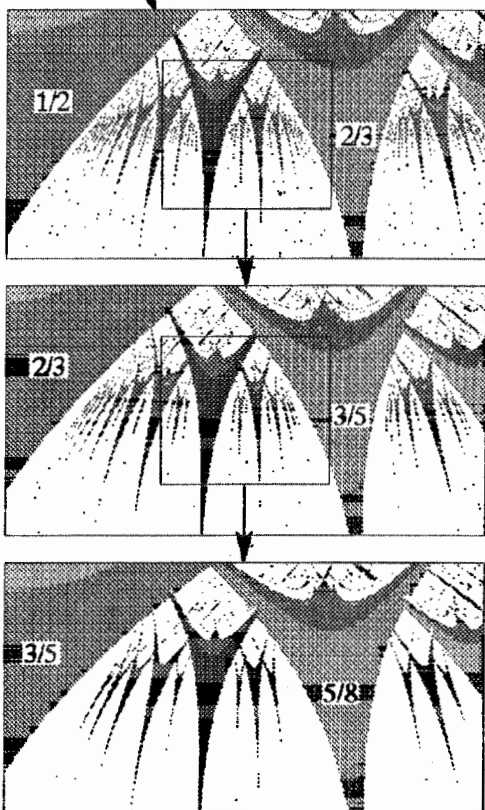
Рис. 17. Иллюстрация двумерного скейлинга картины языков Арнольда на карте динамических режимов отображения окружности вблизи критической точки GM. Криволинейный четырехугольник, в центре которого располагается критическая точка, образован координатными линиями $c_1 = \pm 0.1$ и $c_2 = \pm 0.5$. Попавшая внутрь этого четырехугольника часть плоскости параметров показана отдельно в координатах (c_1, c_2) . Пересчет масштаба на вставках от уровня k уровню производится на факторы $\delta_1 = -2.8336\dots$ и $\delta_2 = 1.6604\dots$, соответственно, по горизонтали и вертикали. Цифрами в основных языках Арнольда указаны числа вращения

(c_1, c_2) и параметрами исходного отображения можно определить как

$$\Delta r = c_1 + ac_2 + bc_2^2, \quad \Delta k = c_1. \quad (34)$$

Что принципиально, замена переменных, приводящая к скейлинговым координатам, получилась нелинейной. При этом учет квадратичных членов разложения Тейлора существен, а последующих – нет! Это связано с конкретным, присущим критической точке GM, соотношением факторов δ_1 и δ_2 . Чтобы разъяснить данный момент,

представим себе, что мы рассматриваем серию картинок, показывающих окрестность критической точки на плоскости параметров во все меньших и меньших масштабах, так что $c_1 \propto \delta_1^{-m}$, $c_2 \propto \delta_2^{-m}$. Если мы пренебрегаем коэффициентом разложения в ряд Тейлора при c_1^p , то в коэффициент при первом собственном векторе в формуле (25) будет внесена погрешность порядка δ_2^{-pm} .



Полный же вклад первого собственного вектора с учетом его нарастания по закону δ_1^m будет порядка $\delta_1^m \delta_2^{-pm}$. Этот вклад не опасен и исчезает при $m \rightarrow \infty$, если $|\delta_1| < |\delta_2|^p$. В нашем случае $\delta_1 = -2.83361$ и $\delta_2 = 1.66044$, так что $|\delta_2| < |\delta_1|$ и $|\delta_2|^2 < |\delta_1|$, но $|\delta_2|^p > |\delta_1|$ при $p \geq 3$. Следовательно, в (34) достаточно учитывать линейный и квадратичный члены по c_2 .

Рис. 17 иллюстрирует двумерный скейлинг картины языков Арнольда вблизи критической точки GM. На верхней диаграмме по осям координат отложены параметры исходного отображения, r и k . Криволинейный четырехугольник, в центре которого располагается критическая точка, образован координатными линиями $c_1 = \pm 0.1$ и $c_2 = \pm 0.5$. Часть плоскости параметров внутри этого четырехугольника показана отдельно, теперь уже в координатах (c_1, c_2) , а затем воспроизведена с пересчетом масштаба на факторы δ_1 и δ_2 по соответствующим осям координат. Поскольку фактор δ_1 отрицателен, картина инвертируется по горизонтали при каждом масштабном пересчете. Обратите внимание, как при этом *перенумеровываются языки Арнольда*: если число вращения было F_{m-1}/F_m , то для аналогичного языка на следующей картинке оно оказывается равным F_m/F_{m+1} .

Заключение

Как и универсальность Фейгенбаума, имеющая место при удвоениях периода, критическая точка GM может встречаться не только в одномерных отображениях, но и в многомерных нелинейных диссипативных системах при переходе к хаосу через квазипериодичность. С общей точки зрения, этот тип критического поведения следует рассматривать как ситуацию *коразмерности два*. Это значит, что она будет возникать в некоторой точке, если пространство параметров двумерное, на линии, если оно трехмерное и т.д. Действительно, чтобы реализовать критическую ситуацию, нужно обеспечить подбором параметров равенство нулю двух коэффициентов в (25); соответствующая система уравнений $C_1(A, B, C, \dots) = 0$ и $C_2(A, B, C, \dots) = 0$ и определит расположение критической точки, линии или поверхности в пространстве параметров исходной задачи (A, B, C, \dots) . В отличие от фейгенбаумовской критической точки, имеющей коразмерность один, критическое поведение типа GM труднее обнаружить и наблюдать. Тем не менее, в литературе описаны вполне успешные эксперименты, в которых удавалось реализовать критическое поведение типа GM, в частности, при конвекции Рэлея – Бенара, в электронных системах и др. Были оценены масштабные факторы α и δ , получены спектры Фурье и даже скейлинг-спектры в разумном соответствии с ожидаемыми на основании анализа одномерного отображения окружности (см. [52–54]).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 00–02–17509 и Минобразования РФ, грант № 97–0–8.3–88.

Библиографический список

1. Ландау Л.Д. К проблеме турбулентности // ДАН СССР. 1944. Т. 44, № 8. С. 339.
2. Рюэль Д., Такенс Ф. О природе турбулентности // Странные аттракторы/ Под ред. Я.Г.Синяя и Л.П.Шильникова, М.: Мир, 1981. С. 117.
3. Grebogi C., Ott E., Yorke J.A. Attractors on an N-torus. Quasiperiodicity versus chaos // Physica. 1985. Vol. D15. P. 354.
4. Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A. Strange attractors that are not chaotic // Physica. 1984. Vol. D13. P. 261.
5. Kim S-H., Ostlund S. Simultaneous rational approximations in the study of dynamical systems // Phys. Rev. 1986. Vol. A34. P. 3426.

6. *Rockmore D., Siegel R., Tongring N., Tresser C.* An approach to renormalization on the n -torus // CHAOS. 1991. Vol. 1, № 1. P. 25.
7. *Baladi V., Rockmore D., Tongring N., Tresser C.* Renormalization on the n -dimensional torus // Nonlinearity. 1992. Vol. 5. P. 1111.
8. *Baesens C., Guckenheimer J., Kim S., MacKay R.S.* Three coupled oscillators: mode-locking, global bifurcations and toroidal chaos // Physica. 1991. Vol. D49. P. 387.
9. *Arnold V.I.* Cardiac arrhythmias and circle mappings // CHAOS. 1991. Vol. 1, № 1. P. 20.
10. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, 304 с.
11. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
12. *Shenker S.J.* Scaling behavior in a map of a circle onto itself: Empirical results // Physica. 1982. Vol. D5. P. 405.
13. *Feigenbaum M.J., Kadanoff L.P., Shenker S.J.* Quasiperiodicity in dissipative systems: A renormalization group analysis // Physica. 1982. Vol. D5. P. 370.
14. *Rand D., Ostlund S., Sethna J., Siggia E.D.* Universal transition from quasiperiodicity to chaos in dissipative systems // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 49, № 2. P. 132.
15. *Ostlund S., Rand D., Sethna J., Siggia E.D.* Universal properties of the transition from quasi-periodicity to chaos in dissipative systems // Physica. 1983. Vol. D8, № 3. P. 303.
16. *Daido H.* On the scaling behavior in a map of a circle onto itself // Progr. Theor. Phys. 1982. Vol. 68, № 6. P. 1935.
17. *Jensen M.H., Bak P., Bohr T.* Complete devil's staircase, fractal dimension, and universality of mode-locking structure in the circle map // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 50. P. 1637.
18. *Bohr T., Bak P., Jensen M.H.* Transition to chaos by interaction of resonances in dissipative systems. II. Josephson junctions, charge-density waves, and standard maps. Phys. Rev. 1984. Vol. A30. P. 1970.
19. *Jensen M.H., Bak P., Bohr T.* Transition to chaos by interaction of resonances in dissipative systems. 1. Circle maps. Phys. Rev. 1984. Vol. A30. P. 1960.
20. *Bohr T., Gunaratne G.* Scaling for supercritical circle maps: numerical investigation of the onset of bistability and period doubling // Phys. Lett. 1985. Vol. A113. P. 55.
21. *Сунай Я.Г., Ханун К.М., Шур Л.Н.* Новый подход к построению неподвижных точек ренормгруппы в динамических системах // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Vol. 29, № 9. С. 1061.
22. *Rand D.* Fractal bifurcation sets, renormalization strange sets, and their universal invariants // Proc. Roy. Soc. (London). 1987. Vol. A413. P. 45.
23. *Wang X.W., Mainieri R., Lowenstein J.H.* Circle map scaling in a two-dimensional setting // Phys. Rev. 1989. Vol. A40, № 9. P. 5382.
24. *Kim S., Ostlund S.* Universal scaling in circle map // Physica. 1989. Vol. D39, № 2-3. P. 365.
25. *Hu B., Valinia A., Piro O.* Universality and asymptotic limits of the scaling exponents in circle maps // Phys. Lett. 1990. Vol. A144, № 1. P. 7.
26. *Cvitanovic P., Gunaratne G.H., Vinson M.J.* On the mode-locking universality for critical circle map. Nonlinearity 3, 1990, 873.
27. *Fourcade B., Tremblay A.-M.S.* Universal metric properties of circle maps from the point of view of critical phenomena. I. Phenomenology // J. Stat. Phys. 1990. Vol. 61, № 3-4. P. 607.
28. *Fourcade B., Tremblay A.-M.S.* Universal metric properties of circle maps from the point of view of critical phenomena. II. Analytical results // J. Stat. Phys. 1990. Vol. 61, № 3-4. P. 639.
29. *Christos G.A., Chergetta T.* Trajectory scaling functions for the circle map and the quasi-periodic route to chaos // Phys. Rev. 1991. Vol. A44, № 2. P. 898.
30. *Khanin K.M.* Universal estimates for critical circle mappings // CHAOS. 1991. Vol. 1, № 2. P. 181.

31. *Pikovsky A.S., Zaks M.A.* On the global scaling properties of mode-lockings in a critical circle map // *Phys.Lett.* 1991. Vol. A155, № 6–7. P. 373.
32. *Pikovsky A.S., Zaks M.A.* Farey level separation in mode-locking structure of circle mappings // *Physica.* 1992. Vol. D59. P. 255.
33. *Ketoja J.A.* Renormalization in a circle map with two inflection points // *Physica.* 1992. Vol. D55, № 1–2. P. 45.
34. *MacKay R.S.* Renormalization of bicritical circle maps // *Phys. Lett.* 1994. Vol. A187. P. 391.
35. *Campbell D.K., Galeera R., Tresser C., Uherka D.R.* Piecewise linear models for the quasiperiodic transition to chaos // *CHAOS.* 1996. Vol. 6, № 2. P. 121.
36. *De Spinadel V.W.* On characterization of the onset of chaos // *Chaos, Solitons & Fractals.* 1997. Vol. 8, № 10. P. 1631.
37. *Ketoja J.A., Satija I.I.* Harper equation, the dissipative standard map and strange nonchaotic attractors: Relationship between an eigenvalue problem and iterated maps // *Physica.* 1997. Vol. D109, № 1–2. P. 70.
38. *Dixon T.W., Kenny B.G.* Transition to criticality in circle maps at the golden mean // *J.Math.Phys.* 1998. Vol. 39, № 11. P. 5952.
39. *Dixon T.W., Gherghetta T., Kenny B.G.* Universality in the quasiperiodic route to chaos // *CHAOS.* 1996. Vol. 6, № 1. P. 32.
40. *Feigenbaum M.J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // *J. Stat. Phys.* 1978. Vol. 19. P. 1, 25.
41. *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем // *УФН.* 1983. Vol. 141, №2. С. 343.
42. *Вул Е.Б., Синай Я.Г., Ханин К.М.* Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм // *УМН.* 1984. Vol. 39, № 3. С. 3.
43. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* Критическая динамика одномерных отображений. Часть I. Сценарий Фейгенбаума // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1993. Т. 1, № 1–2, 15.
44. *Peitgen H.-O., Jürgens H., Saupe D.* *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science.* Springer-Verlag, N.Y., Berlin, 1992.
45. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Chua L.O.* Two-parameter study of transition to chaos in Chua's circuit: renormalization group, universality and scaling // *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 1993. Vol. 3, № 4. P. 943.
46. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Chua L.O.* Multi-parameter criticality in Chua's circuit at period-doubling transition to chaos // *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 1996. Vol. 6, № 1. P. 119.
47. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В.* *Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем.* Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1999, 368 с.
48. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* A variety of period-doubling universality classes in multi-parameter analysis of transition to chaos // *Physica.* 1997. Vol. D109. P. 91.
49. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Коразмерность и типичность в контексте проблемы описания перехода к хаосу через удвоения периода в диссипативных динамических системах // *Регулярная и хаотическая динамика.* 1997. Т. 2, № 3–4. С. 90.
50. *Halsey T.C., Jensen M.H., Kadanoff L.P., Procaccia I., Shraiman B.I.* Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets // *Phys. Rev.* 1986. Vol. A33. P. 1141.
51. *Beck C., Schlögl F.* *Thermodynamics of chaotic systems* // Cambridge Univ. Press, 1993, 281 p.
52. *Stavans J., Helsen F., Libchaber A.* Fixed winding number and the quasiperiodic route to chaos in a convective fluid // *Phys.Rev.Lett.* 1985. Vol. 55. P. 595.
53. *Леви Б.Г.* Новый глобальный фрактальный формализм описывает различные сценарии перехода к хаосу // *Физика за рубежом.* Вып. 87. М.: Мир, 1987, 263 с.

54. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.

Саратовский государственный
университет
Институт радиотехники и
электроники РАН,
Саратовское отделение

Поступила в редакцию 1.06.2000

SCALING AT THE TRANSITION TO CHAOS VIA DESTRUCTION OF QUASIPERIODIC MOTION AT THE GOLDEN MEAN FREQUENCY RATIO

A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, N.Yu. Ivankov, A.A. Osin

The paper reproduces basic results concerning transition to chaos via destruction of quasiperiodic motion in one-dimensional circle map. For the golden mean rotation number we present the renormalization group (RG) analysis, consider structure of the critical attractor, give illustrations of scaling in the parameter space of the model map.

We outline the fact that the two-parameter scaling can be observed only in a specially chosen local coordinates connected with the parameters of the original map via a nonlinear variable change; its form must account the concrete relation between two relevant eigenvalues of the linearized RG equation.