



ОСОБЕННОСТИ УСТРОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ ДВУХ НЕИДЕНТИЧНЫХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ – ДУФФИНГА

А.П. Кузнецов, В.И. Паксютов

Рассматривается система, состоящая из двух неидентичных диссипативно связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга. При помощи перехода к укороченным уравнениям показана возможность применения уравнения Адлера для описания областей синхронизации системы, что приводит к нетривиальной форме основного языка синхронизации на плоскости управляющих параметров подсистем. Обсуждается вид системы языков синхронизации в исходной дифференциальной системе и влияние фазовой нелинейности на ее конфигурацию. Обсуждается также случай несимметричной нелинейности в осцилляторах.

Введение

Система двух связанных осцилляторов Ван дер Поля является классической в теории колебаний и нелинейной динамике [1]. Соответствующая система дифференциальных уравнений не имеет точного аналитического решения. В связи с этим при ее исследовании традиционно используются асимптотические методы. Хорошо известна картина неподвижных точек, которая уже достаточно подробно описана аналитически при помощи системы укороченных уравнений [1, 2]. Подобное аналитическое исследование весьма эффективно, однако, вследствие усреднения по частоте и других предполагаемых упрощений, не может описывать области кратной синхронизации, давать глобальную картину синхронизации в пространстве параметров. Весьма ограничены возможности аналитического анализа также для описания гистерезисов, одновременного сосуществования нескольких устойчивых циклов, сложной динамики и хаотических режимов. Известно, что, несмотря на простоту уравнений Ван дер Поля и Ван дер Поля – Дуффинга, картина бифуркаций системы в пространстве параметров может выглядеть чрезвычайно сложно. При современном уровне развития компьютерной техники становится реализуемой возможность подробного численного исследования различных динамических систем при помощи таких методов нелинейной динамики, как построение карт динамических режимов, метод

секущей плоскости Пуанкаре и т.д. В работе [4] методом построения карт динамических режимов проводился численный анализ динамики связанных систем Ван дер Поля и Ван дер Поля – Дуффинга с диссипативной связью на плоскости расстройки собственных частот осцилляторов и величины связи. Исследована картина языков кратной синхронизации, характеризуемых различными числами вращения, отличными от 1/1. Обнаружен ряд новых эффектов, например, раскочки колебаний за счет диссипативной связи с отрицательным значением коэффициента связи.

В силу сложности задачи и большого числа существенных параметров, как правило, исследовалась ситуация, когда управляющие параметры подсистем одинаковы, а отличие состоит в разных собственных частотах. Однако задача о динамике связанных систем в случае неидентичных управляющих параметров является интересной не только с точки зрения расширения представления о поведении связанных осцилляторов Ван дер Поля, но и в более широком, общеколебательном аспекте. Действительно, представим себе две системы с бифуркацией Андронова – Хопфа. В этом случае, варьируя управляющий параметр первой подсистемы λ_1 , можно добиться возникновения в ней автоколебательного режима, а варьируя второй параметр λ_2 , можно добиться возникновения автоколебаний во второй системе. Если же системы связаны, то развитие «сценария» возникновения колебательных режимов оказывается двухпараметрической задачей, результаты которой естественно представить на плоскости параметров (λ_1, λ_2) , управляющих возникновением бифуркаций Андронова – Хопфа в изолированных подсистемах. Подобное исследование и является основной целью настоящей работы. Прежде всего необходимо выбрать систему, которая будет наиболее удобной для такого исследования.

В большинстве работ, посвященных анализу различных аспектов динамики автогенератора Ван дер Поля [2, 5–10], уравнение изолированной подсистемы выбирается в следующей нормировке:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \lambda(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (1)$$

При этом фазовая траектория выходит на предельный цикл в независимости от управляющего параметра λ . Амплитуда колебаний всегда равна единице, и бифуркация Андронова – Хопфа невозможна. В этом плане предпочтительнее иное представление уравнения Ван дер Поля:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (2)$$

В системе (2) имеется устойчивая неподвижная точка, когда управляющий параметр λ имеет отрицательное значение. При $\lambda = 0$ эта точка теряет устойчивость и наблюдается бифуркация Андронова – Хопфа. Предельный цикл системы (2) с увеличением λ растет в размере пропорционально $\sqrt{\lambda}$.

Уравнение (2), однако, приводит не к столь общим укороченным уравнениям – так, уравнение для фазы не зависит от амплитуды, в то время как для нормальной формы бифуркации уравнения Андронова – Хопфа производная от фазы выражается через квадрат амплитуды [1].

Положение можно исправить, если обратиться к уравнению Ван дер Поля – Дуффинга с дополнительной кубической нелинейностью

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda - x^2)\frac{dx}{dt} + x + \beta x^3 = 0.$$

Величину β мы будем далее называть коэффициентом фазовой нелинейности, так как в укороченных уравнениях она связывает производную от фазы с квадратом амплитуды (см. [1] и ниже). Наличие фазовой нелинейности в связанных осцилляторах оказывает достаточно существенное влияние на динамику. Так в работе [4] было показано, что фазовая нелинейность за счет трансформации языков синхронизации приводит к образованию на картах динамических режимов областей типа crossroad-area, что свидетельствует о возникновении сложной динамики в некоторых областях пространства параметров. Это становится возможным, только если величины коэффициентов нелинейности и управляющих параметров достаточно велики.

Таким образом, мы приходим к системе связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda_1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x + \beta x^3 + \mu\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\right) &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} - (\lambda_2 - y^2)\frac{dy}{dt} + (1 + \delta)y + \beta y^3 + \mu\left(\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt}\right) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где μ – коэффициент диссипативной связи, λ_1 и λ_2 – управляющие параметры осцилляторов, δ – расстройка собственных частот, β – параметр фазовой нелинейности.

1. Укороченные уравнения и уравнение Адлера

Одной из целей настоящей работы является поиск приближенных уравнений, позволяющих описать картину бифуркаций и получить форму языков синхронизации на плоскости управляющих параметров связанных осцилляторов.

Осуществить переход к укороченным уравнениям можно при помощи метода медленно меняющихся амплитуд, произведя замену в уравнениях (3)

$$x = ae^{it} + a^*e^{-it}, \quad y = be^{it} + b^*e^{-it} \quad (4)$$

и полагая

$$\frac{da}{dt}e^{it} + \frac{da^*}{dt}e^{-it} = 0, \quad \frac{db}{dt}e^{it} + \frac{db^*}{dt}e^{-it} = 0, \quad (5)$$

где a и b – комплексные амплитуды колебаний первого и второго осцилляторов. Они изменяются с течением времени медленно по сравнению с основной частотой колебаний, которая в данном случае равна 1. После проведенного усреднения можно получить уравнения для комплексных амплитуд a и b :

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \lambda_1 a - |a|^2 a + 3\beta i |a|^2 a - \mu a + \mu b, \\ \frac{db}{dt} &= \lambda_2 b - |b|^2 b + i b \delta + 3\beta i |b|^2 b - \mu b + \mu a. \end{aligned} \quad (6)$$

Комплексные амплитуды a и b можно представить в следующем виде: $a = Re^{i\varphi_1}$, $b = re^{i\varphi_2}$, где R, r – действительные амплитуды колебаний первого и второго осциллятора, соответственно, $\varphi_{1,2}$ – фазы колебаний осцилляторов. Тогда получаем

систему из четырех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= R(\lambda_1 - \mu) - R^3 + \mu r \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \\ \frac{dr}{dt} &= r(\lambda_2 - \mu) - r^3 + \mu R \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \frac{d\varphi_1}{dt} &= 3\beta R^2 + \frac{\mu r}{R} \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= \delta + 3\beta r^2 + \frac{\mu R}{r} \sin(\varphi_1 - \varphi_2).\end{aligned}\quad (7)$$

Поскольку фазы колебаний осцилляторов входят в уравнения только в виде разности $\psi = (\varphi_1 - \varphi_2)$, то можно вычесть из третьего уравнения четвертое и получить систему уже из трех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= R(\lambda_1 - \mu) - R^3 + \mu r \cos \psi, \\ \frac{dr}{dt} &= r(\lambda_2 - \mu) - r^3 + \mu R \cos \psi, \\ \frac{d\psi}{dt} &= -\delta + 3\beta(R^2 - r^2) - \mu\left(\frac{r}{R} + \frac{R}{r}\right) \sin \psi.\end{aligned}\quad (8)$$

Система (8) представляет собой систему укороченных уравнений Ван дер Поля – Дуффинга [1, 4].

В автономном режиме предельный цикл имеет форму окружности с радиусом $\sqrt{\lambda}$. Если величина коэффициента связи μ мала, то можно считать, что $R = \sqrt{\lambda_1} + \tilde{R}$, $r = \sqrt{\lambda_2} + \tilde{r}$, $\tilde{R}, \tilde{r} \ll 1$. Пренебрегая малыми слагаемыми, из первого и второго уравнения системы (8) получим соотношения

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{R}} &= -2\tilde{R}\lambda_1 - \mu\sqrt{\lambda_1} + \mu\sqrt{\lambda_2} \cos \psi, \\ \dot{\tilde{r}} &= -2\tilde{r}\lambda_2 - \mu\sqrt{\lambda_2} + \mu\sqrt{\lambda_1} \cos \psi.\end{aligned}\quad (9)$$

В установившемся режиме положим $\dot{\tilde{R}} = \dot{\tilde{r}} = 0$. Тогда из уравнений (9) легко найти, что

$$\begin{aligned}\tilde{R} &= -\frac{\mu}{2\sqrt{\lambda_1}} + \frac{\mu}{2} \frac{\sqrt{\lambda_2}}{\lambda_1} \cos \psi, \\ \tilde{r} &= -\frac{\mu}{2\sqrt{\lambda_2}} + \frac{\mu}{2} \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\lambda_2} \cos \psi.\end{aligned}\quad (10)$$

Теперь из третьего уравнения системы (8) можно получить уравнение

$$\frac{d\psi}{dt} = -\delta + 3\beta(\lambda_1 - \lambda_2) + 3\beta\mu\left(\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} - \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\right) \cos \psi - \mu\left(\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} + \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\right) \sin \psi. \quad (11)$$

Это уравнение позволяет определить границы основного языка синхронизации системы. Оно может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\delta + 3\beta(\lambda_1 - \lambda_2) + \mu\sqrt{9\beta^2\left(\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} - \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} + \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\right)^2} \sin(\psi + \theta), \quad (12)$$

где $\theta = \pm \arcsin(3\beta(\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} - \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}})/\sqrt{9\beta^2(\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} - \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}})^2 + (\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} + \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}})^2}) + \pi n$,
 $n \in Z$.

Таким образом, мы получили уравнение Адлера [1] для неидентичных связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга с разными значениями управляющих параметров λ_1, λ_2 . Аналог уравнения (12) был ранее получен в [1] для системы Ван дер Поля с равными значениями этих параметров. При $\lambda_1 = \lambda_2$ исчезают все члены в правой части уравнения (12), содержащие параметр нелинейности β . Таким образом, фазовая нелинейность осцилляторов влияет на форму языка синхронизации только при разных значениях управляющих параметров системы.

Уравнение (12) позволяет определить область основного языка синхронизации системы. Внутри этой области должна существовать устойчивая неподвижная точка уравнения Адлера, которая исчезает на границе языка синхронизации. Такая точка ψ_0 существует, когда $|\sin \psi_0| \leq 1$. В этом случае границы языка синхронизации даются соотношением

$$\delta = 3\beta(\lambda_1 - \lambda_2) \pm \mu \sqrt{9\beta^2(\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} - \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}})^2 + (\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} + \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}})^2}. \quad (13)$$

Вне языка синхронизации траектория укороченной системы выходит на предельный цикл, что соответствует квазипериодическому движению исходной дифференциальной системы (3), режиму, когда разность фаз осцилляторов меняется во времени. Внутри языка разность фаз осцилляторов остается постоянной.

Из полученного соотношения видно, что на плоскости параметров расстройка δ – величина связи μ языка синхронизации имеют классическую форму в виде острых «углов», как показано на рис. 1, а. Вершина языка располагается в точке $\delta = 3\beta(\lambda_1 - \lambda_2)$. Таким образом, неидентичность управляющих параметров проявляется лишь в смещении вершины языка, причем лишь при наличии фазовой нелинейности.

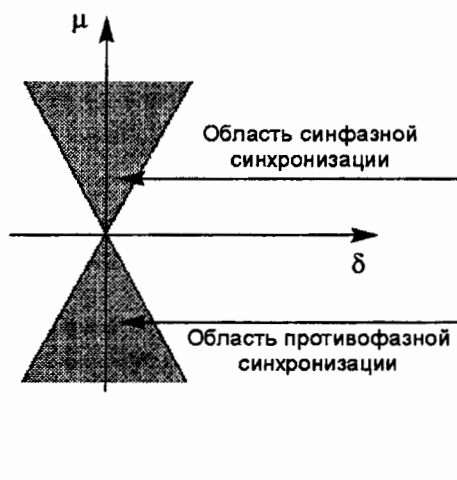
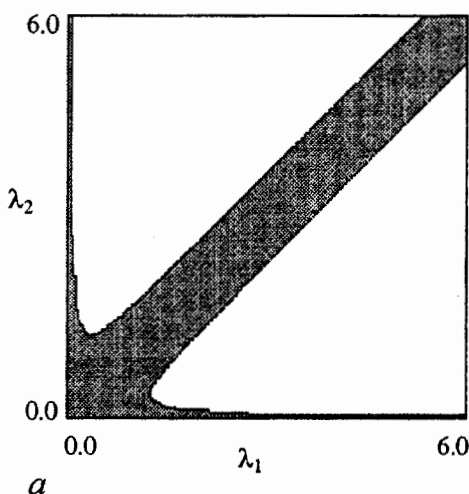


Рис. 1. а – языки синхронизации системы типа 1/1 на плоскости параметров (δ, μ) . б – язык синхронизации системы типа 1/1 на плоскости параметров (λ_1, λ_2) ; значения $\beta = 0.3, \mu = 0.3, \delta = 0$

Совершенно иная ситуация имеет место на плоскости управляющих параметров подсистем, где язык синхронизации имеет весьма своеобразную форму (рис. 1, б). Режим квазипериодических колебаний изображен белым цветом. В этой части плоскости параметров оба осциллятора в автономном состоянии находятся за порогом бифуркации Андронова – Хопфа. Появление квазипериодических движений объясняется конкуренцией двух собственных частот осцилляторов. Можно видеть, что две «ветви» языка синхронизации вытянуты вдоль координатных осей, что соответствует ситуации, когда автономные осцилляторы (при отсутствии связи) выходят на собственные предельные циклы и совершают колебания с собственными частотами, причем размер предельного цикла одного из осцилляторов много больше размеров предельного цикла другого. При наличии связи и положительных значениях обоих управляющих параметров внутри этих «ветвей» языка синхронизации происходит захват частоты тем осциллятором, величина предельного цикла которого больше. Одна из «ветвей» языка синхронизации вытянута вдоль диагонали. Внутри нее предельные циклы автономных осцилляторов близки по размеру, и происходит взаимная синхронизация.

На рис. 1, б представлен случай, когда собственные частоты осцилляторов одинаковы ($\delta = 0$). Метаморфозы языка для случая разных собственных частот и вариации других параметров мы обсудим ниже, параллельно с рассмотрением карт динамических режимов дифференциальной системы.

Можно сделать еще более грубое приближение. Пусть, как и в автономной системе, $R \approx \sqrt{\lambda_1}$, $r \approx \sqrt{\lambda_2}$. Тогда из третьего уравнения системы (8) можно получить уравнение

$$\frac{d\psi}{dt} = -\delta + 3\beta(\lambda_1 - \lambda_2) - \mu\left(\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} + \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\right) \sin \psi. \quad (14)$$

В этом случае условие границы области синхронизации 1/1 будет выглядеть следующим образом:

$$\delta = 3\beta(\lambda_1 - \lambda_2) \pm \mu\left(\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} + \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\right). \quad (15)$$

Сравнивая полученное соотношение с (12), заключаем, что оно эффективно, если параметр фазовой нелинейности β мал. Соотношение (15) – простейший вариант формулы, описывающей форму языка синхронизации на плоскости параметров (λ_1 , λ_2), управляющих возникновением бифуркаций Андронова – Хопфа в изолированных подсистемах.

2. Численный анализ исходной системы

2.1. Методология численного исследования. Обратимся теперь к численному исследованию системы (3). Численный анализ далее проводится преимущественно при помощи построения карт динамических режимов системы на плоскостях различных параметров [3], на которых оттенками серого цвета обозначены различные периоды колебаний одного из связанных осцилляторов. Белый цвет соответствует хаотическим либо квазипериодическим движениям.

Периоды циклов при построении карт динамических режимов определялись численно с использованием метода сечений Пуанкаре. После достаточно длительного переходного процесса, когда можно считать фазовую траекторию вышедшей

на предельный цикл, определялись точки ее пересечения с секущей плоскостью. Но при этом рассматривались только траектории, «протыкающие» сечение Пуанкаре в одном направлении. Количество точек пересечения секущей плоскости принималось за период предельного цикла. В качестве сечения Пуанкаре выбирались плоскости $x = 0$ и $y = 0$, позволяющие определить число вращения m/n , характеризующее режим установившейся синхронизации. Здесь m – период колебаний первого осциллятора, а n – период колебаний второго осциллятора. Число вращения рационально внутри языков синхронизации и иррационально за их границами.

На рис. 2 представлена карта динамических режимов для системы связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга на плоскости: расстройка собственных частот δ – величина силы связи μ . Интересно отметить, что, поскольку мы разрешаем параметру μ принимать и положительные, и отрицательные значения, то осцилляторы могут синхронизоваться как в фазе (сдвиг фаз между осцилляторами $\psi = 0$), так и в противофазе ($\psi = \pi$). Действительно, обратимся к уравнению (14) в случае идентичных подсистем

$$\frac{d\psi}{dt} = -\delta - 2\mu \sin \psi.$$

Из него нетрудно понять (вводя, например, эффективный потенциал $U(\psi) = \delta\psi - 2\mu \cos \psi$), что при $\mu > 0$ устойчивым будет состояние равновесия $-\pi/2 < \psi < \pi/2$. В частности, при нулевой расстройке δ фазы осцилляторов точно совпадут: $\psi = 0$. Соответственно, при $\mu < 0$ и нулевой расстройке, наоборот, колебания осцилляторов противофазны, и $\psi = \pi$. В численных экспериментах наличие противофазной синхронизации можно отследить, фиксируя различные знаки величин скоростей отдельных осцилляторов в момент прохождения сечения Пуанкаре. Результатом такого моделирования служат отмеченные штриховкой на рис. 2 области противофазной синхронизации. Хорошо видно, что они действительно отвечают отрицательным значениям μ .

2.2. Плоскость управляющих параметров системы. Обратимся теперь к устройству плоскости управляющих параметров осцилляторов (λ_1, λ_2). На рис. 3 представлена карта динамических режимов системы с диссипативной связью на плоскости управляющих параметров, а также фазовые портреты, построенные для некоторых точек пространства параметров для значений $\mu = 0.3, \delta = 1.5$.

Если оба управляющих параметра отрицательны, колебания системы затухают. На карте динамических режимов заштрихована область, где единственным устойчивым положением равновесия является нулевая неподвижная точка. Черным цветом изображен режим синхронизации $1/1$. Он захватывает часть плоскости, где оба параметра λ_1 и λ_2 положительны. В этой четверти реализуется ситуация, аналогичная изображенной на рис. 1, б. Также можно видеть область квазипериодических движений, изображенную белым цветом. Однако на карте динамических режимов внутри

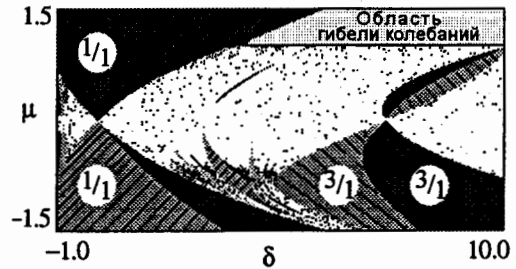


Рис. 2. Карта динамических режимов системы связанных осцилляторов Ван дер Поля на плоскости параметров (δ, μ) при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.0, \beta = 0$. Заштрихованы области противофазной синхронизации

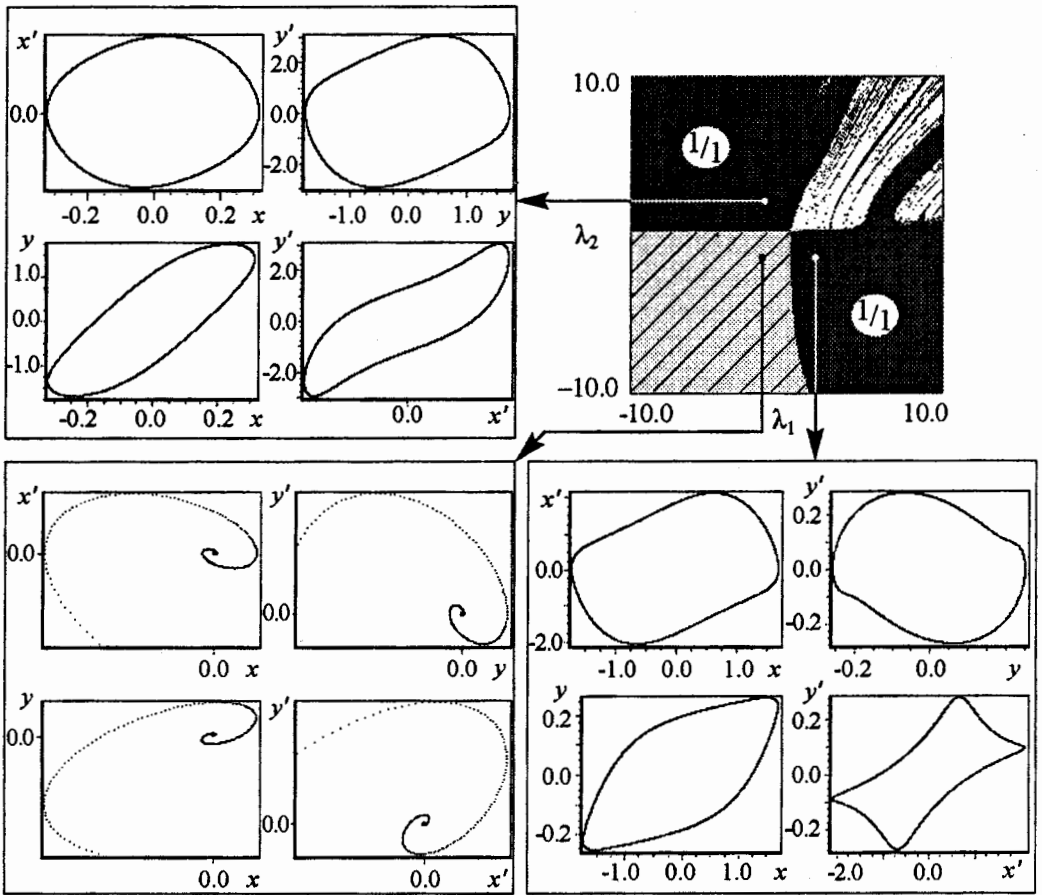


Рис. 3. Карта динамических режимов системы связанных осцилляторов Ван дер Поля на плоскости управляющих параметров (λ_1, λ_2) для $\mu = 0.3, \delta = 1.5$ и фазовые портреты системы, иллюстрирующие появление бифуркации Андронова – Хопфа

области квазипериодики есть тонкие языки кратной синхронизации, которые отсутствуют на рис. 1, б в силу использования приближенных укороченных уравнений.

Если же один из управляющих параметров системы отрицателен, а второй положителен, то в автономном режиме колебания одного из осцилляторов должны затухать. Но в связанном состоянии имеет место конкуренция двух аттракторов: устойчивой нулевой точки первого осциллятора и предельного цикла второго осциллятора. В результате реализуется одна из двух возможных ситуаций: колебания второго осциллятора подавляются первым осциллятором, либо второй осциллятор индуцирует колебания первого. На рис. 3 граница этих динамических режимов проходит по линии, разделяющей черную и заштрихованную области.

На рис. 4 и 5 в левой колонке изображены карты динамических режимов системы на плоскости (λ_1, λ_2) для различных значений других параметров дифференциальной системы (3). В правой колонке показаны соответствующие им языки синхронизации $1/1$, построенные в ходе приведенного выше аналитического анализа, границы которых описываются соотношением (13). Рисунки в левой и правой колонках демонстрируют замечательное соответствие, что говорит о правильном определении

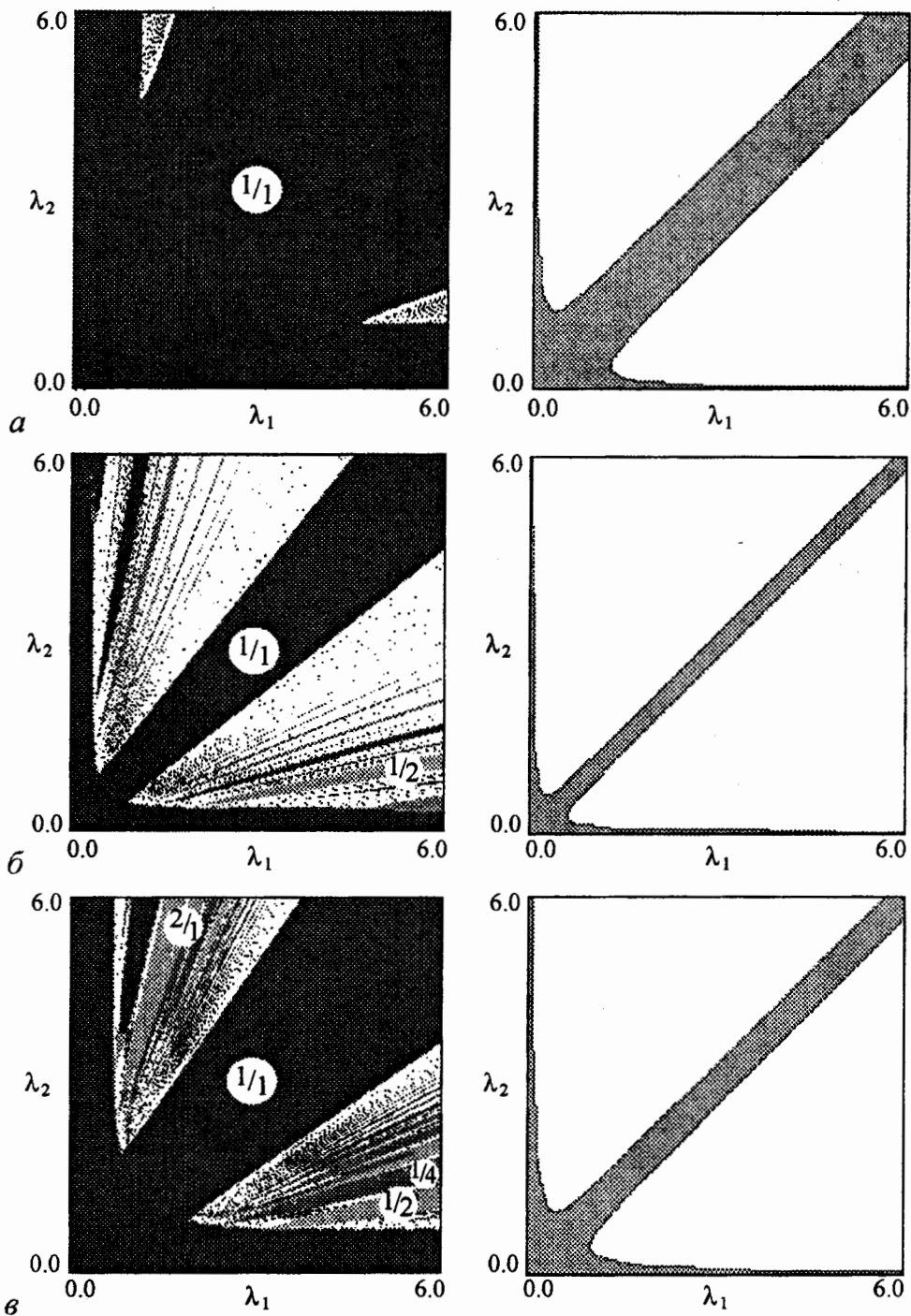


Рис. 4. Карты динамических режимов системы при $\delta = 0$ для значений параметров $\beta = 0.3, \mu = 0.3$ (*a*); $\beta = 1, \mu = 0.3$ (*b*); $\beta = 1, \mu = 0.5$ (*e*) и соответствующие им языки синхронизации $1/1$, построенные в ходе аналитического анализа, границы которых задаются соотношением (13)

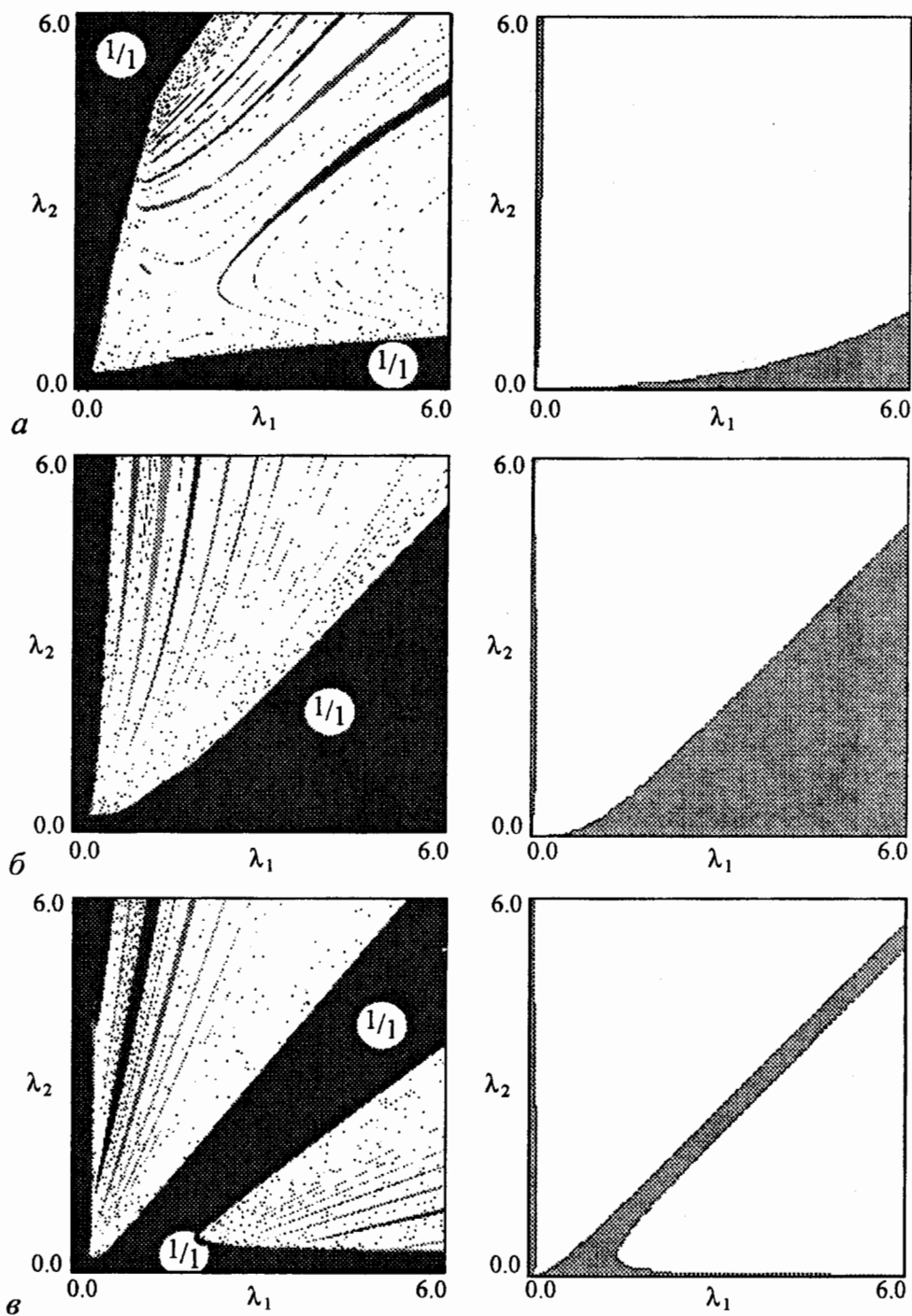


Рис. 5. Карты динамических режимов системы при $\delta = 1.5$ для значений параметров $\beta = 0.1$, $\mu = 0.3$ (а); $\beta = 0.3$, $\mu = 0.3$ (б); $\beta = 1$, $\mu = 0.3$ (в) и соответствующие им языки синхронизации $1/1$, построенные в ходе аналитического анализа, границы которых задаются соотношением (13)

конфигурации основного языка синхронизации в разделе 1 вблизи точки бифуркации Андронова – Хопфа в связанных осцилляторах Ван дер Поля – Дуффинга. Но в левой колонке, в отличие от правой, присутствует большое число очень тонких языков синхронизации других периодов.

3. Влияние фазовой нелинейности на динамику дифференциальной системы

На плоскости расстройки собственных частот и величины коэффициента связи увеличение параметров нелинейности приводит к некоторому изменению формы языков синхронизации и их смещению вдоль оси расстройки частот [4]. При этом языки Арнольда сохраняют классическую форму «углов», сужающихся либо к линии нулевой связи, либо к границе основного языка синхронизации типа 1/1 (также см. [4]). Однако, если обратиться теперь к плоскости управляющих параметров (λ_1, λ_2) , то можно наблюдать существенное изменение формы языков синхронизации уже при незначительном увеличении параметра фазовой нелинейности β .

На рис. 6 представлены карты динамических режимов системы диссипативно связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга на плоскости управляющих па-

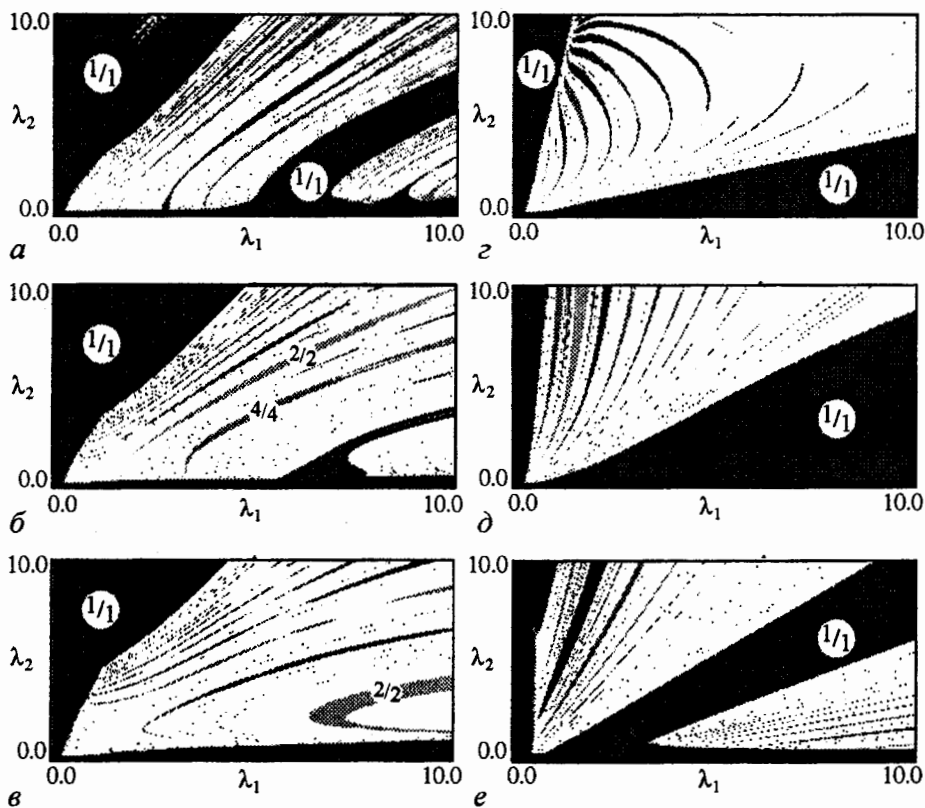


Рис. 6. Карты динамических режимов на плоскости параметров (λ_1, λ_2) при $\mu = 0.3$, $\delta = 1.5$ и следующих значениях β : 0 (а), 0.05 (б), 0.1 (в), 0.2 (г), 0.3 (д), 1.0 (е)

раметров системы для различных значений величины коэффициента нелинейности β , изменяющегося от 0 до 1. Хорошо видно, что структура языков очень чувствительна к изменению β . Особенно сильно видоизменяются языки кратной синхронизации $2/1$, $1/2$, $3/1$, $1/3$ и т.д. Основные языки синхронизации типа $1/1$ также трансформируются. Образуется область синхронизации типа $1/1$, расположенная вдоль диагонали, где параметры λ_1 и λ_2 близки по значению.

На рис. 6 карты динамических режимов были построены при положительном значении расстройки собственных частот осцилляторов δ . Карты режимов при отрицательной расстройке (она может изменяться в интервале $[-1, 0]$) на рис. 7 устроены несимметрично относительно диагонали и в большей степени чувствительны к увеличению параметра нелинейности. При значении коэффициента $\beta = 0.04$ вся структура языков синхронизации разрушается.

До данного момента мы рассматривали осцилляторы, в которых величины коэффициента фазовой нелинейности β были равны. Интересно также рассмотреть случай «несимметричной» системы, в которой параметры фазовой нелинейности

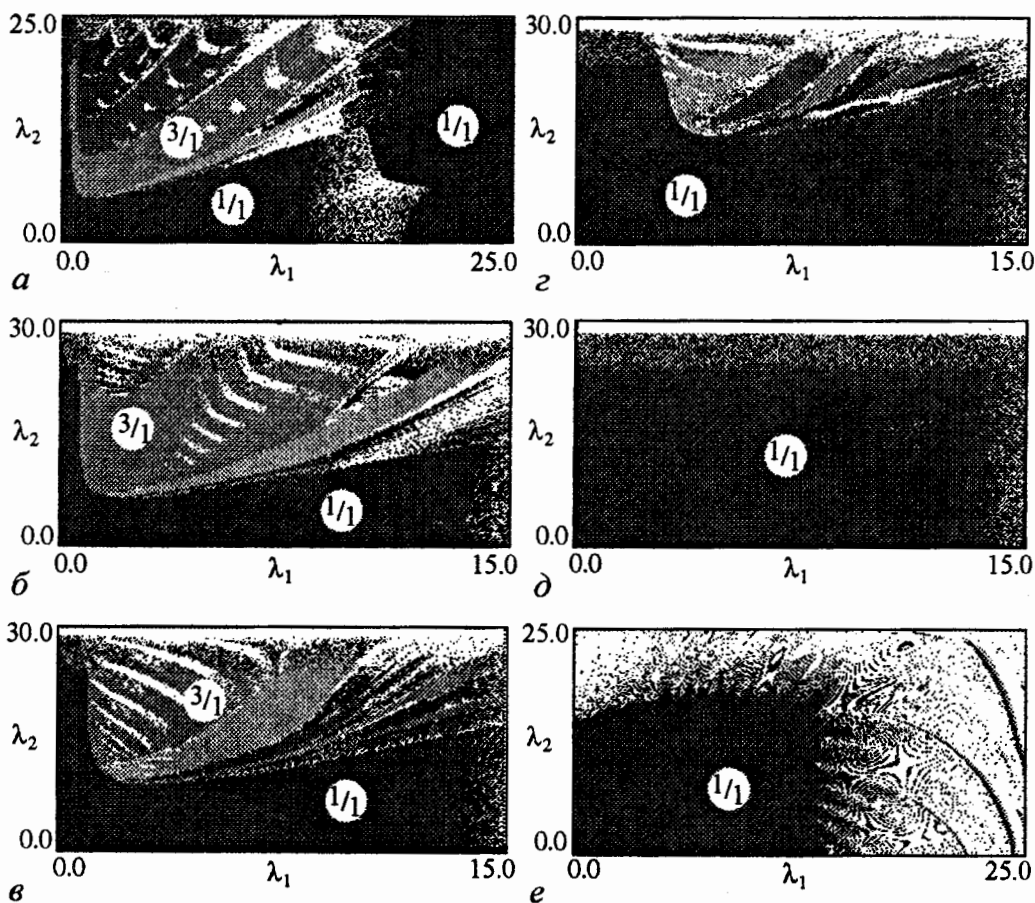


Рис. 7. Карты динамических режимов на плоскости параметров (λ_1, λ_2) при $\mu = 1$, $\delta = -0.5$ и следующих значениях β : 0 (а), 0.01 (б), 0.02 (в), 0.03 (г), 0.04 (д), 0.1 (е)

будут различны. Обозначим их β_1 и β_2 для первого и второго осциллятора, соответственно. Далее рассмотрим следующие два случая:

- нелинейность первого осциллятора β_1 существенно больше нуля, а нелинейность второго равна нулю ($\beta_2 = 0$ либо мало);
- нелинейность второго осциллятора β_2 велика при нулевой нелинейности первого ($\beta_1 = 0$ либо мало).

Если добавить нелинейность только в какой-либо один осциллятор, можно наблюдать движение точки на оси расстройок собственных частот, к которой сходится вершина основного языка синхронизации $1/1$. Если нелинейность добавляется в первый осциллятор, то указанная точка движется в сторону увеличения величины расстройки, то есть вправо. Если же неизохронен только второй осциллятор, то наоборот – влево. Ранее, при симметричной нелинейности, эти два процесса компенсировали друг друга и положение вершины языка Арнольда типа $1/1$ на оси нулевой связи оставалось неизменным независимо от величины нелинейности.

На рис. 8 представлены карты динамических режимов для случая присутствия нелинейности только в первом осцилляторе при единичных значениях управляющих параметров $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.0$, для значений параметра нелинейности $\beta_1 = 1.0, 2.0$ и 5.0 . Увеличение значения параметра β_1 приводит к «перекрыванию» основного языка синхронизации типа $1/1$ и структуры языков Арнольда кратной синхронизации. Для случая $\beta_1 = 5.0$ приведены две карты, построенные при различных значениях начальных условий и демонстрирующие наличие областей перекрывания, в которых одновременно сосуществуют несколько различных динамических режимов для одного набора значений параметров, но реализующихся при различных начальных условиях.

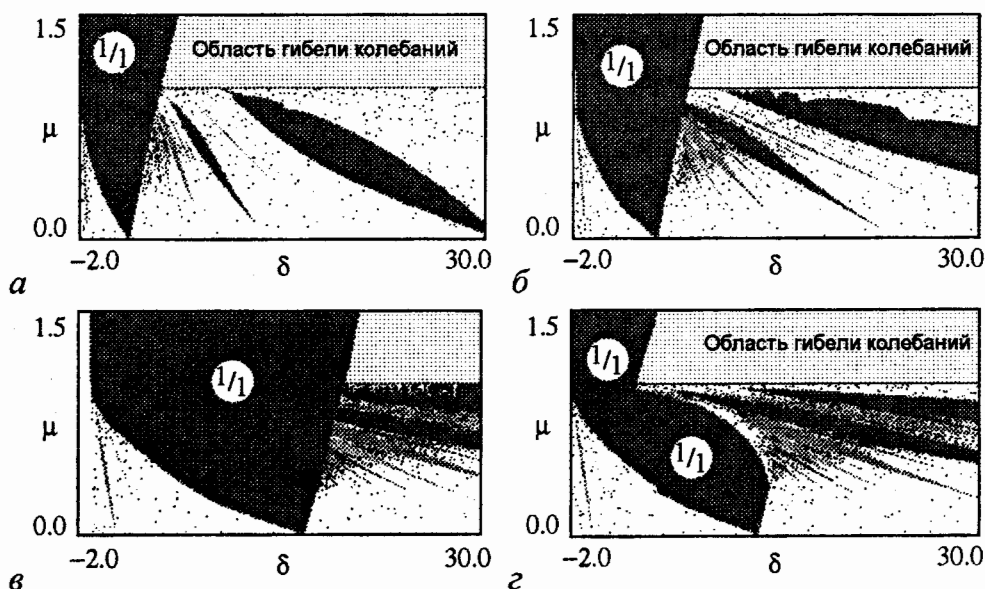


Рис. 8. Карты динамических режимов, построенные для значений параметров $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.0$, $\beta_2 = 0$ и следующих значений β_1 : 1.0 (а); 2.0 (б); 5.0 (в, г)

На рис. 9 изображена карта динамических режимов, на которой можно видеть язык синхронизации $1/1$ сложной формы, которая объясняется исключительно выбором начальных условий при построении карты. Это свидетельствует о том, что бассейны притяжения в области сосуществования различных динамических режимов устроены достаточно сложным образом.

Увеличение параметра нелинейности в первом осцилляторе сопровождается изменением формы и усложнением устройства языков синхронизации, так как



Рис. 9. Карты динамических режимов, построенные для значений параметров $\lambda_1 = \lambda_2 = 4.0$, $\beta_1 = 2.0$, $\beta_2 = 0$

в области верхней границы языков образуются структуры crossroad-area. Это говорит о сложной динамике осцилляторов в области пространства параметров.

Если колебания осцилляторов «сделать» релаксационными, то есть увеличить значения управляющих параметров λ_1 и λ_2 , то языки синхронизации также меняют форму. Они расширяются, формируя более широкие области динамического хаоса и crossroad-area (рис. 10).

На рис. 10, б изображена вырожденная структура crossroad-area, у которой «хвосты» пересекают друг друга, образуя область, состоящую из колец, соответствующих различным режимам синхронизации. При движении в направлении центра этой структуры происходит каскад бифуркаций удвоения периода и переход к хаосу.

Специфическая картина бифуркаций с достаточно широкими языками синхронизации $1/1$ и $3/1$ образуется также при отрицательном значении параметра связи μ . Это проиллюстрировано на картах динамических режимов рис. 11.

Обратимся теперь ко второму случаю, когда нелинейность присутствует только во втором осцилляторе. Расстройка частот δ входит только во второе уравнение системы (3). В отсутствие нелинейности при $\delta < -1.0$ второй осциллятор перестает быть автоколебательной системой, поскольку при $\delta = -1.0$ его собственная частота становится равной нулю. На картах динамических режимов на плоскости парамет-

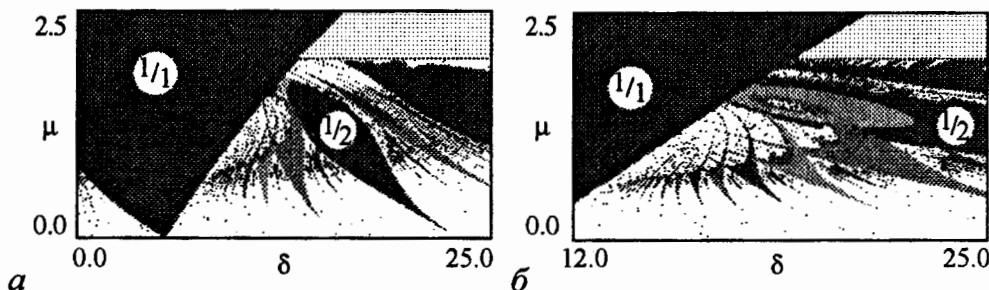


Рис. 10. Карты динамических режимов, построенные для значений параметров $\lambda_1 = \lambda_2 = 2.0$, $\beta_2 = 0$, $\beta_1 = 1.0$ (а); $\beta_1 = 2.0$ (б)

ров (δ, μ) в линейном случае левее линии $\delta = -1.0$ нет языков синхронизации. Добавление нелинейности во второй осциллятор изменяет форму его потенциала, что приводит к появлению собственных частот второго осциллятора даже при сильно отрицательном значении расстройки. Причем это осуществляется при любом сколь угодно малом значении β_2 , если $\beta_2 > 0$. Изменение вида потенциала при добавлении нелинейности проиллюстрировано на рис. 12.

На картах динамических режимов (рис. 13), построенных на плоскости (δ, μ) , при добавлении нелинейности во второй осциллятор происходит расширение основного языка синхронизации типа $1/1$ в область отрицательных расстроек собственных частот осцилляторов. Показана также область «активной» связи осцилляторов ($\mu < 0$). Видно, что сформирована сложная картина динамики, где присутствуют области crossroad-area, а также пересечения языков синхронизации. Пересечение языков синхронизации говорит о том, что при активной связи возможна мультистабильность в поведении системы.

Поскольку система связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга проявляет высокую чувствительность к величине нелинейности, включенной в оба осциллятора, следует ожидать сильный отклик и на несимметрию нелинейности. Действительно, добавление нелинейности только в один (второй) осциллятор позволяет наблюдать совершенно иную картину бифуркаций на плоскости параметров (λ_1, λ_2) . Образуется периодическая структура, состоящая из полос синхронизации $1/1$ и областей квазипериодической динамики, внутри которых расположено множество очень тонких языков старших периодов (рис. 14). При увеличении параметра связи полосы синхронизации $1/1$ расширятся и начинают сливаться друг с другом.

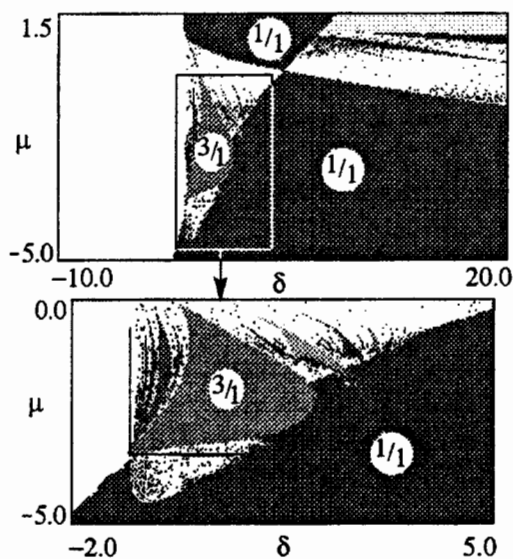


Рис. 11. Карта динамических режимов и ее увеличенный фрагмент, построенные для значений параметров $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.0$, $\beta_1 = 2.0$, $\beta_2 = 0$

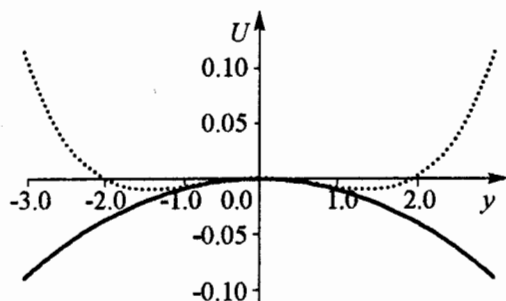


Рис. 12. Вид потенциала второго осциллятора при $\delta = 0.02$ при наличии нелинейности и без нее

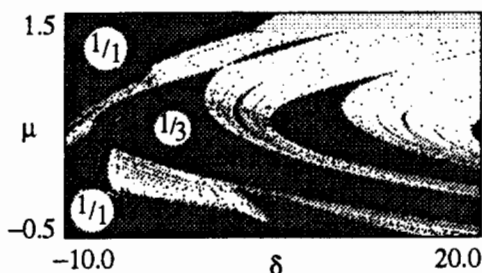


Рис. 13. Карта динамических режимов, построенная для значений параметров $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1.0$

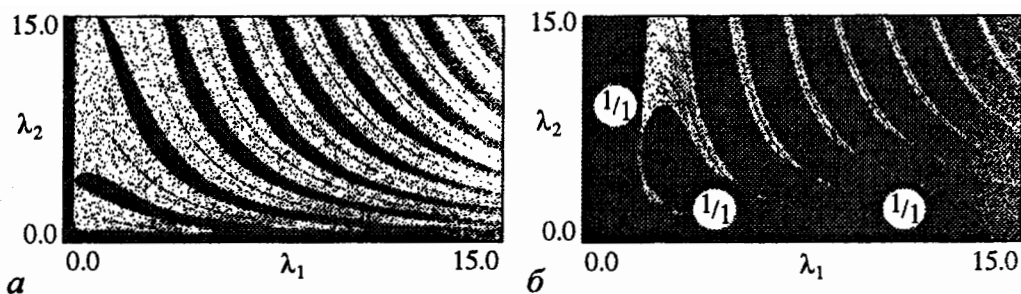


Рис. 14. Карты динамических режимов на плоскости параметров (λ_1, λ_2) для случая несимметричной нелинейности при $\beta_1 = 0, \beta_2 = 1.0, \delta = -0.5; \mu = 0.3$ (а), $\mu = 1.0$ (б)

Заключение

Система связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга дает хороший пример связанных систем с бифуркацией Андронова – Хопфа, возможной в изолированных подсистемах. Ее изучение на плоскости управляющих параметров подсистем представляется существенным для описания картины динамических режимов. Приближенное аналитическое исследование в рамках метода медленно меняющихся амплитуд, а затем и численное исследование исходной дифференциальной системы показали, что языки синхронизации на плоскости управляющих параметров имеют своеобразную форму. Неидентичность осцилляторов как по величине частотной расстройки, так и по величине фазовой нелинейности оказывает существенное влияние на вид и устройство языков синхронизации.

Работа поддержана грантом РФФИ № 03-02-16074 и Американского фонда гражданских исследований (REC 006).

Библиографический список

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртц Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
2. Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N. Amplitude Response of Coupled Oscillators // Physica D. 1990. Vol. 41. P. 403.
3. Кузнецов С.П. Динамический хаос. Сер. Современная теория колебаний и волн. М.: Изд-во Физматлит, 2001. 296 с.
4. Кузнецов А.П., Паксютов В.И. О динамике двух связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга с диссипативной связью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11, № 6.
5. Storti D.W., Rand R.H. Dynamics of two strongly coupled Van der Pol oscillators // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1982. Vol. 17, № 3, 143-152.
6. Chakraborty T., Rand R.H. The transition from phase locking to drift in a system of two weakly coupled van der Pol oscillators // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1988. Vol. 23, № 5/6, 369-376.
7. Poliashenko M., McKay S.R., Smith C.W. Chaos and nonisochronism in weakly coupled nonlinear oscillators // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 44. P. 3452.
8. Poliashenko M., McKay S.R., Smith C.W. Hysteresis of synchronous – asynchronous regimes in a system of two coupled oscillators // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 43. P. 5638.

9. *Pastor I., Perez-Garcia V.M., Encinas-Sanz F., Guerra J.M.* Ordered and chaotic behavior of two coupled van der Pol oscillators // *Phys. Rev. E.* 1993. Vol. 48. P.171.
10. *Camacho E., Rand R.H., Howland H.* Dynamics of two van der Pol oscillators coupled via a bath // *Int. J. of Solids and Structures.* 2004. Vol. 41. P. 2133-2143.

Саратовский филиал ИРЭ РАН

Поступила в редакцию 14.03.2005

Саратовский государственный университет

После доработки

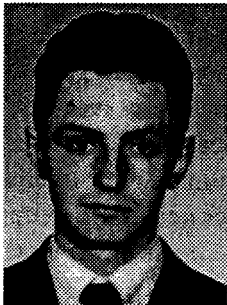
12.05.2005

FEATURES OF THE PARAMETER PLANE OF TWO NONIDENTICAL COUPLED VAN DER POL – DUFFING OSCILLATORS

A.P. Kuznetsov, V.I. Paksyutov

The system of two nonidentical dissipative coupled Van der Pol – Duffing oscillators is considered. A possibility of Adler equation application to describe the synchronization areas is shown due to transition to the closed equations. There is a nontrivial form of the main synchronization tongue on the plane of the control parameters. The view of synchronization tongues system of the original differential model and the influence of the phase nonlinearity on its configuration are discussed. The case of the nonsymmetrical nonlinearity in oscillators is also considered.

Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского госуниверситета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СО ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и заочной школы факультета нелинейных процессов. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лица прикладных наук СГУ, шести учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). Член редколлегии журнала «Империя математики». E-mail: alkuz@sgu.ru; www.sgtnd.tserv.ru



Паксютов Владимир Игоревич – родился в Саратове (1982). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского в 2004 году. Аспирант кафедры динамических систем факультета нелинейных процессов СГУ. Занимается научной работой по направлению: динамические режимы и синхронизация в автоколебательных системах различной природы. С 2000 года постоянный участник ежегодной научной школы-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых», принял участие в нескольких международных конференциях. Имеет 7 научных публикаций.