

НАГЛЯДНЫЕ ОБРАЗЫ ХАОСА

А. П. КУЗНЕЦОВ

Саратовский государственный университет

VISUAL DEMONSTRATIONS OF CHAOS

A. P. KUZNETSOV

Up-to-date computers permit to create simple but dramatic illustrations of dynamic behavior for systems of diverse nature. Hundreds and thousands of iterations take few seconds, enabling to obtain visual demonstrations of dynamics, involving hundreds and thousands of different initial states. Such numeric experiments demonstrate an amazing property of simple "predictable" systems – the possibility of dynamic chaos.

Современные компьютеры позволяют создавать простые и эффектные иллюстрации поведения динамических систем различной природы. Сотни и тысячи итераций делаются за секунды, что дает возможность получать наглядные образы поведения динамических систем, используя одновременно сотни и тысячи начальных условий. Подобные компьютерные эксперименты обнаруживают удивительное свойство простых предсказуемых систем – возможность динамического хаоса.

www.issep.rssi.ru

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Огромное количество моделей реальных явлений и процессов, изучаемых в естествознании, характеризуется свойством предсказуемости. Соответствующие примеры можно найти как в современной науке, так и в обычном школьном курсе физики. Так, если известны начальные вектор скорости и координаты брошенного под углом к горизонту тела, то в рамках механики Ньютона и простых традиционных предположений можно рассчитать траекторию полета тела и его координаты в любой момент времени. В математическом аспекте свойство предсказуемости находит воплощение в понятии динамической системы [1–3].

Концепция динамической системы позволяет осуществить переход от реального процесса к его четко сформулированной математической модели. Можно выделить два основных класса динамических систем. В рамках первого из них эволюционный процесс описывается с помощью системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, y, \dots), \quad \dot{y} = g(x, y, \dots), \dots \quad (1)$$

Здесь f и g – некоторые функции, вид которых зависит от исходной задачи. В силу известного свойства дифференциальных уравнений (грубо говоря, свойства решаемости) модели, приводимые к виду (1), действительно являются динамическими системами. Примеры систем в виде дифференциальных уравнений можно найти не только в физике, но и в химии (химическая кинетика), биологии (популяционная биология) и т.д.

Гораздо менее известен еще один класс динамических систем – дискретные отображения. Дискретные отображения задают закон эволюции с помощью простых итерационных формул вида

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n, \dots), \quad y_{n+1} = g(x_n, y_n, \dots), \dots \quad (2)$$

Для математиков подобный объект как предмет изучения не требует комментариев. Однако для физиков, химиков, биологов математическая естественность еще не главный аргумент в пользу применения того или иного инструментария. Поэтому поясним, как можно перейти от дифференциального уравнения к дискретному

отображению на примере хотя и искусственной, но весьма простой физической системы.

Пусть тело массы m движется в среде, причем сила вязкого сопротивления зависит от скорости тела \dot{x} . Движение тела описывается вторым законом Ньютона

$$m\ddot{x} + k\dot{x} = 0, \quad (3)$$

где k — коэффициент, характеризующий вязкость. Состояние такой системы естественно охарактеризовать парой величин: координатой x и скоростью \dot{x} . В этом случае уравнение (3) позволяет по заданному начальному состоянию определить его в любой последующий момент времени. Пусть далее на тело действуют очень короткие импульсы внешней силы, следующие с интервалами времени T причем величина этих импульсов зависит некоторым заданным образом $P = f(x)$ от координаты тела x . Такую систему будем характеризовать парой величин x_n и \dot{x}_n — координатой и скоростью тела непосредственно перед n -м импульсом силы. Сразу после действия импульса координата тела практически не меняется, а скорость возрастает на величину $f(x_n)/m$. Затем движение тела подчиняется уравнению (3), которое легко решается. В результате получаем следующее выражение для координаты и скорости перед $(n + 1)$ -м импульсом:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{m}{k} \left(x_n + \frac{f(x_n)}{m} \right) \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right), \\ \dot{x}_{n+1} &= \left(x_n + \frac{f(x_n)}{m} \right) e^{-\frac{kt}{m}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом приходим к итерационным соотношениям типа (2), связывающим пару координата—скорость в $(n + 1)$ -й и n -й моменты дискретного времени.

Рассмотренный пример был отчасти искусственным, мы хотели показать саму возможность описания физических систем с помощью дискретных отображений и их связь с дифференциальными уравнениями (тонкую игру дискретного и непрерывного по выражению выдающегося российского математика В.И. Арнольда). Однако существует подход, предложенный французским математиком Анри Пуанкаре и известный теперь как метод сечений Пуанкаре, который позволяет поставить в соответствие заданной дифференциальной динамической системе дискретное отображение. При этом необязательно должна реализовываться ситуация импульсного воздействия. Обсуждение этого метода, однако, отложим, поскольку оно потребует введения понятия о фазовом пространстве.

Заметим, что дискретные отображения могут быть достаточно удобными и при непосредственном описании исходной задачи. Например, к простому отображению приводится задача о распространении луча света

между двумя зеркалами, одно из которых плоское, а второе имеет форму синусоиды (оптический волновод с гофрированной стенкой). В этом случае в качестве переменных выступают координата точки, в которой луч отражается от плоского зеркала, и угол падения в этой точке. Далее укажем на генератор пилообразных колебаний, для которого момент срыва колебаний управляется регулярным внешним сигналом. В качестве переменной можно выбрать момент срыва колебаний.

Аппарат дискретных отображений весьма естествен для физики (и не только для физики, например для популяционной биологии), просто он нетрадиционен в элементарном курсе. Чтобы убедиться в этом, мы рекомендуем привести к дискретному отображению широко известную олимпиадную задачу о расчете сопротивления бесконечной цепочки сопротивлений. Использование дискретных отображений на школьном уровне, по нашему мнению, позволит установить интересные связи между естественными науками и некоторыми разделами математики, в частности теорией числовых последовательностей.

ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО И АТТРАКТОРЫ

Как проследить за судьбой динамической системы при заданных начальных условиях? Для этого нужно увидеть, что происходит с переменными x, y, \dots в соотношениях (1) и (2) по мере эволюции во времени. Введем некоторое пространство, по осям координат которого отложим эти переменные. Подобное пространство принято называть *фазовым*. Фраза “задано начальное состояние динамической системы” теперь означает, что задана точка в фазовом пространстве. Включим время. Если система определена дифференциальными уравнениями (1), то точка начнет двигаться в фазовом пространстве, описывая некоторую траекторию. Если система определена дискретным отображением (2), то изображающая точка при каждой итерации будет совершать прыжки в фазовом пространстве.

Динамическая система полностью задает закон эволюции во времени, однако, чтобы получить полную информацию о характере такой эволюции, надо провести исследование для различных начальных условий. Современные компьютеры делают эту задачу не умозрительной, а вполне реальной и позволяют получать наглядные геометрические образы такого процесса.

Итак, сделаем следующий ход в наших рассуждениях и рассмотрим множество начальных состояний системы. В фазовом пространстве в этом случае будем иметь уже не одну изображающую точку, а целое облако. При включении времени они все двинутся по своим траекториям (в случае дифференциальных уравнений) либо начнут совершать прыжки (в случае дискретных

отображений). При компьютерном моделировании разумно создать мгновенные снимки облака через определенные промежутки времени (число итераций). Тогда можно следить за эволюцией облака на экране дисплея.

Перейдем к компьютерному моделированию. Выберем две динамические системы. Первая из них называется уравнением Ван-дер-Поля:

$$\dot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0. \quad (5)$$

Здесь λ – некоторый параметр. Уравнение (5) описывает простейший случай возникновения генерации в автоколебательной системе и является наряду с уравнением осциллятора одной из эталонных моделей теории колебаний [1–3]. Его удобно переписать в виде, соответствующем определению динамической системы (1):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= (\lambda - x^2)v - x. \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь фазовые координаты x и v входят в уравнения в явной форме.

В качестве второго примера возьмем еще одну эталонную модель нелинейной динамики – отображение Эно [2, 3]

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - b y_n, \\ y_{n+1} &= x_n. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь λ и b – параметры. Отображение Эно похоже по структуре на полученное выше итерационное соотношение (4). (Более того, оно может быть получено из (4) при определенном выборе функции f и некоторой замене переменных, соответствующие технические детали, однако, сейчас несущественны.)

На рис. 1 показаны мгновенные снимки облака изображающих точек на фазовой плоскости для уравнения Ван-дер-Поля (6), сделанные через равные интервалы времени в 0,5 единицы. На рис. 2 представлены

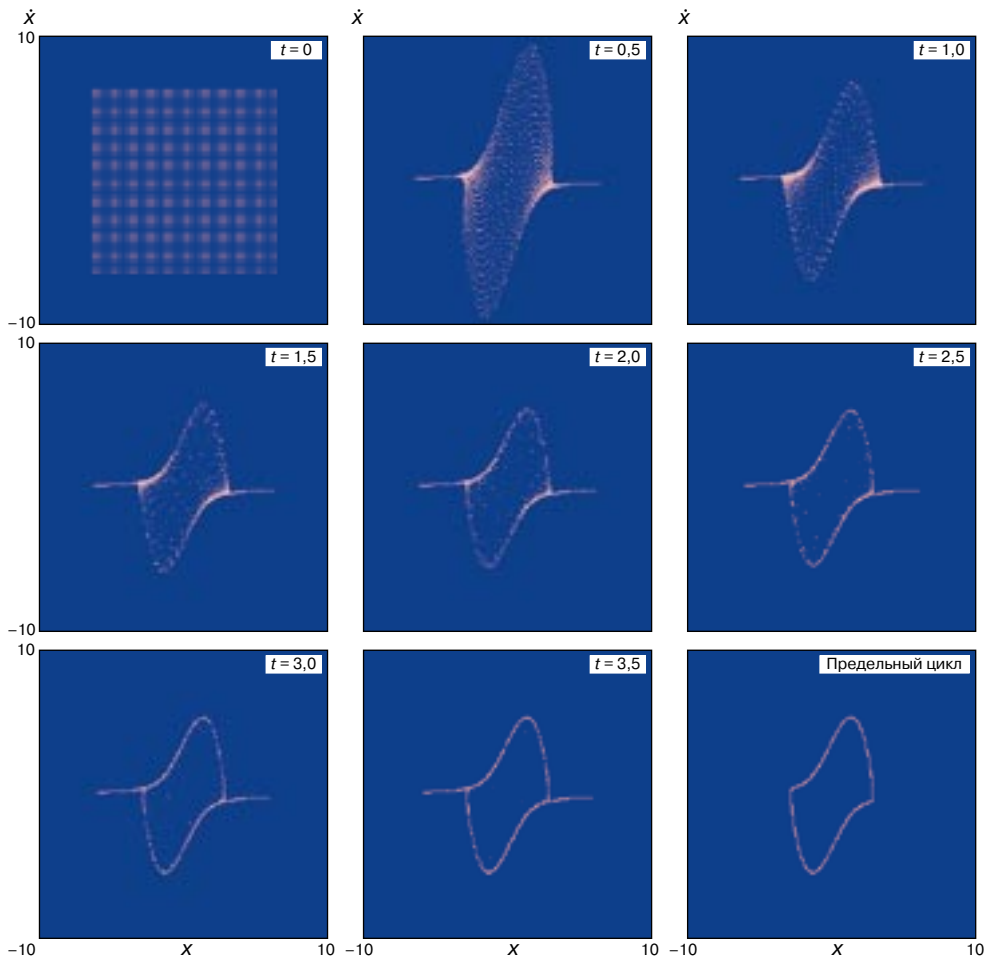


Рис. 1. Эволюция облака изображающих точек на фазовой плоскости уравнения Ван-дер-Поля, значение параметра $\lambda = 2$

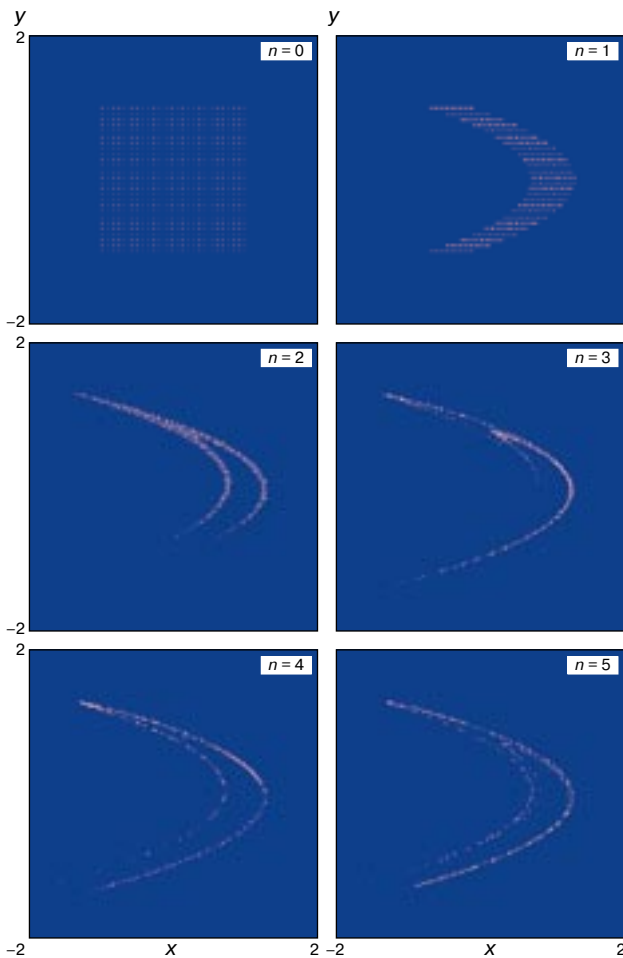


Рис. 2. Эволюция облака изображающих точек на фазовой плоскости для отображения Эно, значения параметров $\lambda = 1,4$, $b = -0,3$

аналогичные снимки для отображения Эно, сделанные через одну итерацию. Заметим, что при работе за компьютером весьма удобно и увлекательно наблюдать эволюцию облака изображающих точек в режиме компьютерной мультипликации.

Наиболее существенный результат, который вытекает из компьютерного моделирования (см. рис. 1, 2), состоит в том, что облако изображающих точек конденсируется на некоторые предельные объекты. Их называют аттракторами (от англ. to attract – притягивать). Динамические системы, которые обладают аттракторами, называют диссипативными. Существование аттракторов приводит к весьма важным выводам о поведении системы. В этом случае исследование установившихся режимов, то есть режимов, которые наблюдаются по истечении достаточно большого времени, эквивалентно изучению геометрической структуры аттрактора.

Соответствующий подход в теории колебаний был высказан А.А. Андроновым и лежит в основе понятий об автоколебаниях. (За примерами автоколебательных систем в реальной жизни далеко ходить не надо, например, часы – это автоколебательная система.)

Процесс конденсации изображающих точек на аттрактор занимает некоторое время. В случае уравнения Ван-дер-Поля можно видеть, что за время $t \approx 1$ обозначается контур аттрактора на рис. 1. За время $t \approx 3$ на него приходит большинство точек из внутренней области. Точки же во внешней области сжимаются на две практически одномерные ветви, которые необычайно долго вытягиваются внутрь аттрактора. Отдельные точки во внутренней области также достаточно долго блуждают. В конце концов формируется предельный геометрический объект в виде тонкого замкнутого шнура, лежащего в пределах фазовой плоскости. Подобные аттракторы называют предельными циклами. Они отвечают регулярным установившимся автоколебательным движениям.

Гораздо более интересный аттрактор демонстрирует при выбранных значениях параметров отображение Эно (см. рис. 2). Можно видеть, что изображающие точки притягиваются к некоторой сложной слоистой структуре. Если просмотреть с помощью компьютера как микроскопа отдельные фрагменты такого аттрактора, то обнаруживается, что он весь состоит из отдельных нитей и областей пустого пространства, причем каждая нить, в свою очередь, имеет аналогичную тонкую структуру. Подобные аттракторы были обнаружены в 70-е годы нашего века и получили название странных. Автоколебательные режимы, которым не отвечает определенный период, назвали динамическим хаосом. Обнаружение динамического хаоса явилось своего рода революцией в философии науки, так как оказалось, что простые предсказуемые системы могут демонстрировать в установившемся режиме нерегулярную непериодическую динамику [1–6].

Следует отметить, что для систем дифференциальных уравнений хаос возможен только в трехмерном фазовом пространстве (соответственно в уравнении Ван-дер-Поля он не наблюдается), а для обратимых дискретных отображений достаточно двух измерений. Почему это так, будет ясно из следующего раздела.

Итак, если исследуемая система диссипативна, то можно изучать лишь ее аттракторы. Это упрощает компьютерное моделирование – не надо следить за всеми изображающими точками. Достаточно выбрать одну из них, выполнить определенное (не очень маленькое) число итераций, чтобы эта точка вышла на аттрактор, а затем вывести ее движение на экран компьютера. Тогда мы и получим портрет аттрактора.

СВЯЗЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ И ДИСКРЕТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Мы уже упоминали о существовании установленной Анри Пуанкаре связи между дифференциальными уравнениями и дискретными отображениями. Компьютерное моделирование позволяет дать весьма наглядные иллюстрации такой связи.

Возьмем в качестве дифференциальной системы более сложную, нежели уравнение Ван-дер-Поля, характеризующую уже трехмерным фазовым пространством. Выберем модель, допускающую реальное воплощение в радиоэлектронике, – так называемую систему Чуа. Это простое электронное устройство, содержащее линейные элементы: один резистор, одну индуктивность и две емкости, а также нелинейный элемент с кусочно-линейной вольт-амперной характеристикой. Нелинейный элемент может быть сконструирован несколькими способами, например из двух транзисторов и двух диодов. Система Чуа хорошо изучена, для нее имеются как строгое математическое доказательство существования хаоса, так и многочисленные экспериментальные и компьютерные результаты. (Посвященная этой системе монография носит эффектное название “Chua’s Circuit: A Paradigm for Chaos” – “Система Чуа: Парадигма хаоса”.) Не будем, однако, обсуждать детали устройства схемы – для нас будет важно, что она описывается системой трех дифференциальных уравнений вида (1):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\alpha' + 0,68\beta)(y - h(x)), \\ \dot{y} &= x - y + z, \quad \dot{z} = -\beta y. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $h(x)$ – кусочно-линейная функция, график которой изображен на рис. 3.

Таким образом, задача формализована для компьютерного моделирования.

Зафиксируем сначала значения параметров α' и β и получим портрет аттрактора в трехмерном фазовом пространстве. На рис. 4 слева вверху представлен пример такого аттрактора. На этом же рисунке желтым цветом по-

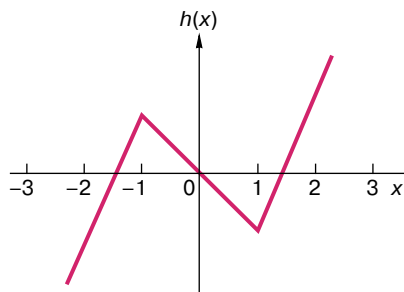


Рис. 3. График функции $h(x)$

казано сечение фазового пространства плоскостью, которое и можно интерпретировать как сечение Пуанкаре для нашей задачи. Ясно, что траектории, приближающиеся к аттрактору, протыкают это сечение в некоторых точках. Таким образом и получается дискретное отображение. Как видно из рисунка, аттрактор в виде предельного цикла имеет с этим сечением общие точки.

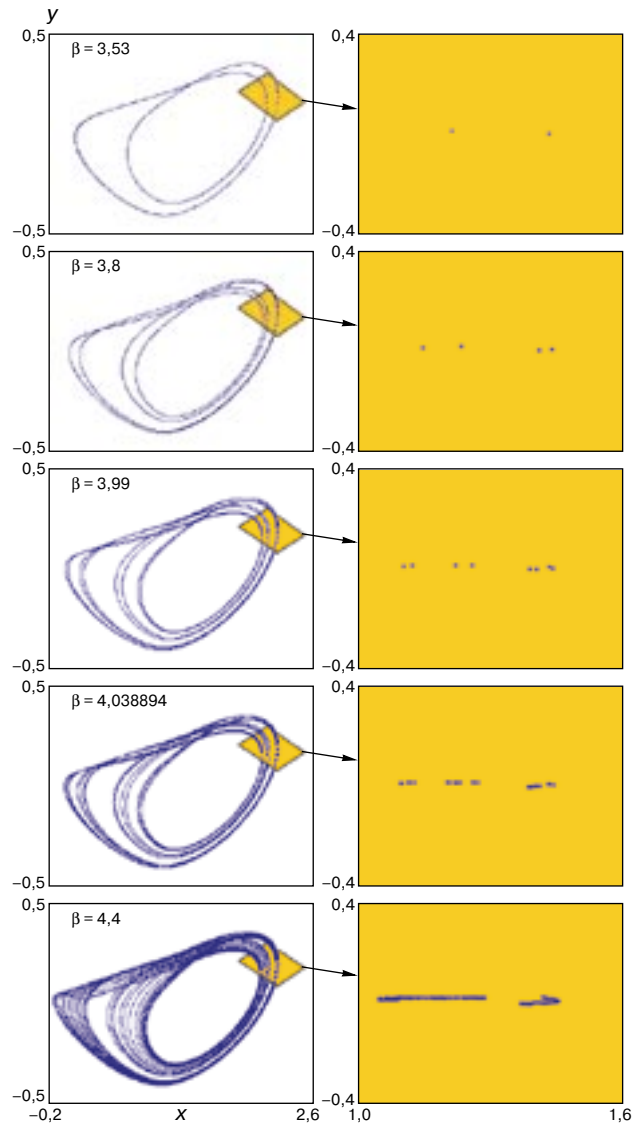


Рис. 4. Трансформации аттрактора системы Чуа при вариации параметра β , значение параметра α' фиксировано и составляет 0,622. Слева показаны портреты аттракторов дифференциальной системы, справа – аттракторы дискретного отображения в сечении Пуанкаре. Три верхних рисунка отвечают периодическим режимам, четвертый – пороговой ситуации между порядком и хаосом, а нижний рисунок – хаосу

ЭВОЛЮЦИЯ АТТРАКТОРОВ ПРИ ВАРИАЦИИ ПАРАМЕТРА

Большинство динамических систем содержит те или иные параметры. (В случае, когда она является моделью реального процесса, эти параметры связаны с измеряемыми в эксперименте.) Весьма интересно проследить за эволюцией аттрактора при вариации параметра. Вы можете сделать это самостоятельно для уравнения Ван-дер-Поля, но обнаружите, что предельный цикл лишь меняет свою форму. Для систем с трехмерным фазовым пространством реализуются более интересные ситуации.

Зафиксируем параметр α' для системы Чуа (8) и будем изучать, как модифицируется аттрактор при вариации параметра β (левая колонка на рис. 4). Оказывается, что в некотором диапазоне значений β аттрактор имеет вид предельного цикла, но в отличие от уравнения Ван-дер-Поля располагается уже в трехмерном пространстве. С ростом β происходит следующее: при некотором, как говорят бифуркационном, значении β предельный цикл расщепляется и превращается в “двухоборотный” жгут (верхний рисунок). Это оказывается возможным именно благодаря наличию третьего измерения. В проекции на плоскость рисунок предельный цикл имеет самопересечения, но в трехмерном пространстве их на самом деле нет. Нетрудно понять, что такому предельному циклу отвечает удвоенный период колебаний. Соответственно подобная бифуркация носит название бифуркации удвоения периода. Как видно из правого верхнего рисунка, в сечении Пуанкаре удвоение периода отвечает появлению 2-цикла.

При дальнейшем росте параметра β предельный цикл претерпевает последовательные усложнения — происходит каскад бифуркаций удвоения периода. Отображение Пуанкаре демонстрирует теперь 4-циклы, 8-циклы и т.д. (движение сверху вниз на рис. 4). При еще большем увеличении параметра β возникает хаос. Хаотический аттрактор в трехмерном фазовом пространстве выглядит как клубок спутанных ниток (нижний рисунок). В сечении Пуанкаре так же, как и в случае странного аттрактора отображения Эно, обнаруживается тонкая слоистая структура.

КАРТЫ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ

Представленные в предыдущем разделе иллюстрации демонстрируют возможность нетривиальной эволюции аттракторов и соответственно колебательных режимов динамических систем при вариации одного параметра. Еще более удивительное разнообразие режимов можно наблюдать, если система характеризуется двумя параметрами. На первый взгляд кажется, что исследование такой системы требует кропотливой работы, и это дей-

ствительно так. Однако сейчас в нелинейной динамике стал популярным весьма простой, наглядный и информативный прием, который позволяет быстро получать существенную информацию о системе. Продемонстрируем его на примере кубического отображения

$$x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3. \quad (9)$$

Компьютерная технология двухпараметрического исследования состоит в следующем. Выбираются какие-либо значения параметров a и b . Затем выполняется несколько сот итераций отображения для того, чтобы система вышла на аттрактор, а потом — еще несколько сот итераций уже непосредственно на аттракторе. По мере итераций на аттракторе производится сравнение начального значения со всеми последующими. Если они совпадают с высокой (наперед заданной) точностью, то число итераций принимается за период движения. На плоскости параметров (на экране дисплея) точка отмечается некоторым цветом, причем цветовая палитра выбрана заранее, так что движениям с определенными периодами отвечают определенные цвета. После этого процедура повторяется при слегка измененных значениях параметров, так что в конечном итоге выполняется полное сканирование плоскости параметров. В результате плоскость оказывается окрашенной в разные цвета в соответствии с периодом движения на аттракторе. Области хаоса (непериодические режимы) также обозначаются специальным образом. По аналогии с географией такую “раскрашенную” плоскость называют картой динамических режимов.

На рис. 5 показана карта динамических режимов кубического отображения (9). Как видим, столь простая модель демонстрирует очень большое разнообразие режимов и бифуркаций. В нижней части рисунка видна граница между областями устойчивости

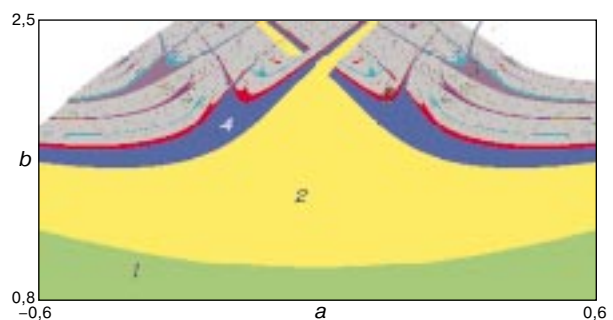


Рис. 5. Карта динамических режимов кубического отображения. Зеленым обозначена область параметров, отвечающая существованию устойчивой неподвижной точки, желтым – цикла периода 2, синим – цикла периода 4, красным – периода 8 и т.д. Серый цвет соответствует хаосу

неподвижной точки и цикла периода 2, представляющая собой линию бифуркации удвоения периода. Линий рождения 4-цикла в результате аналогичной бифуркации уже две, причем область устойчивости 2-цикла имеет характерный вид с уходящими вверх пересекающимися отрезками. Таким образом, область устойчивости 2-цикла ограничена этими линиями удвоений, а также двумя линиями складок (термин теории катастроф), образующими нижнюю границу отрезков. Отметим, что линии складок продолжают внутрь области устойчивости 2-цикла и сходятся в точке, которую в теории катастроф называют точкой сборки ($a = 0$, $b = 2$), которая, однако, на рисунке не видна. Описанная совокупность бифуркационных линий демонстрирует весьма типичную структуру на картах, названную французским специалистом в области нелинейной динамики К. Мира *crossroad area* – перепутье. На карте можно видеть две аналогичные конфигурации на базе 8-циклов. Самые широкие окна устойчивости реализуются на основе 3-циклов, внутри них можно идентифицировать конфигурации *crossroad area*, отвечающие областям устойчивости 6-циклов и т.д.

Благодаря методу сечений Анри Пуанкаре карты динамических режимов можно получить и для дифференциальных систем. Действительно, выполнив при помощи компьютера соответствующее сечение, приходим к дискретному отображению, а затем используем программу построения карт динамических режимов.

Итак, большинство нелинейных систем характеризуются сложной топографией карт динамических режимов. Степень сложности полученных изображений такова, что их можно назвать фрактальными пейзажами. Как правило, карты содержат детали, неоднократно повторяющиеся во все меньших и меньших масштабах. Можно установить определенные законы самоподобия или, как говорят, скейлинга. Но это, пожалуй, тема отдельного сообщения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Конец XX века принес ощущение научной революции, сравнимой с возникновением собственно научного метода в эпоху Г. Галилея. В центре внимания исследователей вновь оказались самые фундаментальные свойства окружающего мира: эволюция систем во времени и геометрия природы. Однако характер интереса к этим понятиям изменился. Картина мира стала переосмысливаться, наполняясь новыми образами (катастрофы, бифуркации, хаос, фракталы). Весьма характерны в этом смысле слова И. Пригожина: “Если в физике и химии где-то и существует простота, то заведомо не в микроскопических моделях. Она скорее кроется в идеализированных макроскопических представлениях, например, о простых движениях типа гармонического ос-

циллятора” [1]. Модели в виде осцилляторов, различных одномерных отображений и др. оказались во многом центральными объектами интенсивно развивающихся синтетических научных дисциплин, к которым относятся теория колебаний, теория бифуркаций, теория динамических систем, теория динамического хаоса и др.

В настоящей статье мы дали наглядные иллюстрации сложной динамики и хаоса для некоторых систем. Представленные примеры были очень просты, что подтверждает слова И. Пригожина. Однако может остаться вопрос: что из сказанного относится к более реалистичным моделям и системам? Не является ли все это компьютерной игрой? Уж очень непривычны для традиционной физики модели вида (4), (7), (9). Нет, это не так. Подобные модели являются самыми простыми представителями целых классов систем, демонстрирующих весьма общие закономерности хаотической динамики. Приведенные здесь иллюстрации являются мощным инструментом исследования разнообразных систем, среди которых оптические, радиофизические, химические, биологические, социальные.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пригожин И. От существующего к возникающему. М.: Наука, 1985. 328 с.
2. Мун Ф. Хаотические колебания. М.: Мир, 1990. 312 с.
3. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991. 368 с.
4. Анищенко В.С. Детерминированный хаос // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. № 6. С. 70–76.
5. Трубецков Д.И. Турбулентность и детерминированный хаос // Там же. 1998. № 1. С. 77–83.
6. Белых В.Н. Элементарное введение в качественную теорию и теорию бифуркаций динамических систем // Там же. 1997. № 1. С. 115–121.

Рецензент статьи В.П. Крайнов

* * *

Александр Петрович Кузнецов, доктор физико-математических наук, профессор высшего колледжа прикладных наук Саратовского государственного университета, зав. базовой кафедрой динамических систем, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов – динамические системы, бифуркации, хаос. Автор более 50 научных публикаций и нескольких сот задач по физике, колебаниям, волнам, катастрофам, бифуркациям и динамическим системам.