

А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов, И. Р. Сатаев

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ' 2002

1. Введение

Возможность описания турбулентности как динамического процесса в пространственно распределенных системах давно привлекает большое внимание исследователей. Один из важных вопросов — как возникает пространственно-временной хаос из простого регулярного режима при изменении управляющих параметров?

Для систем с малой размерностью фазового пространства прорыв в понимании перехода к хаосу в нелинейных системах связан с открытием Фейгенбаумом универсальности удвоений периода и развитием ренормгруппового (РГ) подхода. Простейший класс систем, демонстрирующих фейгенбаумовский тип поведения, — это одномерные (1D) необратимые отображения, однако тот же самый тип перехода к хаосу встречается во многих диссипативных нелинейных системах разной физической природы [1, 2, 3, 4].

Предположим, что имеется некоторая нелинейная система, поведением которой можно управлять путем изменения нескольких параметров. Фейгенбаумовское поведение на пороге хаоса является феноменом коразмерности один. Например, если мы имеем систему с тремя управляющими параметрами, бифуркации удвоения периода будут происходить на некоторых двумерных поверхностях в трехмерном пространстве параметров, и их последовательность будет накапливаться к границе хаоса — фейгенбаумовской критической поверхности.

Можно предположить, что при движении вдоль границы хаоса в пространстве параметров мы можем встретить нефейгенбаумовское поведение на некоторых критических линиях (феномены коразмерности два) или в некоторых критических точках (феномены коразмерности три). Естественно ожидать, что выявленные таким образом типы поведения также должны допускать РГ-анализ и проявлять специфические свойства количественной универсальности и скейлинга. В этом случае мы говорим об определенном типе критического поведения (или типе критичности).

Одна возможность возникновения нефейгенбаумовского критического поведения, ассоциирующегося с удвоениями периода, состоит в том, что динамика на пороге хаоса остается по существу одномерной, но соответствующее 1D-отображение возмущено настолько, что покидает фейгенбаумовский класс универсальности. Другая возможность заключается в выходе некоторой новой моды на порог устойчивости, что ведет к увеличению эффективной размерности динамики.

В статье представлена коллекция типов критического поведения, которые могут иметь место при многопараметрическом анализе перехода к хаосу. Для каждого типа дается сводка основных универсальных констант, а также простой пример — одно- или двумерное отображение, являющееся представителем данного класса универсальности¹.

2. Критическое поведение в одномерных отображениях

Рассмотрим сначала типы критичности, ассоциирующиеся с одномерной динамикой на пороге хаоса. Каждый из них будет отвечать некоторому решению РГ-уравнения Фейгенбаума — Цвитановича [1]:

$$g(x) = \alpha g[g(x/\alpha)], \quad (1)$$

где α — универсальная постоянная (фактор скейлинга), специфическая для данного типа критичности. Решить уравнение (1) означает найти одновременно и функцию $g(x)$ (обычно численно, в виде полиномиального разложения), и константу α . О функции $g(x)$ говорят как о неподвижной точке РГ-уравнения.

Фактически, функция $g(x)$ представляет асимптотическую форму надлежащим образом нормированного оператора эволюции для 2^k -итераций исходного отображения точно в критической точке. Существование предела при $k \rightarrow \infty$ обеспечивается перенормировкой динамической переменной $x \sim \alpha^{-k}$.

Следующий шаг состоит в анализе малых возмущений неподвижной точки РГ-уравнения. Предположим, что в исходном отображении мы немного изменяем какой-либо из параметров и сдвигаемся тем самым из критической точки. Теперь оператор эволюции, определенный на 2^k -итерациях, будет содержать некоторое возмущение функции $g(x)$, и его поведение можно изучать с помощью линеаризованно-

¹Полученные численно решения РГ-уравнений в виде достаточно громоздких полиномиальных аппроксимаций полностью в тексте не приводятся; их можно найти на нашем веб-сайте www.sgtnd.tserv.ru [5] и в работе [6].

го уравнения РГ. Это приводит к следующей задаче на собственные значения [1]:

$$\nu u(x) = \alpha [g'(g(x/a))u(x/a) + u(g(x/a))]. \quad (2)$$

Решения уравнения (2) представляют собой моды возмущения неподвижной точки $g(x)$. Существенными будут моды с собственными значениями $|\nu| > 1$, определяющие асимптотику при больших k , причем из их числа следует исключить те, которые ассоциируются с инфинитезимальными заменами переменных. Число n существенных собственных векторов определяет *коразмерность* типа критичности: это минимальное количество управляющих параметров, при котором данная критическая ситуация может встретиться в некоторой точке пространства параметров. (В самом деле, требуя, чтобы коэффициенты при n существенных модах обратились в нуль, мы задаем точно n условий на параметры исходного отображения.)

В выбранной надлежащим образом локальной системе координат («скейлинговые координаты») n -мерное пространство параметров будет иметь универсальную топографию, специфическую для каждого типа критичности.

Скейлинговые координаты определяются так, чтобы сдвиг из критической точки вдоль каждой координатной оси в пространстве параметров приводил к появлению возмущения, содержащего одну существенную собственную моду линеаризованного уравнения РГ.

Существенные собственные числа $\nu = \delta_1, \dots, \delta_n$ являются тогда *факторами скейлинга*: если использовать их как факторы увеличения вдоль соответствующих координатных осей, то будет наблюдаться повторение структуры топографии пространства параметров во все меньшей и меньшей окрестности критической точки.

Для коразмерностей выше единицы задача нахождения в явном виде скейлинговых координат нетривиальна, причем форма соответствующей замены зависит от конкретных соотношений между существенными собственными числами [6].

Предположим, мы нашли критическую точку коразмерности два, и $\delta_1 > \delta_2^k > 1$ при $k = 1, \dots, K$, но $\delta_2^{K+1} > \delta_1$. Тогда выражения для двух управляющих параметров через скейлинговые координаты (C_1, C_2) должны содержать члены $C_1, C_2, C_2^2, \dots, C_2^K$. Только при $K = 1$ достаточно линейной замены координат. В случае коразмерности три следует учесть члены вида $C_2^{k_1} C_3^{k_2}$, если выполняется неравенство $\delta_2^{k_1} \delta_3^{k_2} < \delta_1$. (Все сказанное выше остается справедливым и для 2D-отображений.)

Важной количественной характеристикой типа критичности является *универсальный мультипликатор*. Он может быть получен как

производная от функции $g(x)$ в неподвижной точке $x_* = g(x_*)$: $\mu_* = g'(x_*)$. Для конкретных систем это значение мультипликатора реализуется в критической точке для циклов периода 2^k в асимптотике больших k . Данное свойство полезно для точного численного нахождения положения критической точки в пространстве параметров. Для этого отыскиваем такие значения управляющих параметров, при которых мультипликаторы равны μ_* для соответствующего числа орбит с достаточно долгими периодами 2^k .

Фейгенбаумовская критичность (тип F) является наиболее известным типом поведения при удвоениях периода. Он связан с неподвижной точкой РГ-уравнения (1): $g(x) = 1 - 1,5276x^2 + 0,1048x^4 + \dots$, причем $\alpha = -2,5029078750959$ [1]. Линеаризованный оператор РГ (2) имеет в спектре одно существенное собственное число $\nu = \delta = 4,669201609103$, т. е. коразмерность равна единице: $\text{CoDim}_F = 1$.

Классическим примером фейгенбаумовской критичности является поведение логистического отображения

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 \quad (3)$$

в критической точке $\lambda_c = 1,40115518909205$ [2]. Здесь отображение имеет бесконечное счетное множество неустойчивых циклов периода 2^k . Асимптотически, при $k \rightarrow \infty$, эти циклы характеризуются одним и тем же универсальным мультипликатором $\mu = -1,6011913280736$. Аттрактор в критической точке представляет собой фрактальное множество, размерность Хаусдорфа которого равна $D_0 = 0,5380451435805$ [7]. Локально, в окрестности экстремума $x = 0$, структура аттрактора воспроизводится при изменении масштаба переменной x в α раз.

Топография пространства параметров вблизи фейгенбаумовской критической точки содержит при $\lambda < \lambda_c$ последовательность областей устойчивой регулярной динамики с периодами 2^k и сложно устроенное множество периодических «окон» и хаотических режимов в за-критической области $\lambda > \lambda_c$. Эта структура демонстрирует свойства скейлинга: в малых масштабах топография пространства параметров воспроизводит себя при увеличении в δ раз [1–4].

Трикритическое поведение (тип T) ассоциируется с решением РГ-уравнения, которое представляется в виде разложения по степеням x^4 : $g(x) = 1 - 1,8341x^4 + 0,01296x^8 + 0,3119x^{12} + \dots$, при этом $\alpha = -1,6903029714$ [8, 9]. Линеаризованный оператор РГ (2) имеет в спектре три существенных собственных числа $\delta = 7,284686217$, α^2 , α^3 [8, 10, 11]. Это означает, что коразмерность равна трем: $\text{CoDim}_T = 3$.

В самом деле, сколько условий должно быть удовлетворено, чтобы найти трикритическую точку в одномерном отображении? Во-первых,

два условия необходимы, чтобы иметь экстремум четвертого порядка: вторая и третья производные должны обращаться в нуль в этой точке. Еще один параметр нужен, чтобы прийти в критическую точку через каскад удвоений периода при сохранении двух предыдущих условий.

В качестве конкретного примера возьмем произвольное гладкое одномерное отображение, содержащее в разложении Тейлора члены до четвертого порядка включительно. Устраним кубический член сдвигом начала координат и пересчитаем масштаб динамической переменной так, чтобы нормировать постоянный член на единицу. В результате получим

$$x_{n+1} = 1 - Ax_n^2 - Bx_n^4 - Cx_n, \quad (4)$$

где A, B, C — параметры.

При $A = 0$ и $C = 0$ это отображение демонстрирует с увеличением B каскад удвоений периода, накапливающийся к трикритической точке $B_c = 1,594901356229$ [8]. В ней существует бесконечное множество неустойчивых 2^k -циклов, универсальное асимптотическое значение мультипликатора равно $\mu = -2,05094049$. Размерность Хаусдорфа трикритического аттрактора $D_0 = 0,642575065$.

Вопрос о коразмерности трикритичности в одномерных отображениях не столь тривиален, как может показаться из приведенного обсуждения. Дело в том, что экстремум четвертого порядка может появиться не в исходном отображении, а в его итерациях, а трикритичность возникает как феномен коразмерности два [12]. Пусть имеем гладкое 1D-отображение с двумя квадратичными экстремумами и двумя управляющими параметрами. В общем случае в пространстве параметров может существовать кривая, на которой выполнено условие: один экстремум отображается точно во второй. Если мы находимся на этой кривой, то дважды итерированное отображение будет иметь экстремум четвертого порядка. Если вдоль этой кривой имеет место каскад удвоений периода, то пределом его будет трикритическая точка. Можно показать, что в этом случае собственное число α^3 исключается (своего рода *скрытая симметрия*, см. [10]), и только $\delta_1 = \delta$ и $\delta_2 = \alpha^2$ являются существенными. Например, отображение

$$x_{n+1} = A - Bx_n + x_n^3 \quad (5)$$

имеет трикритическую точку при $A_c = 0,2426987573$, а также при $B_c = 1,9513857778$.

Топография пространства параметров в окрестности трикритической точки коразмерности два приведена на рис. 1 для модельного отображения (5). Видно, что в скейлинговых координатах картинки выглядят подобными друг другу при пересчете масштабов.

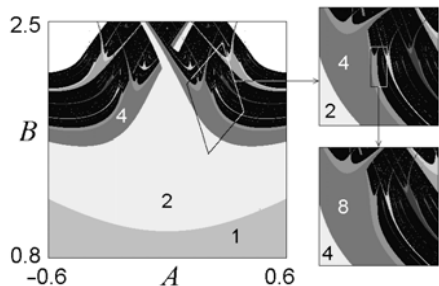


Рис. 1. Топография плоскости параметров для модельного отображения (5). На этом и следующих рисунках области различных периодических режимов обозначены тонами серого цвета, черным — области непериодической динамики, белым — расходимость итераций модельного отображения. На нижних диаграммах трикритическая точка расположена в центре, и используются скейлинговые координаты: $A - A_c = -0,59986C_1 + 0,21928C_2$, $B - B_c = C_1 + C_2$.

В диссипативных системах, не сводящихся к 1D-отображению точно, трикритичность коразмерности два не встречается: в игру неизбежно вступает третья собственная мода линеаризованного РГ-уравнения. Таким образом, чтобы наблюдать трикритичность, необходимо все же иметь три параметра [10].

Критичность S-типа («Six-power») ассоциируется с решением РГ-уравнения, представленным разложением по степеням x^6 : $g(x) = 1 - 1,9077x^6 - 0.3329x^{12} + \dots$, причем $\alpha = -1,4677424503$ [6, 9]. Линеаризованный оператор РГ (2) имеет в спектре три существенных собственных числа $\delta = 9,296246833$, α^2 , α^3 , α^4 , α^5 , т. е. $\text{CoDim}_S = 5$. Действительно, чтобы иметь экстремум шестого порядка необходимо выполнить пять дополнительных условий: 2-я, 3-я, 4-я и 5-я производные должны быть равны нулю в одной и той же точке, а пятый параметр нужен, чтобы реализовать накопление бифуркаций удвоения периода.

Однако в 1D-отображениях критичность S-типа может появляться как феномен коразмерности три [13]. Предположим, что отображение имеет квадратичный экстремум и кубическую точку перегиба, и одна из этих точек отображается точно во вторую. Тогда двукратно итерированное отображение будет иметь экстремум шестого порядка. В трехмерном пространстве параметров может существовать кривая, на которой выполняется указанное условие. Если вдоль этой кривой происходит каскад удвоений периода, точка накопления будет критической точкой S-типа.

В модельном отображении (7) при условии отображения экстремума в точку перегиба находим критическую точку S_1 : $A_c = 1,8724481923$, $B_c = -1,6252052847$, $C_c = 1,0940161015$. Если, наоборот, точка перегиба отображается в точку экстремума, получаем критическую точку S_2 : $A_c = 1,3799094808$, $B_c = -0,5574097012$, $C_c = 1,1818211223$. В обоих случаях существенными являются три собственных числа $\delta_1 = \delta$, $\delta_2 = \alpha^4$, $\delta_3 = \alpha^2$ для S_1 , и $\delta_1 = \delta$, $\delta_2 = \alpha^3$, $\delta_3 = \alpha^2$ для S_2 .

В критической точке S существуют неустойчивые циклы всех периодов 2^k , универсальное асимптотическое значение мультипликатора равно $\mu = -2,32150547$. Размерность Хаусдорфа критического аттрактора $D_0 = 0,683433256$.

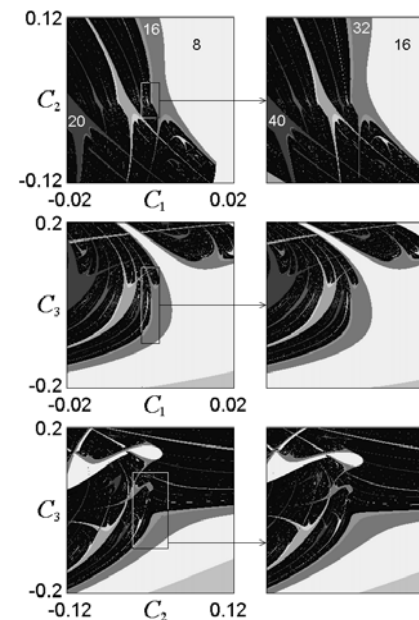


Рис. 2. Топография сечений пространства параметров вблизи критической точки S_1 для отображения (7) в скейлинговых координатах: $A - A_c = -0,5285(C_1 + 0,7803C_3^2) - 0,8097C_2 + C_3$, $B - B_c = (C_1 + 0,7803C_3^2) + C_2 - 0,8488C_3$, $C - C_c = -0,1267(C_1 + 0,7803C_3^2) + 0,0822C_2 + 0,5907C_3$. Критическая точка расположена в центре каждого рисунка.

Для того чтобы выписать соотношения для скейлинговых координат в пространстве параметров в окрестности критической точки S , следует учесть некоторые нелинейные члены. На рис. 2 показаны

карты режимов в сечении пространства параметров координатными плоскостями (C_i, C_j) и проиллюстрированы свойства скейлинга вблизи критической точки S_1 .

Критичность E -типа («eight-power») ассоциируется с решением РГ-уравнения, представляющимся в виде разложения по степеням x^8 : $g(x) = 1 - 1,8973x^8 - 0,7388x^{16} + \dots$, при этом $\alpha = -1,358017279$ [9, 13].

Линеаризованный оператор РГ (2) имеет в спектре семь существенных собственных чисел $\delta = 10,94862427, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6, \alpha^7$, т. е. $\text{CoDim}_E=7$. Происхождение этого числа может быть объяснено так же, как это было сделано для типов T и S . Тем не менее поведение E -типа встречается в 1D-отображениях как феномен коразмерности три [13]. В самом деле, если 1D-отображение имеет три квадратичных экстремума $x_1, 2, 3$, причем x_1 отображается в x_2 , и x_2 — в x_3 , то проитерированное отображение будет иметь экстремум восьмого порядка. В трехмерном пространстве параметров это условие выполняется в общем случае на некоторой кривой. Если вдоль этой кривой происходит каскад удвоений периода, точка накопления будет критической точкой E -типа. Только три из семи собственных чисел являются существенными в этом случае: $\delta_1 = \delta, \delta_2 = \alpha^4, \delta_3 = \alpha^2$. Для модельного отображения (7) такая критическая точка расположена в $A_c = 2,4493669341, B_c = -1,2604157306, C_c = 0,7009546250$.

Универсальный мультипликатор для циклов большого периода 2^k равен $\mu = -2,51408835$. Размерность Хаусдорфа критического аттрактора $D_0 = 0,707102082$.

На рис. 3 показаны сечения пространства параметров координатными плоскостями (C_i, C_j) и продемонстрированы их скейлинговые свойства.

Итак, из всех обсуждаемых выше критических ситуаций только классический фейгенбаумовский тип имеет всегда одну и ту же коразмерность один — и для 1D-отображений, и в общем случае. Для других типов критичности вопрос оказывается более тонким. Тип T для 1D-отображений может быть обнаружен в двухпараметрических семействах, а типы S и E — в трехпараметрических, хотя коразмерность, вычисленная с помощью РГ-анализа, выше. Для отображений большей размерности или для систем дифференциальных уравнений, типы T, S , и E будут появляться как феномены коразмерности 3, 5, и 7 соответственно.

Тем не менее было обнаружено, что при двухпараметрическом анализе реалистичных систем трикритические скейлинговые свойства могут оставаться справедливыми вплоть до удивительно глубоких

уровней удвоения периода («псевдо-трикритическое поведение») [11, 14]. В некотором смысле трикритическое поведение выступает как промежуточная асимптотика, и может оказаться очень трудно, если вообще возможно, наблюдать заметные отличия от истинной трикритичности в эксперименте или при непосредственном численном моделировании. По-видимому, в том же самом смысле, т. е. в качестве промежуточной асимптотики, при трехпараметрическом анализе реальных нелинейных диссипативных систем могут обнаруживаться также типы скейлингового поведения E и S .

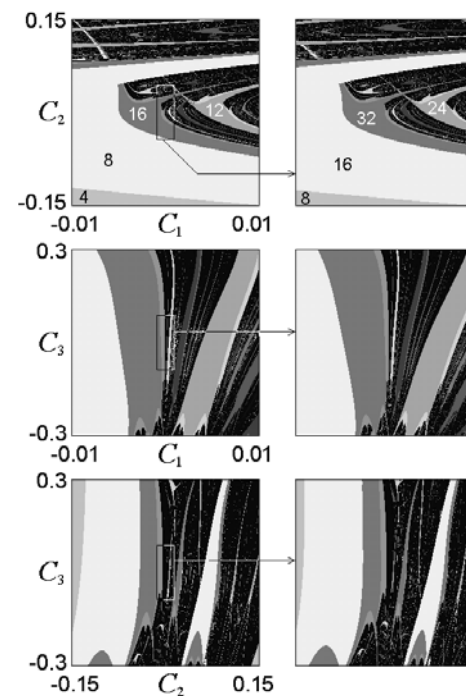


Рис. 3. Топография сечений пространства параметров вблизи критической точки E -типа для отображения (7) в скейлинговых координатах $A - A_c = (C_1 - 0, 2006C_3^2 + 0,3443C_2C_3 - 0,1384C_3^3) + C_2 - 0,9456C_3, B - B_c = -0,5597 \times (C_1 - 0, 2006C_3^2 + 0,3443C_2C_3 - 0,1384C_3^3) - 0,4571C_2 + C_3, C - C_c = -0,3388 \times (C_1 - 0, 2006C_3^2 + 0,3443C_2C_3 - 0,1384C_3^3) + 0,3176C_2 - 0,0065C_3$. Критическая точка расположена в центре каждого рисунка.

Перейдем теперь к типам критического поведения, которые возникают вследствие наличия дополнительного измерения в фазовом пространстве и не встречаются в 1D-отображениях.

3. Системы с однонаправленной связью

Обратимся сначала к специальному классу систем. Предположим, что система допускает разбиение на две подсистемы с однонаправленной связью, так что модельное отображение представляется в виде $x_n + 1 = F_1(x_n)$, $y_n + 1 = F_2(x_n, y_n)$. Поскольку однонаправленная связь оказывается физически реализуемой [11, 15], это оправдывает специальный интерес к исследованию такого рода систем.

РГ-анализ приводит к следующей системе уравнений для пары функций g и f [16, 17]:

$$g(x) = \alpha g(g(x/\alpha)), \quad (6)$$

$$f(x, y) = \beta f(g(x/\alpha), f(x/\alpha, y/\beta)). \quad (7)$$

Первое соотношение совпадает с уравнением Фейгенбаума — Цвитановича, так что проблема состоит в анализе второго уравнения. Функция $f(x, y)$ и орбитальный фактор скейлинга β должны быть получены из этого уравнения, в то время как функция $g(x)$ известна.

Вследствие двумерности системы критическое поведение характеризуется двумя универсальными мультипликаторами, каждый из которых, в силу однонаправленности связи, ассоциируется с одной из подсистем. Они равны производным от функций $g(x)$ и $f(x, y)$ в неподвижной точке $x_* = g(x_*)$, $y_* = f(x_*, y_*)$: $\mu_1 = g'(x_*)$, $\mu_2 = f'_y(x_*, y_*)$.

Для неподвижной точки РГ-уравнений (6) и (7) мы можем рассмотреть класс возмущений, которые не нарушают однонаправленность связи. Соответствующая задача на собственные числа может быть решена раздельно для двух подпространств: в присутствии и в отсутствие возмущений первой подсистемы. Собственные числа для возмущений первого типа получаются из уравнения (2). Во втором случае справедливо уравнение [16]:

$$vv(x, y) = \beta [f'(g(x/\alpha), f(x/\alpha, y/\beta))v(x/\alpha, y/\beta) + v(g(x/\alpha), f(x/\alpha, y/\beta))], \quad (8)$$

где f' означает производную по второму аргументу. Общее количество существенных собственных чисел обоих уравнений (2) и (8) определяет коразмерность типа критичности по отношению к классу систем с однонаправленной связью.

Бикритическое поведение (тип B) реализуется в системе с однонаправленной связью, когда первая подсистема демонстрирует фейгенбаумовскую критичность, а критическое поведение во второй подсистеме ассоциируется с нетривиальным решением, найденным в работе [16]: $f(x, y) = 1 - 0,5969x^2 - 0,0321x^4 - 0,8556y^2 - 0,3029x^2y^2 - 0,4317y^4 + \dots$, при этом $\alpha = -2,5029\dots$ и $\beta = -1,505318159$. Численное решение уравнений (2) и (8) дает два существенных собственных числа. Вектор с ненулевой u -составляющей соответствует фейгенбаумовской константе $\delta_1 = 4,6692\dots$ Второй вектор имеет $u \equiv 0$ и ненулевую v -составляющую; собственное число $\delta_2 = 2,39272443$. Таким образом, в классе систем с однонаправленной связью коразмерность бикритической ситуации равна двум. Для модельного отображения

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2, \\ y_{n+1} &= 1 - Ay_n^2 - Bx_n^2, \end{aligned} \quad (9)$$

в пространстве параметров (λ, A, B) существует бикритическая кривая (кривая бикритических точек). При конкретном значении параметра связи $B = 0,375$ бикритическая точка имеет координаты $\lambda_c = 1,401155189\dots$, $A_c = 1,124981403\dots$

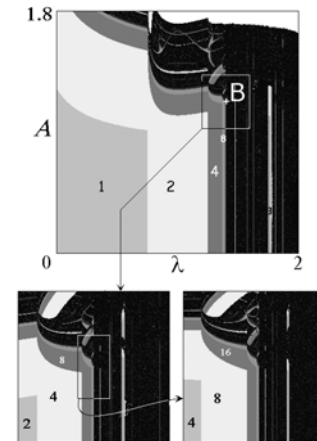


Рис. 4. Топография плоскости параметров (λ, A) для модельного отображения (18), $B = 0,375$, и иллюстрации скейлинга в окрестности бикритической точки. Скейлинговые координаты задаются соотношениями $\lambda - \lambda_c = C_1$ и $A - A_c = C_2$.

В бикритической точке существуют неустойчивые циклы всех периодов 2^k . Универсальные асимптотические значения двух мульти-

пликаторов $\mu_1 = -1,6011913\dots$ и $\mu_2 = -1,17885538\dots$. Бикритический аттрактор является фрактальным множеством, вложенным в плоскость (x, y) , его размерность Хаусдорфа $D_0 = 1,0785514$ [16].

На рис. 4 приведена топография плоскости параметров (λ, A) вблизи бикритической точки B для модельного отображения (9). Свойства скейлинга в данном случае поиллюстрированы с использованием естественных параметров отображения в качестве скейлинговых координат (очевидно, что сдвиг по параметру λ или A приводит к появлению возмущений с собственными числами δ_1 или δ_2 соответственно).

Другие типы критического поведения в системах с однонаправленной связью (двойная фейгенбаумовская точка DF и критическая точка BT на конце бикритической линии) обсуждаются в работах [5, 6, 17].

4. Критическое поведение 2D-отображений

Для того чтобы изучать типы критического поведения, которые возникают вследствие включения дополнительного измерения фазового пространства, необходимо ввести двумерное обобщение РГ-уравнения Фейгенбаума — Цвитановича. Это обобщение получается достаточно просто, если предположить, что в двумерном фазовом пространстве существует такая система координат, что масштабное преобразование, выполняемое по ходу РГ-анализа, является диагональным: $(X \rightarrow X/\alpha, Y \rightarrow Y/\beta)$. В том случае, когда критическое поведение ассоциируется с неподвижной точкой РГ-преобразования, уравнения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} g(X, Y) &= \alpha g(g(X/\alpha, Y/\beta), f(X/\alpha, Y/\beta)), \\ f(X, Y) &= \beta f(g(X/\alpha, Y/\beta), f(X/\alpha, Y/\beta)), \end{aligned} \quad (10)$$

где два фактора скейлинга α и β должны быть найдены вместе с решением уравнений РГ (см. [18, 19]). Подчеркнем, что «скейлинговые переменные» X, Y обычно не совпадают с «естественными» переменными модельного отображения.

Двумерное обобщение задачи на собственные значения для линеаризованного РГ-уравнения в неподвижной точке (g, f) принимает вид

$$\begin{aligned} vu(X, Y) &= \alpha [g'_1(g(X/\alpha, Y/\beta), f(X/\alpha, Y/\beta))u(X/\alpha, Y/\beta) \\ &\quad + g'_2(g(X/\alpha, Y/\beta), f(X/\alpha, Y/\beta))v(X/\alpha, Y/\beta) \\ &\quad + u(g(X/\alpha, Y/\beta), f(X/\alpha, Y/\beta))], \\ vv(X, Y) &= \beta [f'_1(g(X/\alpha, Y/\beta), f(X/\alpha, Y/\beta))u(X/\alpha, Y/\beta) \\ &\quad + f'_2(g(X/\alpha, Y/\beta), f(X/\alpha, Y/\beta))v(X/\alpha, Y/\beta) \\ &\quad + v(g(X/\alpha, Y/\beta), f(X/\alpha, Y/\beta))], \end{aligned} \quad (11)$$

где индексы 1 и 2 обозначают производные по первому и второму аргументу. Так же, как и раньше, количество существенных собственных чисел с $|\nu| > 1$ определяет тип критичности, а сами собственные значения являются факторами скейлинга вдоль соответствующих направлений в пространстве параметров.

Универсальные мультипликаторы для двумерного случая являются собственными значениями матрицы Якоби, вычисленной в неподвижной точке $X_* = g(X_*, Y_*)$, $Y_* = f(X_*, Y_*)$.

Гамильтоновская критичность (H-тип) является хорошо известным типом поведения, который обнаруживается в сохраняющих площадь 2D-отображениях на пороге перехода к хаосу через удвоения периода [20, 21, 22, 23]. Она ассоциируется с неподвижной точкой РГ-уравнений $g(X, Y) = 1 - 0,1947 - 0,1252Y - 0,9148X^2 - 0,0050XY + 0,0004Y^2 + \dots$, $f(X, Y) = 1 + 4,7901X - 2,0556Y - 14,8638X^2 + 0,1198Y^2 + 0,3204XY + \dots$, при этом где $\alpha = -4,0180767046$ и $\beta = 16,3638968792$ (см. [18, 20, 21, 22]). Отметим, что определитель Якоби для (g, f) тождественно равен единице.

Задача на собственные значения (11) дает два существенных собственных числа: $\delta_1 = 8,7210972$ и $\delta_2 = 2$ [24, 25]. Собственное значение δ_1 связано с возмущениями, оставляющими отображение в классе преобразований, сохраняющих площадь, а δ_2 отвечает за диссипацию. Таким образом, для отображений, сохраняющих площадь, критичность типа H является феноменом коразмерности один. Тем не менее она может возникать и в диссипативных системах, но в этом случае ее коразмерность возрастает до двух, $\text{CoDim}_H = 2$.

В качестве примера рассмотрим отображение Эно (Hénon map):

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - by_n, \\ y_{n+1} &= x_n. \end{aligned} \quad (12)$$

Известно, что в случае $b < 1$ при увеличении λ наблюдается классический фейгенбаумовский каскад удвоений периода (тип F в наших обозначениях). При $b = 1$ отображение становится сохраняющим площадь. В плоскости параметров (b, λ) критическая точка H расположена при $b_c = 1$, $\lambda_c = 4,13616680390428$. Другими словами, границей хаоса в отображении Эно служит фейгенбаумовская критическая линия, заканчивающаяся при $b = 1$ точкой H . Обсуждение кроссовера между двумя типами критичности проводилось в [24, 25].

Точно в критической точке H существует полный набор неустойчивых циклов с периодами 2^k , значения универсальных мультипликаторов $\mu_1 = -2,057478352$ и $\mu_2 = 1/\mu_1 = -0,486031845$. Динамика в критической точке является консервативной, поэтому кри-

тического аттрактора не существует. Тем не менее пространство состояний устроено самоподобным образом. Для модельного отображения (12) можно наблюдать самоподобие в скейлинговых переменных $X = x - 0,0475282$, $Y = (1 - \lambda x^2)/2 - y$: структура воспроизводит сама себя при увеличении масштаба в α и β вдоль осей X и Y соответственно.

Критическое поведение FQ («Feigenbaum + Quasiperiodicity») ассоциируется с неподвижной точкой РГ-уравнений (10), универсальные функции которой содержат в разложении Тейлора степени X^2 и XY : $g(X, Y) = 1 - 1,0979X^2 + 0,1571X^4 + 0,0018X^2Y^2 - 0,7114XY + 0,0865X^3Y + \dots$, $f(X, Y) = 1 + 0,0680X^2 + 1,5416X^4 + 0,2101X^2Y^2 - 2,7960XY + 1,3619X^3Y + \dots$, при этом $\alpha = -1,90007167$ и $\beta = -4,00815785$ [6, 19]. Задача (11) дает три существенных собственных числа: $\delta_1 = 6,32631925$, $\delta_2 = 3,44470967$, и $\delta_3 = \alpha = -1,90007167$. Следовательно, $\text{CoDim}_{FQ} = 3$.

Соответствующее модельное отображение имеет вид

$$x_{n+1} = 1 - \alpha x_n^2 + dx_n y_n, \quad y_{n+1} = 1 - b x_n y_n. \quad (13)$$

В трехмерном пространстве параметров (a, b, d) существует кривая из точек FQ . При $d = 0,3$ критическая точка FQ расположена при $a_c = 1,767192895$, $b_c = 1,629678013$. Ее координаты получаются посредством оценки предела последовательности терминальных точек для линий бифуркации удвоения периода — точек, в которых оба мультипликатора обращаются в минус единицу.

В критической точке FQ существует полный набор неустойчивых циклов с периодами 2^k , асимптотические значения мультипликаторов $\mu_1 = -1,579739$ и $\mu_2 = -1,057149$. Критический аттрактор является фракталом, который можно представлять как предельный объект — «цикл периода 2^∞ ». Самоподобие аттрактора можно наблюдать в скейлинговых переменных $X = x$, $Y = y - 2,1091x$, при пересчете масштаба вдоль осей X и Y на факторы скейлинга α и β соответственно.

Благодаря специфической форме модельного отображения (13) точка FQ была найдена при двухпараметрическом анализе. В этом отображении в возмущениях, возникающих при сдвиге по параметрам из критической точки, присутствуют лишь собственные моды, соответствующие δ_1 и δ_2 . Топография пространства параметров и ее свойства скейлинга показаны на рис. 5.

Модельное отображение с количеством параметров, равным полной коразмерности, рассмотрено в [6].

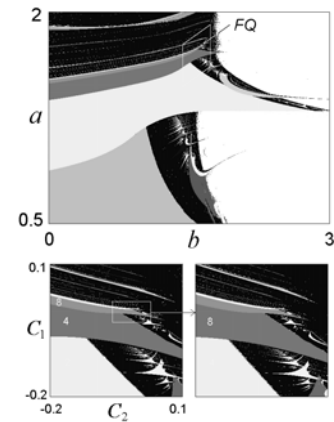


Рис. 5. Топография плоскости параметров (a, b) для отображения (13), $d = 0,3$. Окрестность критической точки FQ показана отдельно в скейлинговых координатах: $a - a_c = C_1 + 0,47733C_2$, $b - b_c = C_2$.

Критическое поведение C -типа («cycle») ассоциируется с 2-циклом РГ-преобразования (10) [6, 19]. Решение задается двумя парами функций:

$$\begin{aligned} g_2(X, Y) &= \alpha_1 g_1(g_1(X/\alpha_1, Y/\beta_1), f_1(X/\alpha_1, Y/\beta_1)), \\ f_2(X, Y) &= \beta_1 f_1(g_1(X/\alpha_1, Y/\beta_1), f_1(X/\alpha_1, Y/\beta_1)), \\ g_1(X, Y) &= \alpha_2 g_2(g_2(X/\alpha_2, Y/\beta_2), f_2(X/\alpha_2, Y/\beta_2)), \\ f_1(X, Y) &= \beta_2 f_2(g_2(X/\alpha_2, Y/\beta_2), f_2(X/\alpha_2, Y/\beta_2)). \end{aligned} \quad (14)$$

Соотношения (1) и (11) обычно называют «преобразованием удвоения» [1, 18]. Соответственно, можно сказать, что пары функций g_1, f_1 и g_2, f_2 являются неподвижными точками «оператора учетверения». Масштабные факторы, найденные численно для этого преобразования учетверения оказываются равны $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 = 6,565350$ и $\beta = \beta_1 \beta_2 = 22,120227$, а полиномиальное разложение для универсальных функций см. в [5, 6, 19].

Используя это численное решение, мы обнаружили, что отображение $(x, y) \rightarrow (g_1(x, y), f_1(x, y))$ обладает *устойчивой* неподвижной точкой $X_* = 0,25039$, $Y_* = 1,59489$ с мультипликаторами $\mu_1 = -0,725255$ и $\mu_2 = 0,847450$. Напомним, однако, что отображение (g_1, f_1) , итерированное четырежды и подвергнутое затем перемасштабированию $(X \rightarrow X/\alpha, Y \rightarrow Y/\beta)$, превращается снова в себя. Поэтому наличие устойчивой неподвижной точки означает существование устойчивой

вых циклов всевозможных периодов 4^k , $k = 1, 2, \dots, \infty$, причем все мультипликаторы равны вышеприведенным универсальным значениям. (Заметим, что по крайней мере одна точка из орбиты цикла периода 4^k легко может быть вычислена: X_*/α^k , Y_*/β^k .)

Итак, отображение $(x, y) \rightarrow (g_1(x, y), f_1(x, y))$ имеет бесконечное (счетное) множество сосуществующих аттракторов — циклов периода 4^k . Мы называем это множество *критическим квазиаттрактором*. Отображение $(x, y) \rightarrow (g_2(x, y), f_2(x, y))$ имеет неустойчивую неподвижную точку с мультипликаторами $\mu_1 = -0,848865$ и $\mu_2 = 1,174459$.

Линеаризуя уравнения (14), можно получить задачу на собственные значения для возмущений найденного решения под действием РГ-преобразования учетверения. Наибольшие собственные числа (исключая те, которые ассоциируются с инфинитизимальными заменами переменных): $\delta_1 = 92,43126348$, $\delta_2 = 4,19244418$, $\delta_3 \approx 0,93$. Только δ_1 и δ_2 больше единицы, поэтому формально коразмерность $\text{CoDim}_C = 2$. Однако δ_3 лишь немного меньше единицы, и в общем случае это собственное число отвечает за очень медленную сходимость: как правило, количественная универсальность C -типа будет наблюдаться только после очень большого числа бифуркаций удвоения периода.

Для модельного отображения

$$x_{n+1} = a - x_n^2 + by_n, \quad y_{n+1} = -x_n^2 + dy_n \quad (15)$$

значение параметра $b = -0,6663$ было подобрано численно таким образом, чтобы оптимизировать скорость сходимости (при этом медленно затухающая мода в решении РГ-уравнения исключается). Чтобы выйти на критическую точку, мы сначала численно нашли последовательность бифуркационных точек коразмерности два — терминальных точек кривых удвоения периода, для которых мультипликаторы равны 1 и минус 1. Критическая точка C определяется как предельная точка этой последовательности: $a_c = 0,24990280$, $d_c = 0,45290288$. В данном случае критический квазиаттрактор состоит из устойчивых циклов с периодами 4^k . Свойство самоподобия критического квазиаттрактора можно наблюдать при использовании скейлинговых переменных $X = x$, $Y = y + 1.31644753$ при пересчете масштаба вдоль осей X и Y на факторы скейлинга α и β соответственно.

На рис. 6 приведена топография плоскости параметров для отображения (15) и показаны отдельно области устойчивости для циклов с периодами 4^k и $2 \cdot 4^k$ в скейлинговых координатах. Хорошо видно самоподобное устройство плоскости параметров при увеличении на масштабные факторы δ_1 и δ_2 вдоль соответствующих осей координат.

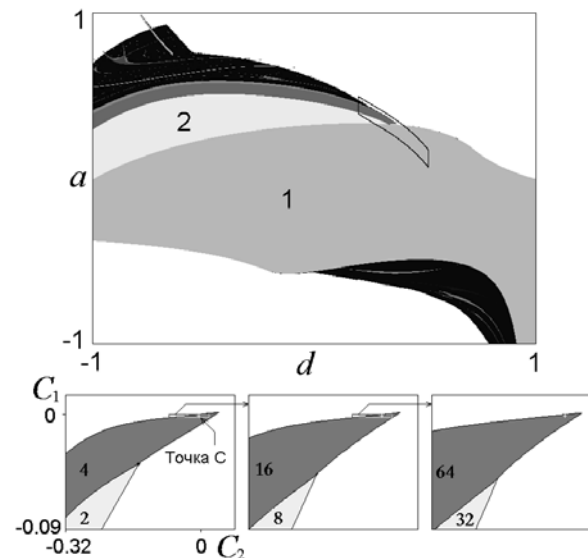


Рис. 6. Топография плоскости параметров (a, d) для отображения (15), $b = -0,6663$ (вверху) и области устойчивости для циклов периодов $2, 4, \dots, 64$ в скейлинговых координатах $a - a_c = C_1 - C_2 - 1,54607C_2^2 - 2,15C_2^3$, $d - d_c = 0,79017C_2$ (внизу). Криволинейный четырехугольник на верхней диаграмме соответствует области, представленной в скейлинговых координатах на левой нижней картинке.

Критическая точка типа C может быть найдена и при положительных b . Наилучшая сходимость наблюдается при $b = 0,6544$, критическая точка расположена при $a_c = 0,566620683$, $d_c = 1,597132592$. Этой точке отвечает цикл РГ-преобразования, осциллирующий в противоположной фазе, так что критический квазиаттрактор состоит из устойчивых циклов с периодами $2 \cdot 4^k$.

5. Заключение

Замечательная идея изучать и классифицировать математические объекты в соответствии с их коразмерностью была выдвинута впервые Анри Пуанкаре. Сначала должен быть рассмотрен случай общего положения, затем ситуации, которые становятся типичными при наличии одного управляющего параметра, потом ситуации, типичные для двухпараметрических семейств, и т. д. В частности, этот подход

эксплуатируется в теории бифуркаций и в теории катастроф. Мы полагаем, что та же самая идея может служить основой для классификации критических ситуаций на границе хаоса. Эту область исследований можно назвать *теорией многопараметрической критичности*. Отображения, перечисленные в разд. 2–4 представляют некоторые классы универсальности и играют по отношению к этим классам такую же роль, что и логистическое отображение для фейгенбаумовского критического поведения. В соответствующих ситуациях эти отображения могут оказаться полезными для феноменологического описания многопараметрических систем вблизи перехода к хаосу через удвоения периода.

В этой работе мы ограничились только такими ситуациями, которые связаны с удвоениями периода, и которые ассоциируются с неподвижными точками РГ-преобразования удвоения и учетверения. Это, конечно, только малая часть некоторой большой картины. Во-первых, кроме каскада удвоений периода, существуют другие пути перехода к хаосу, скажем, через перемежаемость или разрушение квазипериодических режимов (см. [26, 27]). Во-вторых, известно, что критическое поведение на пороге хаоса может ассоциироваться не только с неподвижными точками, но также с более сложными периодическими и непериодическими седловыми орбитами РГ-преобразования [27, 28].

Можно упомянуть также круг вопросов, связанных с анализом свойств универсальности и скейлинга в комплексных аналитических отображениях [29, 30, 37].

Интересной задачей представляется обнаружение и исследование различных типов критического поведения в реальных системах и их моделях, таких как системы дифференциальных уравнений. Несомненно, это более сложная задача, чем наблюдение классического фейгенбаумовского поведения, поскольку коразмерности выше и надо принимать во внимание многие тонкие детали. Однако в тщательно организованных компьютерных и натуральных экспериментах некоторые из обсуждаемых типов критичности могут быть обнаружены.

На двумерных диаграммах плоскостей параметров для систем различной природы, демонстрирующих удвоения периода (например, нелинейный осциллятор с периодическим возбуждением [32, 33], модулированный лазер на ядерном магнитном резонансе [34], электронная автоколебательная система [13], и т. д.), очень часто можно наблюдать структуру, названную «crossroad area» [35]. Это как раз та область пространства параметров, в которой возможно псевдо-трикритическое поведение. Действительно, для ряда системы это поведение было обнаружено численно и детально исследовано [11, 14].

Бикритическое поведение наблюдалось в нескольких демонстрирующих удвоения периода диссипативных системах с однонаправленной связью (см. [11, 15, 36, 37]). Если ввести обратную связь, представляется возможным реализовать типы *C*, *FQ* и *H* [19].

Еще одна возможность получить критическое поведение типа *C* открывается, если рассматривать диссипативную хаотическую систему под воздействием периодической внешней силы. Если бифуркационная кривая удвоения периода встречается с краем языка Арнольда [38], то в такой системе реализуется критичность *C*-типа [39].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 00-02-17509). А. П. К. благодарит за поддержку Фонд содействия отечественной науке.

Литература

1. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // УФН. 1983. Т. 141, N 2. С. 343.
2. Вул Е. Б., Синай Я. Г., Ханин К. М. Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм // УМН. 1984. Т. 39, N 3. С. 3.
3. Cvitanović P., ed. Universality in Chaos. Adam Hilger, 2nd Edition (1989).
4. Кузнецов С. П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
5. Сайт Саратовской группы теоретической нелинейной динамики <http://www.sgtnd.tserv.ru>
6. Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Sataev I. R. A variety of period-doubling universality classes in multi-parameter analysis of transition to chaos // Physica D109. 1997. 91–112.
7. Halsey T. S., Jensen M. H., Kadanoff L. P., Procaccia I., Shraiman B. I. Fractal measures and their singularities // Phys. Rev. 1986. V. A33. P. 1141.
8. Chang S. J., Wortis M., Wright J. A. Iterative properties of a one-dimensional quartic map. Critical lines and tricritical behavior // Phys. Rev. 1981. V. A24. P. 2669.
9. Hu B. and Satija I. A spectrum of universality classes in period doubling and period tripling // Phys. Lett. 1983. V. A98. P. 143.
10. Kuznetsov S. P. Tricriticality in two-dimensional maps // Phys. Lett. 1992. V. A169. P. 438.
11. Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Sataev I. R., Chua L. O. Multi-parameter criticality in Chua's circuit at period-doubling transition to chaos // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1996. V. 6. P. 119.

12. *Fraser S. and Kapral R.* Universal vector scaling in one-dimensional maps // *Phys. Rev.* 1984. V. A25. P. 3223.
13. *Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Sataev I. R.* Three-parameter scaling for one-dimensional maps // *Phys. Lett.* 1994. V. A189. P. 367.
14. *Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Turukina L. V., Mosekilde E.* Two-parameter analysis of the scaling behavior at the onset of chaos: Tricritical and pseudo-tricritical points // *Physica A*300. 2001. N 3–4. С. 367–385.
15. *Безручко Б. П., Гуляев Ю. В., Кузнецов С. П., Селезнев Е. П.* Новый тип критического поведения связанных систем при переходе к хаосу // *ДАН СССР.* 1986. Т. 287, N 3. С. 619.
16. *Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Sataev I. R.* Bicritical dynamics of period-doubling systems with unidirectional coupling // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1991. V. 1. P. 839.
17. *Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Sataev I. R.* Variety of types of critical behavior and multistability in period-doubling systems with unidirectional coupling near the onset of chaos // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1993. V. 3. P. 139.
18. *Eckmann J.-P., Koch H., Wittwer P.* Existence of a fixed point of the doubling transformation for area-preserving maps of the plane // *Phys. Rev.* 1982. V. A26. P. 720.
19. *Kuznetsov S. P., Sataev I. R.* New types of critical dynamics for two-dimensional maps // *Phys. Lett.* 1992. V. A162. P. 236.
20. *Greene J. M., MacKay R. S., Vivaldi F., Feigenbaum M. J.* Universal behavior in families of area preserving maps // *Physica.* 1981. V. D3. P. 468.
21. *Collet P., Eckmann J.-P., Koch H.* On universality for area-preserving maps of the plane // *Physica.* 1981. V. D3. P. 457.
22. *Widom M., Kadanoff L. P.* Renormalization group analysis of area-preserving maps // *Physica.* 1982. V. D5. P. 287.
23. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
24. *Zisook A. B.* Universal effects of dissipation in two-dimensional mappings // *Phys. Rev.* 1981. V. A24. P. 1640.
25. *Schmidt G.* Universality of dissipative systems // *Direction in Chaos* / Ed. Hao Bai-lin. World Scientific, 1988. V. 2. P. 1.
26. *Zisook A. B.* The complete set of Hamiltonian intermittence scaling behaviors // *Commun. Math. Phys.* 1984. V. 96. P. 361.
27. *Ostlund S., Rand D., Sethna J., Siggia E. D.* Universal properties of the transition from quasi-periodicity to chaos in dissipative systems // *Physica.* 1983. V. D8. P. 303.
28. *MacKay R. S., van Zeijts J. B. J.* Period doubling for bimodal maps: a horseshoe for a renormalization operator // *Nonlinearity.* 1988. V. 1. P. 253.
29. *Гольберг А. И., Синай Я. Г., Ханин К. М.* Универсальные свойства последовательности утроения периода // *УМН.* 1983. Т. 38, N 1. С. 159.
30. *Cvitanović P., Myrheim J.* Complex universality // *Commun. Math. Phys.* 1989. V. 121. P. 225.
31. *Isaeva O. B., Kuznetsov S. P., Ponomarenko V. I.* Mandelbrot set in coupled logistic maps and in electronic experiment // *Phys. Rev E.* 2001. V. 64. P. 055201.
32. *Bezruchko B. P., Prokhorov M. D., Seleznev E. P.* Multiparameter model of a dissipative nonlinear oscillator in the form of a one-dimensional map // *Chaos, Solitons and Fractals.* 1995. V. 11. P. 2095.
33. *Scheffczyk C., Parlitz U., Kurz T., Knop W., Lauterborn W.* Comparison of bifurcation structures of driven dissipative nonlinear oscillators // *Phys. Rev.* 1991. V. A43. P. 6495.
34. *Badii R., Brun E., Finardi M.* Progress in the analysis of experimental chaos through periodic orbits // *Rev. Mod. Phys.* 1994. V. 66. P. 1389.
35. *Carcasses J., Mira C., Bosh M., Simo C., Tatjer J. C.* Crossroad area — spring area transition (1) Parameter plane representation // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1991. V. 1. P. 183.
36. *Безручко Б. П., Пудовочкин О. Б.* Колебания у порога хаоса в системе однонаправленно связанных нелинейных радиотехнических осцилляторов // *Изв. вузов. Сер. Радиофизика.* 1992. Т. 35, N 1. С. 39.
37. *Kim S.-Y., Lim W.* Bicritical scaling behavior in unidirectionally coupled oscillators // *Phys. Rev. E.* 2001. V. 63. P. 036223.
38. *Anishchenko V. S.* Dynamical chaos — models and experiments. Appearance, routes and structure of chaos in simple dynamical systems. World Scientific, Singapore, 1995.
39. *Kuznetsov S. P., Sataev I. R.* Universality and scaling for the breakup of phase synchronization at the onset of chaos in a periodically driven Rössler oscillator // *Phys. Rev. E.* 2001. V. 64. P. 046214.