



## О СВОЙСТВАХ СКЕЙЛИНГА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ШУМА В ОТОБРАЖЕНИИ ОКРУЖНОСТИ С ЧИСЛОМ ВРАЩЕНИЯ, ЗАДАННЫМ ЗОЛОТЫМ СРЕДНИМ

*А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Ю.В. Седова*

В работе исследованы особенности скейлинга, связанные с влиянием аддитивного шума на критическое отображение окружности с числом вращения, равным золотому среднему. На основании ренормгруппового подхода Хэма и Грэхэма [1] получена улучшенная числовая оценка для константы скейлинга, ответственной за влияние шума  $\gamma = 2.3061852653$ . Уменьшение амплитуды шума на эту константу обеспечивает возможность наблюдения каждого следующего уровня фрактальной структуры, что отвечает увеличению характерного масштаба времени на фактор  $(\sqrt{5} + 1)/2$ . Представлены численные результаты, демонстрирующие наличие ожидаемого скейлинга на фазовых портретах аттрактора с шумом, графиках «чертовой лестницы» и ляпуновских картах.

### Введение

#### Отображение окружности

$$x_{n+1} = x_n + r - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi x_n \pmod{1} \quad (1)$$

– одна из фундаментальных моделей, применяемая для описания многих систем в современной нелинейной динамике [2–5]. В частности, это отображение описывает автогенератор, находящийся под периодическим воздействием [6, 7], контакт Джоузефсона в поле микроволнового излучения [8, 9], волны пространственного заряда в твердом теле [9], маятник с затуханием под внешним воздействием [10]. В теоретических исследованиях, касающихся биологических и медицинских проблем, отображение окружности появляется как модель для описания динамики сердца в присутствии конкуренции двух пейсмейкеров, управляющих ритмом [11, 12].

Отображение окружности должно рассматриваться не только как модель определенного качественного типа поведения. Как представитель класса универсальности, ассоциирующегося с переходом к хаосу через квазипериодическое движение,

оно адекватно передает количественные закономерности данного перехода. Это заключение вытекает из ренормгруппового подхода (РГ) [13, 14], который представляет собой эффективный и мощный теоретический инструмент для анализа глубоких и фундаментальных особенностей динамики между порядком и хаосом. В частности, РГ-анализ раскрывает такое характерное свойство динамики, как масштабная инвариантность (скейлинг) для тонких фрактальных структур в фазовом пространстве и пространстве параметров, которые связаны с переходами к хаосу. В нелинейной динамике метод РГ был впервые введен Фейгенбаумом [15–17] в применении к удвоениям периода и позднее последовательно развит для анализа различных типов переходов к хаосу, включая другие классы универсальности с удвоениями периода [18–21], перемежаемость [22, 23], квазипериодичность [24, 25], явления сложной аналитической динамики [26–28], связанные системы [29–31].

Применительно к переходу к хаосу через разрушение квазипериодического движения, наиболее подробные теоретические и экспериментальные исследования относятся к случаю, когда отношение основных частот задано иррациональным числом  $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$ , известным как золотое среднее. В отображении окружности это отвечает квазипериодическому режиму с числом вращения

$$\rho(r, K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}, \quad (2)$$

заданным указанной константой  $\omega$ . (При вычислении величины  $\rho$  операция взятия модуля в уравнении (1) игнорируется.)

Выбор именно этого иррационального числа оправдан, во-первых, простотой и прозрачностью соответствующего теоретического анализа и, во-вторых, тем фактом, что в данном случае тонкие структуры пространства параметров, изучение которых составляет предмет рассмотрения в теоретических исследованиях или в экспериментах, являются различимыми лучше, чем при других отношениях частот.

Известен ряд экспериментальных исследований, в которых многие особенности критической динамики вблизи точки перехода к хаосу через квазипериодический режим с числом вращения золотое среднее, предсказанные на основе РГ-анализа, были зарегистрированы, например, в конвекции жидкости и в динамике электронных осцилляторов под внешним воздействием [32–34]. Это касается таких аспектов, как детали структуры пространства параметров (языки Арнольда), скейлинг, мультифрактальные свойства критического квазипериодического движения, спектр Фурье и т.д.

Надо заметить, однако, что все реальные экспериментальные системы всегда функционируют в присутствии воздействующего на них шума. Учет шума является вопросом принципиального значения при тщательном анализе явлений на пороге хаоса, потому что шум «замывает» самые тонкие детали наблюдаемых фрактальных структур. В частности, это обстоятельство было специально отмечено в литературе в отношении контактов Джозефсона [35].

Теоретический подход для описания влияния шума в рамках РГ-анализа был предложен Кратчфилдом с соавторами и Шрайманом с соавторами [36, 37] применительно к переходу к хаосу через удвоения периода в диссипативных системах. Эти авторы ввели в рассмотрение универсальный фактор  $\gamma_F = 6.61903\dots$ , ответственный за скейлинговые свойства динамики относительно влияния шума. Смысл его состоит в том, что уменьшение амплитуды шума на этот фактор обеспечивает возможность наблюдения еще одного уровня каскада удвоения периода. Позднее аналогичный

подход был предложен для нескольких других типов критического поведения на пороге хаоса [1, 38–41].

В частности, в работе [1] Хэмм и Грэхэм развили РГ-анализ для перехода к хаосу в диссипативных системах через разрушение квазипериодических движений с отношением частот, заданным золотым средним, и оценили соответствующий фактор скейлинга для шума  $\gamma_{GM} = 2.30619$ . Уменьшение интенсивности шума на эту константу дает возможность различить еще один уровень фрактальной структуры, связанной с увеличением характерного масштаба времени на фактор  $W = w^{-1} = (\sqrt{5} + 1)/2$ . Помимо упомянутой статьи, нам известны только две работы, специально посвященные влиянию шума на отображение окружности [35, 42]. Будучи опубликованы раньше работы Хэмма и Грэхэма, они содержат только эмпирические результаты численного моделирования, без обоснования на базе РГ-анализа.

Цель настоящей статьи состоит в подробном рассмотрении скейлинговых свойств, вытекающих из РГ-анализа и характерных для отображения окружности под влиянием шума вблизи квазипериодической орбиты с числом вращения «золотое среднее». Раздел 1 посвящен качественному обсуждению результатов численного моделирования стохастической версии отображения окружности с аддитивным шумом. В разделе 2 представлен РГ-анализ отображения окружности вблизи критической точки, отвечающей золотому среднему, при наличии шума, который основан на одном из подходов, предложенных Хэммом и Грэхэмом. В частности, мы приводим существенно улучшенное числовое значение основной универсальной константы, ответственной за свойства скейлинга по отношению к шуму. В разделе 3 рассмотрены выводы, которые можно сделать на основе РГ-анализа в применении к отображению окружности с шумом. Обсуждаются компьютерные иллюстрации, включая портреты аттрактора с шумом, диаграммы типа «чертовой лестницы», карты ляпуновского показателя на плоскости параметров вблизи критической точки «золотое среднее» на различных масштабах и при разных уровнях шума.

## 1. Влияние шума на отображение окружности: качественные результаты

Как известно, в отображении окружности (1) критическое квазипериодическое движение на пороге хаоса с числом вращения  $w = (\sqrt{5} - 1)/2$  имеет место при следующих значениях параметров [13, 14, 43, 44]:

$$(r, K)_c = (0.60666106347011201228..., 1). \quad (3)$$

Будем называть эту точку критической точкой типа GM (Golden Mean – «золотое среднее»).

На рис. 1, а приведена карта динамических режимов отображения окружности (1) на плоскости параметров  $(r, K)$ . Хорошо видны области периодичности в виде характерных языков (языки Арнольда). Для основных языков синхронизации на карте указаны числа вращения, которые находятся по формуле (2). Также на карте режимов отмечена критическая линия  $K = 1$  и указано расположение критической точки GM.

Рис. 1, б представляет собой ляпуновскую карту отображения окружности на плоскости параметров  $(r, K)$ . Ляпуновский показатель, отвечающий каждому эле-

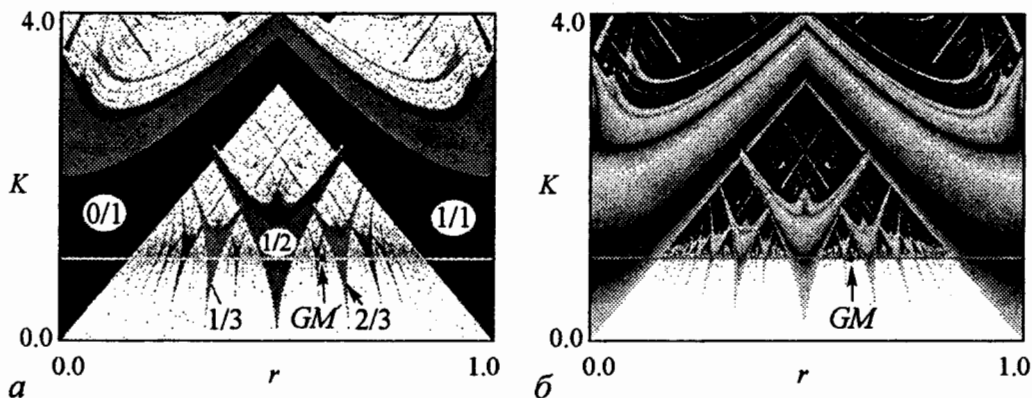


Рис. 1. Карта динамических режимов (а) и карта ляпуновского показателя (б) отображения окружности (1) на плоскости параметров  $(r, K)$ . Цифрами на диаграмме (а) указаны числа вращения в основных языках синхронизации. В каждой точке диаграммы (б) ляпуновский показатель, вычисленный по соотношению (4), закодирован в серой гамме. Серые тона определяют отрицательные значения ляпуновского показателя (чем темнее цвет, тем больше абсолютная величина отрицательного показателя). Нулевые значения  $\Lambda$  (квазипериодическая динамика) обозначены белым, а положительные значения (хаос) – черным

менту изображения (пикселю), вычисляется по формуле

$$\Lambda \cong \frac{1}{N} \sum \log |1 - K \cos(2\pi x_n)|. \quad (4)$$

Отрицательные значения  $\Lambda$  закодированы тонами серого цвета: чем темнее цвет, тем больше по модулю значение ляпуновского показателя. Нулевые значения  $\Lambda$ , соответствующие квазипериодической динамике, обозначены белым цветом, а положительные, связанные с хаотической динамикой, – черным. (См. работы [45–48], где описана основная идея ляпуновских карт и приведены другие примеры их использования.)

Введем последовательность  $\xi_n$ , которая представляет собой дискретный во времени белый шум. Это означает, что члены последовательности на различных шагах времени предполагаются статистически независимыми. Максимальная величина  $\xi_n$  предполагается ограниченной. Среднее для  $\xi_n$  равно нулю  $\langle \xi_n \rangle = 0$ , дисперсия есть некоторая постоянная  $\sigma = \sqrt{\langle \xi_n^2 \rangle}$ . Рассмотрим следующее стохастическое отображение – отображение окружности в присутствии шума

$$x_{n+1} = x_n + r - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi x_n + \varepsilon \xi_n \pmod{1}, \quad (5)$$

где  $\varepsilon$  характеризует интенсивность добавленного шумового источника.

Если амплитуда шума мала, и исследуется поведение на больших масштабах времени, то конкретная форма распределения вероятности для  $\xi_n$  будет несущественна, и поведение системы с шумом будет иметь универсальный характер (этот факт подтвержден и для других критических ситуаций, допускающих анализ в терминах метода РГ, см. [49, 50]). При проведении вычислений будем определять  $\xi_n$  как случайную переменную, равномерно распределенную в интервале  $[-0.5, 0.5]$ ; следовательно  $\sigma = 1/\sqrt{12}$ . При проведении РГ-анализа в следующем разделе будем полагать шум гауссовым.

На рис. 2 представлены ляпуновские карты на плоскости параметров  $(r, K)$  при различных значениях интенсивности шума  $\varepsilon$ . Области периодического поведения, известные в случае отсутствия шума как языки Арнольда, ясно различимы на фрагментах *а, б* – это окрашенные в серый цвет образования. Между ними, в субкритической области  $K < 1$ , имеет место квазипериодическая динамика. В присутствии шума периодическая или квазипериодическая динамика в точном смысле не реализуется, но на ляпуновских картах картина характерных областей по-прежнему хорошо различима, по крайней мере, при малых или умеренных шумах, хотя тонкие детали исчезают из-за наличия шума. Введем такую терминологию: будем говорить о шумовом периодическом режиме, когда ляпуновский показатель  $\Lambda$  отрицателен; о шумовом квазипериодическом, если  $\Lambda$  близко к нулю; и о шумовом хаотическом режиме, когда значение  $\Lambda$  положительно. Ляпуновские карты позволяют легко распознавать эти режимы визуально. С этой точки зрения, влияние шума выглядит довольно очевидным: шум стирает тонкие детали картины динамических режимов.

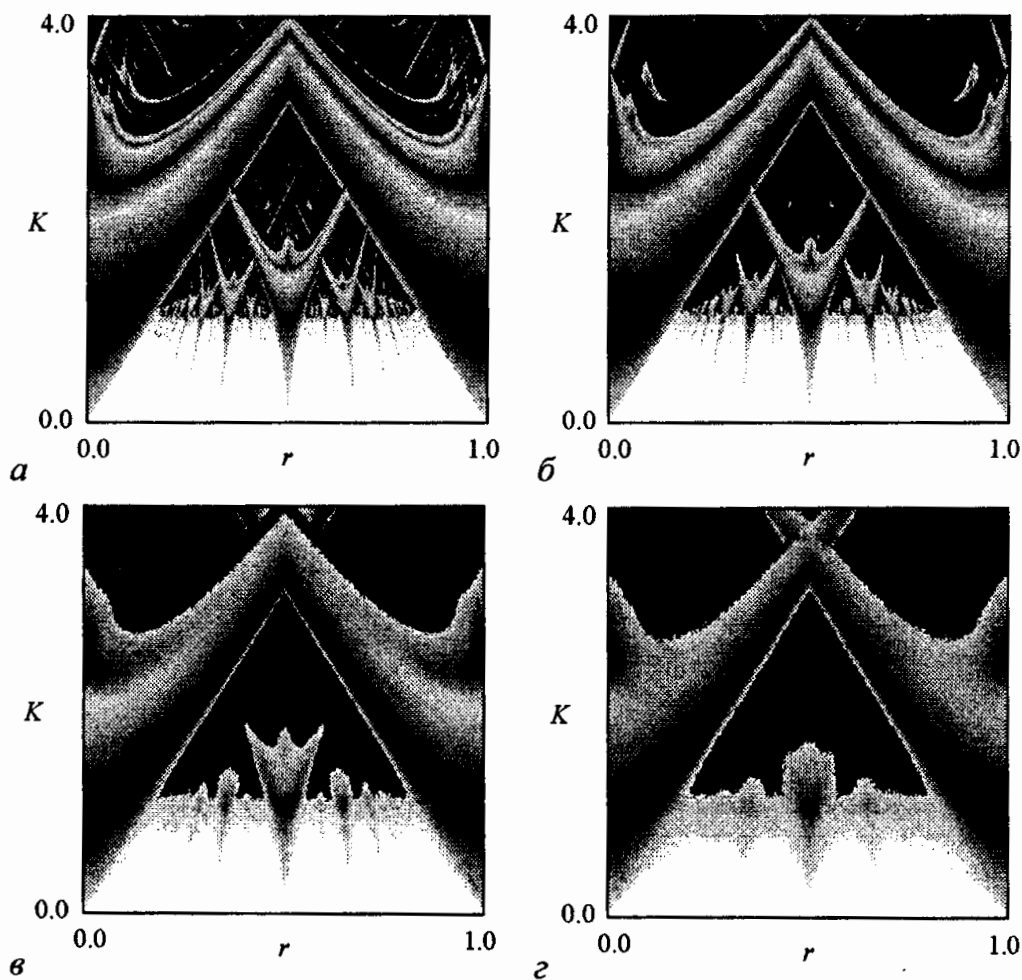


Рис. 2. Ляпуновские карты для отображения (5) на плоскости управляющих параметров  $r$  и  $K$ . Диаграммы соответствуют последовательному увеличению интенсивности шума  $\varepsilon$ : 0.001 (*а*), 0.01 (*б*), 0.05 (*в*) и 0.1 (*з*)

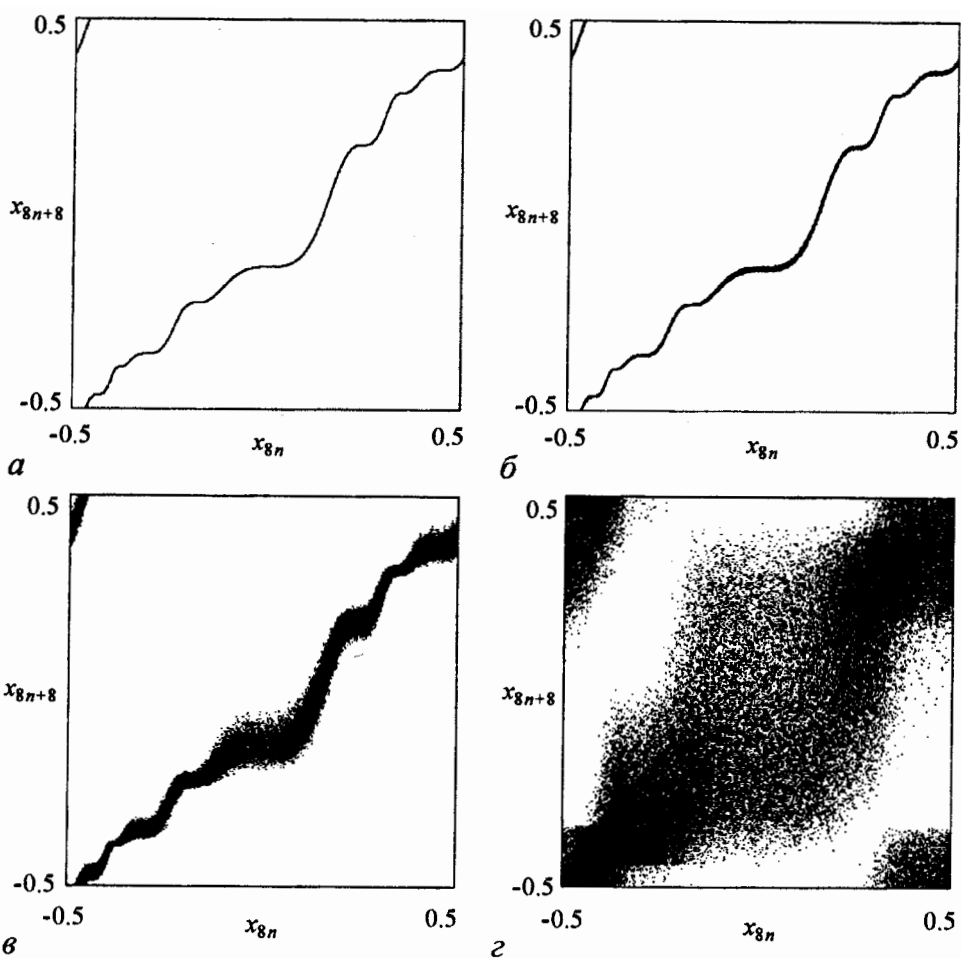


Рис. 3. Портреты аттракторов в критической точке GM отображения (5) на итерационных диаграммах в координатах  $(x_n, x_{n+F_k})$  с  $F_k = F_6 = 8$ . Фрагмент *a* соответствует динамическому случаю (шум отсутствует), а последующие диаграммы – присутствию шума с последовательно увеличивающейся амплитудой  $\varepsilon$ : 0.001 (*б*), 0.01 (*в*) и 0.1 (*г*)

На рис. 3 представлены фазовые портреты аттракторов в критической точке типа GM в координатах, которые будут удобны при дальнейшем обсуждении, а именно,  $x_{n+F_k}$  в зависимости от  $x_n$ , где  $F_k$  – одно из чисел Фибоначчи. (Диаграммы на рис. 3 построены для  $F_6 = 8$ .) Фрагмент *a* соответствует чистому динамическому случаю (шума нет), а фрагменты *б–г* – присутствию шума с нарастающей амплитудой от картинке к картинке. И снова можно видеть, как структура аттрактора становится все более и более размытой с увеличением шума, шаг за шагом тонкие детали на фоне шума исчезают.

## 2. Ренормгрупповой анализ

В применении к квазипериодическому движению с числом вращения золотое среднее главная идея РГ-анализа состоит в исследовании операторов эволюции, определенных для интервалов времени, заданных последовательными числами Фибоначчи  $F_k$ :  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ ,  $F_{k+2} = F_k + F_{k+1}$ .

Предположим, что в присутствии шума эволюция динамической переменной  $x$  в критической точке GM для числа шагов  $F_k$  и  $F_{k+1}$  дается уравнениями

$$x_{i+F_k} = \phi_k(x_i) + \varepsilon \xi_i \psi_k(x_i) \quad (6)$$

$$x_{i+F_{k+1}} = \phi_{k+1}(x_i) + \varepsilon \xi_i \psi_{k+1}(x_i), \quad (7)$$

где  $\xi_i$  является гауссовой последовательностью независимых случайных величин с нулевым средним,  $\phi_k(x)$  и  $\psi_k(x)$  – некоторые вспомогательные функции. Параметр амплитуды шума  $\varepsilon$  предполагается малым. Очевидно, модель (5) есть частная версия уравнений (6) и (7): при  $F_1 = F_2 = 1$  следует положить

$$\phi_1(x) = \phi_2(x) = x + r_c - (1/2\pi) \sin 2\pi x, \quad \psi_1(x) = \psi_2(x) \equiv 1. \quad (8)$$

В соответствии с уравнениями (6) и (7), сохраняя члены первого порядка по  $\varepsilon$ , получаем уравнение эволюции за  $F_{k+2}$  шагов дискретного времени:

$$x_{i+F_{k+2}} = \phi_k(\phi_{k+1}(x_i)) + \varepsilon [\xi_i \phi'_k(\phi_{k+1}(x_i)) \psi_{k+1}(x_i) + \xi_{i+F_{k+1}} \psi_k(\phi_{k+1}(x_i))]. \quad (9)$$

Что касается стохастического члена, то необходимо сделать следующее замечание. Предположим, что в некоторый момент орбита стартует из точки  $x_i$ . Рассмотрим ансамбль гауссовых случайных чисел  $\{\xi_i, \xi_{i+F_{k+1}}\}$  со средним, равным нулю, и дисперсией, равной  $\sigma^2$ , и составим из них сумму с коэффициентами, заданными функциями  $x_i$ . Поскольку пары  $\{\xi_i, \xi_{i+F_{k+1}}\}$  статистически независимы, сумма может быть представлена опять же как гауссово случайное число со средним, равным нулю, и дисперсией, равной  $\sigma^2$ , умноженное на функцию  $x_i$ , а именно

$$\xi_i \phi'_k(\phi_{k+1}(x_i)) \psi_{k+1}(x_i) + \xi_{i+F_{k+1}} \psi_k(\phi_{k+1}(x_i)) = \tilde{\xi}_i \psi_{k+2}(x_i). \quad (10)$$

Введем функцию

$$\phi_{k+2}(x) = \phi_k(\phi_{k+1}(x)) \quad (11)$$

и перепишем уравнение (9) в форме, аналогичной (6) и (7), с переопределенной случайной переменной и функциями  $\phi$  и  $\psi$ :

$$x_{i+F_{k+2}} = \phi_{k+2}(x_i) + \varepsilon \tilde{\xi}_i \psi_{k+2}(x_i). \quad (12)$$

Чтобы получить замкнутое функциональное уравнение, возведем в квадрат обе части уравнения (10) и выполним усреднение по ансамблю реализаций с шумом. Так как  $\langle \xi_i^2 \rangle = \langle \xi_{i+F_{k+1}}^2 \rangle = \sigma^2$  и  $\langle \xi_i \xi_{i+F_{k+1}} \rangle = 0$ , то приходим к соотношению

$$[\psi_{k+2}(x)]^2 = [\phi'_k(\phi_{k+1}(x))]^2 [\psi_{k+1}(x)]^2 + [\psi_k(\phi_{k+1}(x))]^2, \quad (13)$$

где штрих означает производную функции по первому аргументу.

В соответствии с основным содержанием ренормгруппового подхода, осуществим пересчет масштаба  $x \mapsto x/\alpha^k$ , где  $\alpha = -1.288574553954368\dots$  – константа скейлинга для критической динамики с золотым средним [13, 14, 43, 44]. Тогда в терминах перенормированных функций имеем

$$\begin{aligned} g_k(x) &= \alpha^k \phi_k(\alpha^{-k} x), & f_k(x) &= \alpha^k \phi_{k+1}(\alpha^{-k} x), \\ \Phi_k(x) &= [\psi_k(\alpha^{-k} x)]^2, & \Psi_k(x) &= \alpha^k [\psi_{k+1}(\alpha^{-k} x)]^2, \end{aligned} \quad (14)$$

и полученные выше уравнения означают, что

$$\begin{aligned} g_{k+1}(x) &= \alpha f_k(x/\alpha), \\ f_{k+1}(x) &= \alpha g_k(f_k(x/\alpha)), \\ \Phi_{k+1}(x) &= \alpha^2 \Psi_k(x/\alpha), \\ \Psi_{k+1}(x) &= \alpha^2 \{ [g'_k(f_k(x/\alpha))]^2 \Psi_k(x/\alpha) + \Phi_k(f_k(x/\alpha)) \}. \end{aligned} \quad (15)$$

Эти соотношения определяют РГ-преобразование для набора функций  $\{g_k, f_k, \Phi_k, \Psi_k\}$ . Процедура может быть повторена снова и снова, чтобы получить функции для всё больших значений  $k$ , то есть определить перенормированные операторы эволюции для больших чисел Фибоначчи на шагах дискретного времени  $F_k$ .

Как следует из РГ-анализа [13, 14], в критической точке GM последовательность функций  $g_k(x), f_k(x)$  сходится асимптотически к решению в виде неподвижной точки РГ-уравнения  $\{g, f\}$ , которое удовлетворяет соотношениям

$$g(x) = \alpha f(x/\alpha), \quad f(x) = \alpha g(f(x/\alpha)), \quad (16)$$

или

$$g(x) = \alpha^2 g(\alpha^{-1} g(x/\alpha)). \quad (17)$$

Численные данные для полиномиального разложения универсальной функции  $g(x)$  по степеням  $x^3$  могут быть найдены, например, в работе [51].

Сходимость функций  $g_k(x), f_k(x)$  к решению в виде неподвижной точки РГ-преобразования подразумевает, что решение рекуррентных линейных функциональных уравнений для функциональных пар  $\{\Phi_k(x), \Psi_k(x)\}$  асимптотически определяется собственным вектором, связанным с самым большим собственным числом  $\Omega$  для следующей задачи на собственные значения [1]:

$$\Omega \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 \Psi(x/\alpha) \\ \alpha^2 \{ [g'(f(x/\alpha))]^2 \Psi(x/\alpha) + \Phi(f(x/\alpha)) \} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Как упоминалось выше, универсальная функция  $g(x)$  была получена численно в виде конечного разложения по степеням аргумента [13, 14, 51]. С использованием этих данных функциональное преобразование правой части уравнения (18) было реализовано как компьютерная программа. Неизвестные функции  $\{\Phi(x), \Psi(x)\}$  представлялись набором их значений в узлах сетки на интервале  $-1.2 < x < 1.2$  и интерполяционной схемой между ними. При заданных произвольно начальных условиях  $\Phi(x) \equiv 1, \Psi(x) \equiv 1$  программа выполняла функциональное преобразование многократно и нормировала результирующие функции на каждом шаге как  $\Phi^0(x) = \Phi(x)/\Phi(0), \Psi^0(x) = \Psi(x)/\Phi(0)$  до тех пор, пока форма функций не стабилизировалась. Значение  $\Phi(0)$  (перед нормализацией) сходится к собственному значению

$$\Omega = 5.31849047771... \quad (19)$$

Теперь в линейном приближении относительно амплитуды шума, стохастическое отображение для  $F_k$  и  $F_{k+1}$  шагов эволюции при больших  $k$  в критической точке GM может быть записано в перенормированных переменных

$$\begin{aligned} x_{i+F_k} &= g(x_i) + \varepsilon \gamma^k \xi_i \varphi(x_i), \\ x_{i+F_{k+1}} &= f(x_i) + \varepsilon \gamma^k \xi_i v(x_i), \end{aligned} \quad (20)$$



где

$$\varphi(x) = \sqrt{\Phi^0(x)}, \quad v(x) = \sqrt{\Psi^0(x)}, \quad \gamma = \sqrt{\Omega} = 2.30618526526... \quad (21)$$

Если рассмотреть малый сдвиг параметров  $r$  и  $K$  от критической точки GM, в уравнениях появятся дополнительные члены, которые соответствуют двум существенным собственным модам линеаризованного РГ-уравнения вблизи решения, отвечающего неподвижной точке (см. [13, 14, 51]). Учитывая эти дополнительные члены, можно записать

$$x_{i+F_k} = g(x_i) + C_1 \delta_1^k h^{(1)}(x_i) + C_2 \delta_2^k h^{(2)}(x_i) + \varepsilon \gamma^k \xi_i \varphi(x_i), \quad (22)$$

где  $h^{(1)}(x)$  и  $h^{(2)}(x)$  – соответствующие собственные векторы. Собственные значения  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , как известно, есть

$$\delta_1 = -2.833610655891... \quad \delta_2 = \alpha^2 = 1.660424381098... \quad (23)$$

Коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  в уравнении (22) зависят от параметров исходного отображения и равны нулю в критической точке GM. В близкой окрестности критической точки достаточно учитывать первые члены разложения коэффициентов по отклонению параметров от критической точки. Возмущение, связанное с модой  $C_1$ , соответствует сдвигу в пространстве параметров вдоль критической линии  $K = 1$ ; оно сохраняет кубическую точку перегиба. Вторая мода, связанная с коэффициентом  $C_2$ , появляется из-за сдвига от критической линии вдоль кривой постоянного числа вращения. В соответствии с [51], выражения для коэффициентов через параметры исходного отображения окружности есть

$$r - r_c = C_1 - 0.01749C_2 - 0.00148C_2^2, \quad K - K_c = C_2. \quad (24)$$

Коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  можно трактовать как специальные локальные координаты («скейлинговые координаты») в окрестности критической точки GM на плоскости параметров.

Теперь можно сформулировать основное свойство скейлинга, которое следует из (22), для динамики вблизи критической точки GM в присутствии шума.

Если уменьшить сдвиг по параметру от точки GM так, чтобы коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  уменьшились на факторы  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , соответственно, и уменьшить амплитуду шума  $\varepsilon$  на фактор  $\gamma$ , то форма стохастического отображения (22) остается неизменной. Таким образом, при новых значениях параметров система с шумом будет демонстрировать статистически подобное поведение, как и со старыми параметрами, но с характерным масштабом времени, увеличенным на фактор  $F_{k+1}/F_k \cong w^{-1} = (\sqrt{5} + 1)/2$ .

### 3. Свойства скейлинга и их иллюстрации в численных экспериментах

Обсудим некоторые проявления влияния шума на отображение окружности в критической точке GM и ее окрестности в численных экспериментах с точки зрения закономерностей, обнаруженных в предыдущем разделе.

**3.1. Критический аттрактор в присутствии шума.** Чтобы исследовать свойства скейлинга критической орбиты в точке GM, удобно использовать итерационную диаграмму в координатах  $(x_n, x_{n+F_k})$  при последовательных числах Фибоначчи  $F_k$ , как сделано в разделе 1.

Рис. 4 демонстрирует свойство скейлинга критической орбиты в отсутствие шума. Вставка на каждой картинке показывает фрагмент общей структуры с увеличением на фактор  $\alpha = -1.2885\dots$ . Можно видеть хорошее подобие увеличенных участков (хотя, формально говоря, свойство скейлинга становится точным только в асимптотике малых масштабов и больших  $k$ ). На центральной диаграмме вставка изображена перевернутой из-за того, что фактор  $\alpha$  отрицателен.

В присутствии шума тонкая структура критической квазипериодической орбиты размывается уровень за уровнем по мере роста интенсивности шума. В соответствии с заключениями предыдущего раздела, каждый новый уровень структуры замывается, когда мы увеличиваем амплитуду источника шума на фактор  $\gamma = 2.30618\dots$ . Диаграммы на рис. 5 представляют собой фазовые портреты аттракторов с шумом для модельной системы (5) в критической точке GM с различными значениями параметра интенсивности шума  $\varepsilon$ . Рисунки справа представляют собой увеличенные фрагменты предыдущих диаграмм, с увеличением для рисунков *a*, *б*, *в* на факторы  $C$ ,  $\alpha C$  и  $\alpha^2 C$ , соответственно, где  $C$  – некоторая постоянная. Наблюдается подобие картинок для аттракторов с шумом.

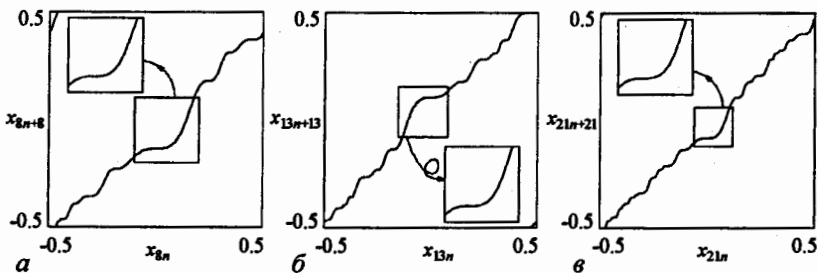


Рис. 4. Иллюстрация скейлинга в отсутствие шума для критической орбиты с числом вращения, равным «золотому среднему» в координатах  $(x_n, x_{n+F_k})$ ,  $F_k = 8, 13, 21$ . На каждой картинке вставленный прямоугольник – это фрагмент с увеличением на фактор  $\alpha = -1.2885\dots$  по сравнению с предыдущим случаем. На диаграмме *б* вставленный прямоугольник изображен перевернутым из-за того, что фактор  $\alpha$  отрицателен

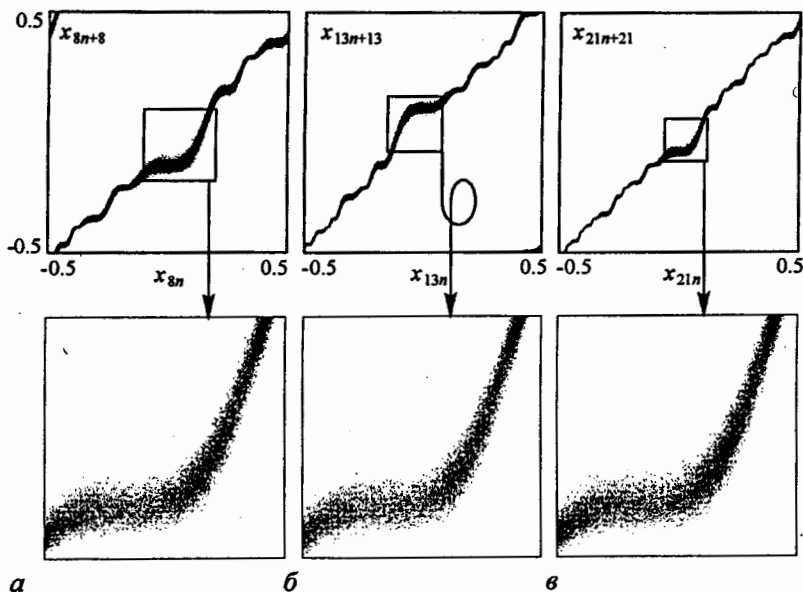


Рис. 5. Фазовые портреты аттрактора для отображения окружности с шумом (5) в критической точке GM:  $r = r_c = 0.606661\dots$ ,  $K = 1$  при значениях амплитуды шума  $\varepsilon$ :  $0.005$  (*a*),  $0.005/\gamma$  (*б*) и  $0.005/\gamma^2$  (*в*)

**3.2. Показатель Ляпунова в присутствии шума.** В соответствии с результатами раздела 2, в критической точке GM для параметров интенсивности шума  $\varepsilon$  и  $\varepsilon/\gamma$  система демонстрирует подобное поведение, причем во втором случае характерный масштаб времени больше на фактор  $W = 1.6180\dots$  Следовательно, величина ляпуновского показателя при величине шума  $\varepsilon/\gamma$  должна быть меньше, чем при  $\varepsilon$ , на указанный фактор. Рис. 6 демонстрирует графики ляпуновского показателя в зависимости от интенсивности шума  $\varepsilon$ . Выделенный прямоугольник нарисован с увеличением на фактор  $W$  по вертикальной оси и на фактор  $\gamma$  по горизонтальной оси. При этом изменении масштаба наблюдается подобие картинок. Очевидно, что на меньших масштабах степень совпадения станет еще лучше.

Оценим критический индекс для показателя Ляпунова по отношению к интенсивности шума. Принимая во внимание, что изменение  $\varepsilon$  на фактор  $\gamma$  сопровождается изменением показателя Ляпунова на фактор  $W$ , можно заключить, что ляпуновский показатель должен вести себя как

$$\Lambda \propto \varepsilon^\eta, \quad (25)$$

где  $\eta = \log_\gamma W = 0.575891387\dots$  Рис. 7 иллюстрирует зависимость  $\Lambda$  от  $\varepsilon$  в двойном логарифмическом масштабе. Точки, полученные в результате численных расчетов, расположены вдоль прямой линии с наклоном  $\eta$ . Зависимость имеет колебания с периодом  $\log \gamma$  по оси  $\varepsilon$  в соответствии с законом скейлинга, следующим из РГ-анализа.

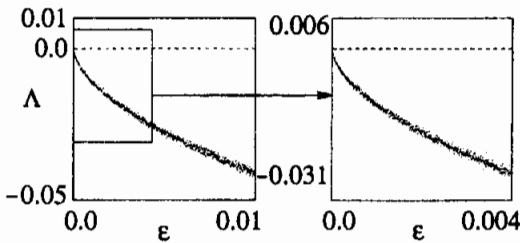


Рис. 6. Показатель Ляпунова  $\Lambda$  в зависимости от интенсивности шума  $\varepsilon$ . Выделенный участок показан с увеличением на фактор  $W = 1.618\dots$  по вертикальной оси и на фактор  $\gamma = 2.30618\dots$  по горизонтальной оси

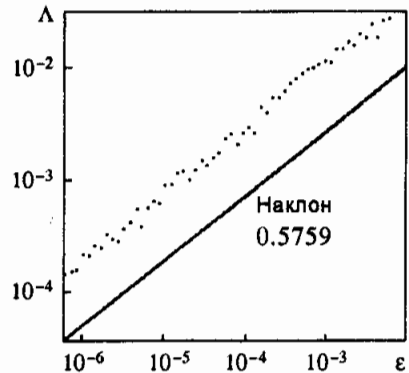


Рис. 7. Показатель Ляпунова в зависимости от интенсивности шума в критической точке GM в двойном логарифмическом масштабе. Прямая линия отвечает соотношению (25)

Стоит отметить своего рода шумовую стабилизацию динамики в точке GM. Действительно, шум содействует уменьшению ляпуновского показателя, то есть уменьшению чувствительности по отношению к начальным условиям, и задерживает появление хаоса. Об этом явлении было упомянуто также в работах [35, 42]. Эффект оказывается противоположным наблюдаемому в ситуации перехода к хаосу через удвоения периода [52].

**3.3. Особенности скейлинга в присутствии шума в окрестности критической точки.** Обратимся теперь к исследованию особенностей скейлинга при отстройке управляющих параметров отображения от критической точки.

В качестве первого шага рассмотрим изменение одного параметра  $r$  при постоянном  $K = 1$ , тем самым подразумевая, что отображение сохраняет кубическую точку перегиба. В возмущенном универсальном операторе эволюции (22) сдвиг параметра  $r$  приводит к моде с собственным значением  $\delta_1 = -2.83361\dots$ , которое будет присутствовать в скейлинговых отношениях.

Рис. 8 иллюстрирует соответствующее свойство скейлинга динамики без шума. Изображенный объект известен как «чертова лестница» [53, 54]. Ступеньки расположены при каждом рациональном значении числа вращения и соответствуют пересечению языков Арнольда, связанных с периодической динамикой. Рост функции  $\rho(r, K)$  имеет место на фрактальном множестве, соответствующем иррациональным числам вращения, то есть квазипериодическим движениям. При  $K = 1$  это множество имеет нулевую меру на оси  $r$  («полная чертова лестница» [53, 54]). Число вращения, равное золотому среднему, имеет место только при значении параметра  $r_c$ , связанным с исследуемой критической точкой. Фрагменты по обе стороны от главной диаграммы показывают детали структуры лестницы около точки GM. Свойство самоподобия состоит в том, что структура воспроизводит себя в малых масштабах при увеличении на фактор  $\delta_1$  по горизонтальной оси и на фактор  $(-W^2)$  по вертикальной оси.

В присутствии шума число вращения может быть определено через формулу (2) так же, как и в отсутствие шума. В системе под действием шума, однако, мы не можем говорить о периодичности или квазипериодичности в обычном смысле. Тем не менее, некоторая грубая классификация все же возможна.

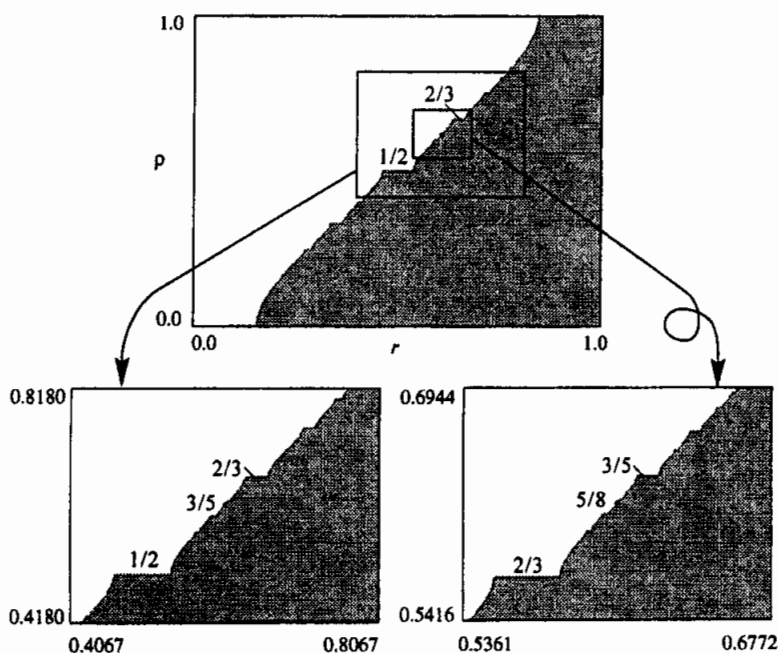


Рис. 8. Иллюстрация локального свойства скейлинга вблизи критической точки золотое среднее в отсутствие шума: график зависимости числа вращения  $\rho$  от параметра  $r$  («чертова лестница»). Свойство самоподобия состоит в повторяемости структуры на малых масштабах при увеличении на фактор  $\delta_1 = -2.8336$  по горизонтальной оси и на фактор  $(-W^2) = -2.6180\dots$  по вертикальной оси

При некоторых значениях параметра  $r$  можно наблюдать относительно большие временные интервалы, динамика на которых близка к периодической, причем они чередуются с вызванными шумом участками «проскальзывания фазы», на которых переменная  $x$  претерпевает относительно быстрый сдвиг  $\pm 1$ . Можно сказать, что эти режимы представляют модифицированную присутствием шума версию периодичности. При других значениях параметра переменная  $x$  эволюционирует без каких-либо заметных плато во временной зависимости, со статистически хорошо определенным трендом. Это соответствует шумовой версии квазипериодичности.

График зависимости числа вращения от параметра  $r$  демонстрирует последовательное сглаживание сначала тонких, а затем крупномасштабных деталей фрактальной структуры чертовой лестницы. Это явление удовлетворяет свойству скейлинга, вытекающему из РГ-анализа влияния шума, и проиллюстрировано на рис. 9. Главная диаграмма и первый увеличенный фрагмент отвечают параметру шума  $\varepsilon = 0.1$ . Вторая и третья картинки приводятся, соответственно, для интенсивностей шума  $\varepsilon = 0.1/\gamma$  и  $0.1/\gamma^2$ . Хорошо видно подобие структур во всех трех увеличенных фрагментах.

Рис. 10 показывает набор ляпуновских карт на плоскости параметров  $(r, \varepsilon)$  при фиксированном  $K = 1$ . Темные серые области соответствуют большим отрицательным значениям ляпуновского показателя. Эти области «шумовой периодичности» – языки Арнольда, которые постепенно стираются с увеличением шума. Светло-серые

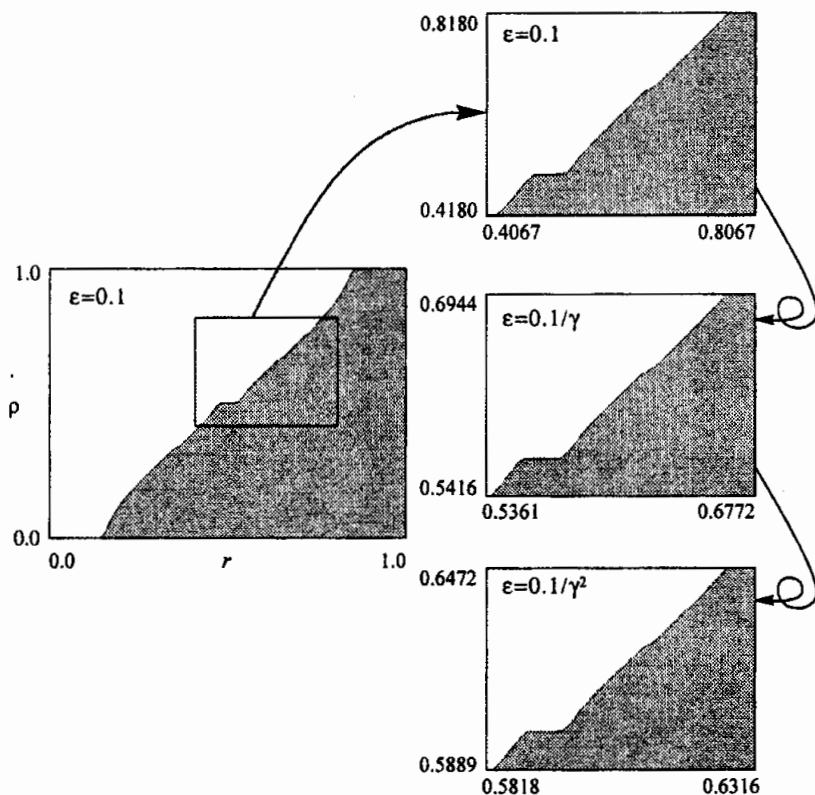


Рис. 9. Иллюстрация скейлинга в присутствии шума на примере структуры «чертовой лестницы» около критической точки золотое среднее. Главная диаграмма и первый увеличенный фрагмент соответствуют уровню шума  $\varepsilon = 0.1$ . Последующие фрагменты в порядке, обозначенным стрелками, построены для интенсивностей шума  $\varepsilon = 0.1/\gamma$  и  $\varepsilon = 0.1/\gamma^2$ , соответственно

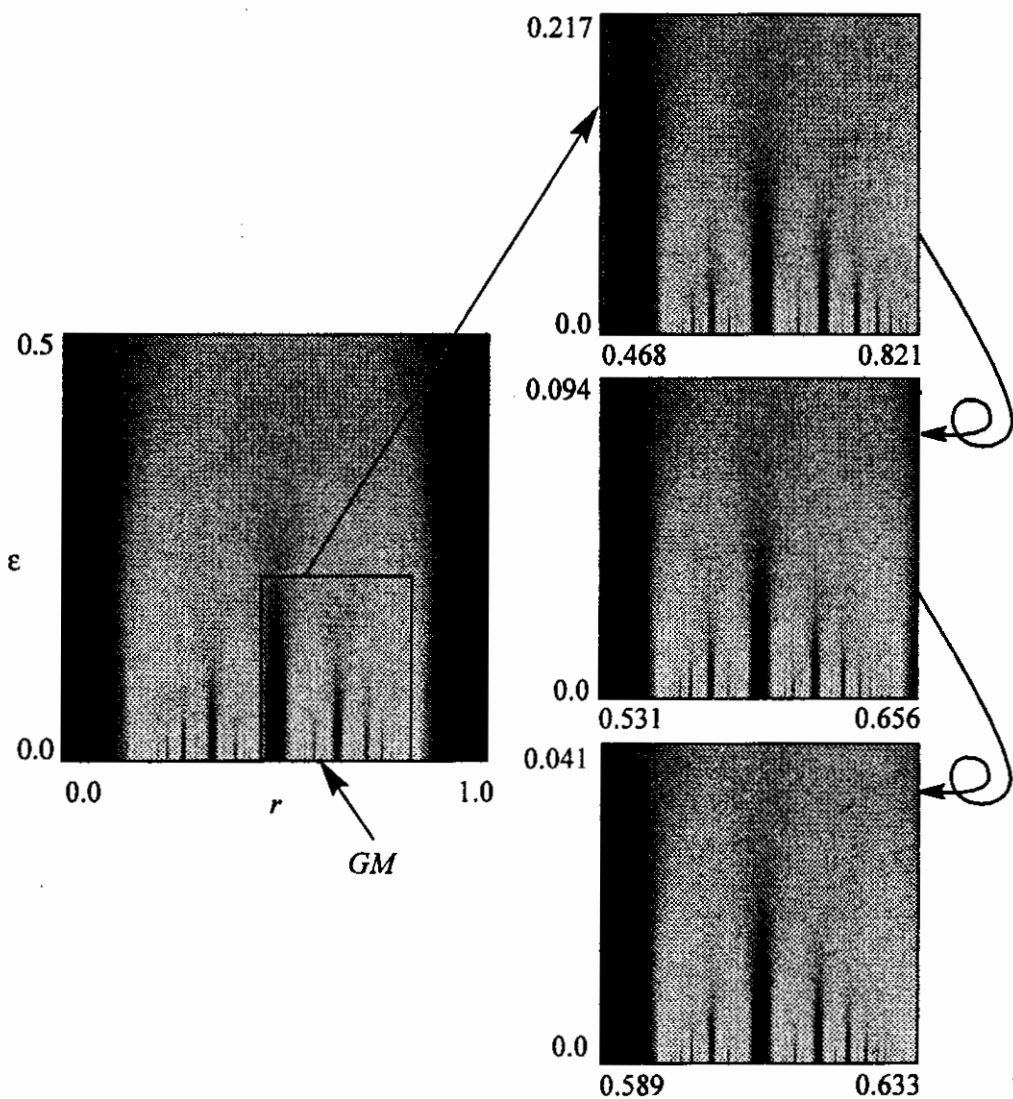


Рис. 10. Ляпуновские карты на плоскости параметра  $r$  и амплитуды шума  $\epsilon$ , демонстрирующие скейлинг в окрестности критической точки GM при фиксированном критическом значении параметра  $K = 1$ . Горизонтальные и вертикальные масштабы в последовательности диаграмм, порядок которых обозначен стрелками, меняются соответственно на факторы  $\delta_1 = -2.8336$  и  $\gamma = 2.30618$ . Одновременно на каждом новом уровне увеличения переопределяется кодирование серой гаммы цветов, чтобы сделать подобие ясно видимым

области соответствуют маленьким отрицательным значениям показателя Ляпунова. Это области «шумовой квазипериодичности».

В заключение рассмотрим случай, когда варьируются два управляющих параметра  $r$  и  $K$ . Исследуем скейлинговые свойства структуры языков Арнольда в случае отсутствия и наличия шума. На рис. 11 большая диаграмма и первый увеличенный фрагмент карты Ляпунова для части плоскости параметров представлены для амплитуды шума  $\epsilon = 0$ . Параллелограмм на главной диаграмме образован координатными линиями скейлинговых координат (24); критическая точка GM расположена точно

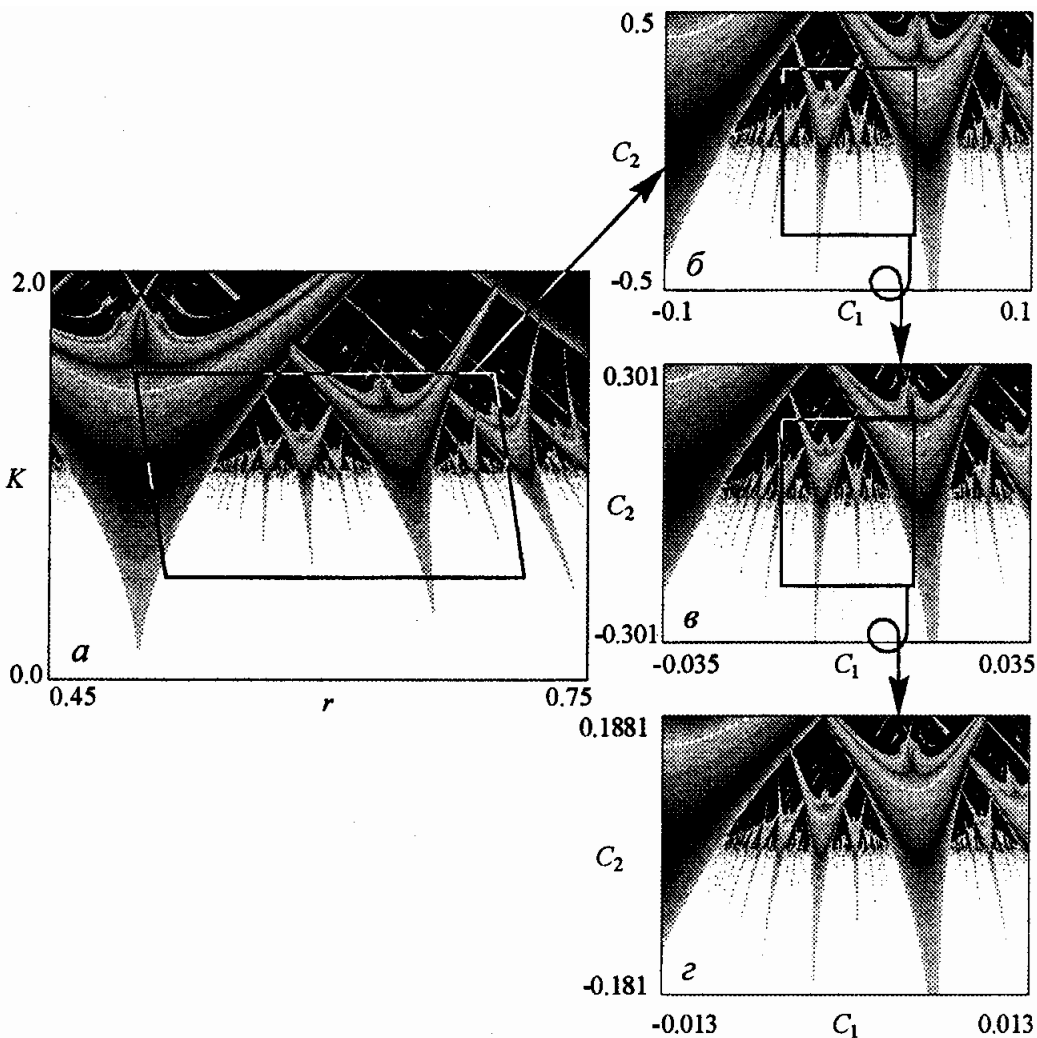


Рис. 11. Иллюстрация свойства скейлинга на ляпуновских картах в окрестности критической точки золотое среднее GM в отсутствие шума. Правило кодирования цветов то же, что и на рис. 1. Главная диаграмма  $a$  нарисована в координатах  $(r, K)$ . Внутренняя часть выделенного параллелограмма показана отдельно  $b$  в скейлинговых координатах  $(C_1, C_2)$ . На фрагментах  $b$  и  $c$  горизонтальный и вертикальный масштабы последовательно изменены на факторы  $\delta_1 = -2.8336\dots$  и  $\delta_2 = 1.66042\dots$ , соответственно. Кодирование цветов переопределено на каждом новом уровне увеличения

в середине параллелограмма. Его внутренняя часть показана в первом увеличенном фрагменте в скейлинговых координатах. Следующие фрагменты представляют собой все меньшие и меньшие окрестности критической точки при последующем пересчете масштаба. Аналогичная процедура проделана в присутствии шума, начальная интенсивность которого задана параметром  $\varepsilon = 0.03$  (рис.12). В этом случае для наблюдения самоподобия необходимо не только пересчитывать масштабы по осям  $r$  и  $K$ , но и уменьшать интенсивность шума на фактор  $\gamma$ . Легко видеть замечательное сходство картинок, полученных на нескольких шагах пересчета масштабов.

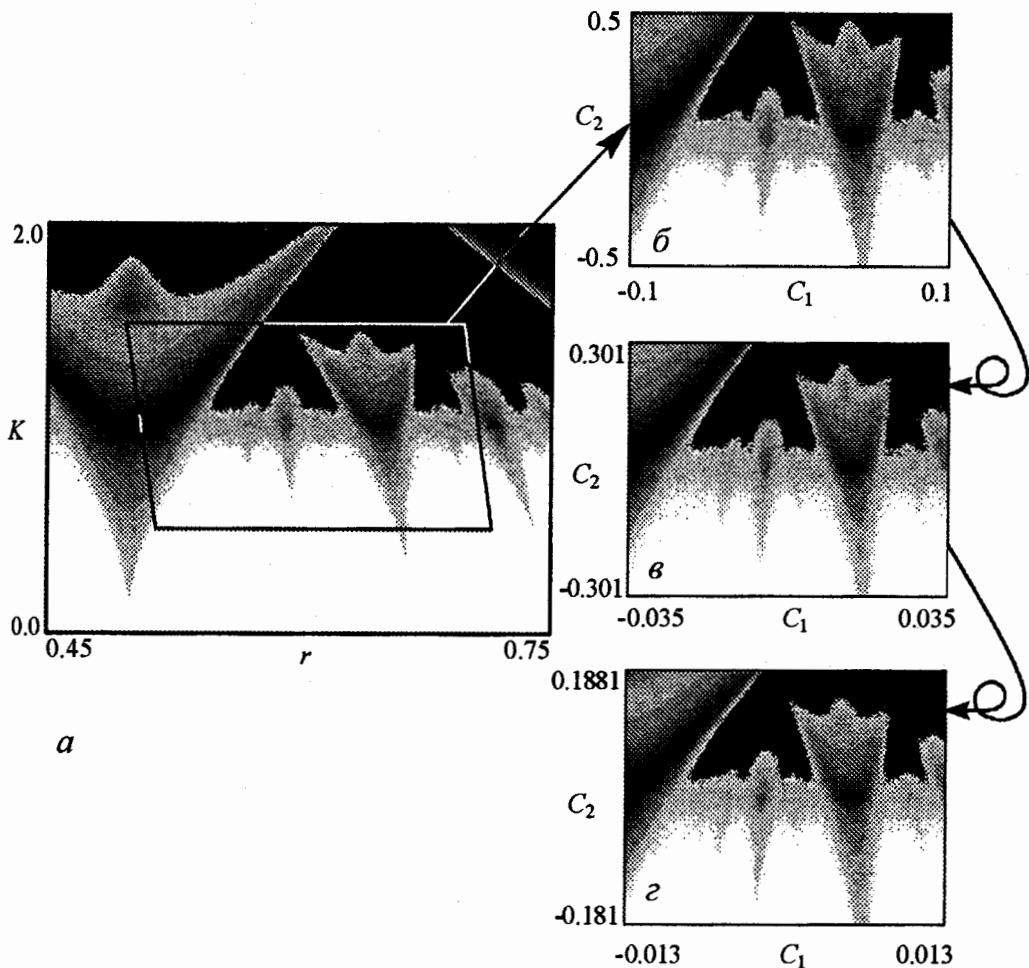


Рис. 12. Ляпуновские карты с шумом, демонстрирующие скейлинг в окрестности критической точки типа GM. Главная диаграмма *a*, нарисованная в координатах  $(r, K)$ , соответствует уровню шума  $\epsilon = 0.03$ . Внутренняя часть выделенного параллелограмма показана отдельно *b* в скейлинговых координатах  $(C_1, C_2)$ . На фрагментах *b* и *z*, помимо изменения горизонтального и вертикального масштаба, уменьшен уровень шума на фактор  $\gamma = 2.30618$  и  $\gamma^2 = 5.31849$ , соответственно

### Заключение

В работе рассмотрены закономерности скейлинга, связанные с влиянием аддитивного шума на динамику модельной системы, описываемой отображением окружности в окрестности критической точки перехода к хаосу через квазипериодическое движение с числом вращения, равным золотому среднему. На основании ренорм-группового подхода сформулирован ряд скейлинговых соотношений, выполнение которых продемонстрировано в численных экспериментах. В частности, мы обращаем внимание на размывание тонкой структуры критической орбиты из-за присутствия шума, самоподобной структуры «чертовой лестницы», расположение «шумовых языков Арнольда» – областей динамики, близкой к периодической, на ляпуновских картах на плоскости параметров около критической точки GM.



Ожидается, что обнаруженные закономерности останутся в силе не только для отображения окружности, но и для всего класса универсальности, который это отображение представляет. Основанием для этого утверждения служат результаты ре-нормгруппового анализа. В частности, указанные особенности будут свойственны автогенераторам и ротаторам под внешним периодическим воздействием, переходам Джозефсона в микроволновой области, конвекции жидкости под внешним воздействием и т.д. Как ожидается, полученные результаты будут полезны для экспериментальных исследований, имеющих своей целью наблюдение и исследование сложного поведения на пороге хаоса в классе систем различной физической природы, демонстрирующих переход к хаосу через квазипериодические движения.

*Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант №03-02-16074), совместного российско-германского гранта РФФИ - ННИО (№04-02-04011), Научно-образовательного центра нелинейной динамики и биофизики при Саратовском государственном университете (грант REC-006) и ФЦНТП (шифр работы № 2005-РИ-19.0/002/304).*

### Библиографический список

1. *Hamm A., Graham R.* Scaling for small random perturbations of golden critical circle maps // *Phys. Rev. A.* 1992. Vol. 46, № 10. P. 6323–6333.
2. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988.
3. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Курс лекций. М.: Физматлит, 2001.
4. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
5. *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.Л.* Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987.
6. *Glass L., Sun J.* Periodic forcing of a limit cycle oscillator: Fixed points, Arnold tongues, and the global organization of bifurcations // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 50. P. 5077–5084.
7. *Anishchenko V.S.* Dynamical Chaos – Models and Experiments. Appearance, Routes and Structure of Chaos in Simple Dynamical Systems // World Scientific, Singapore, 1995.
8. *Bak P., Bohr T., Jensen M.H., Christiansen P.V.* Josephson junctions and circle maps // *Solid State Communications.* 1984. Vol. 51, № 4. P. 231–234.
9. *Bohr T., Bak P., Jensen M.H.* Transition to chaos by interaction of resonances in dissipative systems. II. Josephson junctions, charge-density waves, and standard maps // *Phys. Rev. A.* 1984. Vol. 30, № 4. P. 1970–1981.
10. *Alstrøm P., Christiansen B., Hyldgaard P., Levinsen M.T., Rasmussen R.* Scaling relations at the critical line and the period-doubling route for the sine map and the driven damped pendulum // *Phys. Rev. A.* 1986. Vol. 34, № 3. P. 2220–2233.
11. *Arnold V.I.* Cardiac arrhythmias and circle mappings // *Chaos.* 1991. Vol. 1, № 1. P. 20–24.
12. *Glass L., Guevara M.R., Shrier A., Perez R.* Bifurcation and chaos in a periodically stimulated cardiac oscillator // *Physica D.* 1983. Vol. 7. P. 89–101.

13. *Feigenbaum M.J., Kadanoff L.P., Shenker S.J.* Quasiperiodicity in dissipative systems: A renormalization group analysis // *Physica D.* 1982. Vol. 5. P. 370–386.
14. *Ostlund S., Rand D., Sethna J., Siggia E.D.* Universal properties of the transition from quasi-periodicity to chaos in dissipative systems // *Physica D.* 1983. Vol. 8. P. 303–342.
15. *Feigenbaum M.J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // *J. Stat. Phys.* 1978. Vol. 19, № 1. P. 25–52.
16. *Feigenbaum M.J.* The universal metric properties of nonlinear transformations // *J. Stat. Phys.* 1979. Vol. 21, № 6. P. 669–706.
17. *Feigenbaum M.J.* Universal behavior in nonlinear systems // *Physica D.* 1983. Vol. 7, № 1-3. P. 16–39.
18. *Greene J.M., MacKay R.S., Vivaldi F., Feigenbaum M.J.* Universal behaviour in families of area-preserving maps // *Physica D.* 1981. Vol. 3, № 3. P. 468–486.
19. *Вул Е.Б., Синай Я.Г., Ханин К.М.* Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм // *УМН.* 1984. Т. 39, № 3. С. 3–37.
20. *Mao J.-M., Greene J.M.* Renormalization of period-doubling in symmetric four-dimensional volume-preserving maps//*Phys. Rev. A.* 1987. Vol. 35, № 9. P. 3911–3917.
21. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* A variety of period-doubling universality classes in multi-parameter analysis of transition to chaos // *Physica D.* 1997. Vol. 109. P. 91–112.
22. *Hu B., Rudnik J.* Exact solution of the Feigenbaum renormalization group equations for intermittency // *Phys. Rev. Lett.* 1982. Vol. 48, № 24. P. 1645–1648.
23. *Hirsch J.E., Nauenberg M., Scalapino D.J.* Intermittency in the presence of noise: A renormalization group formulation // *Phys. Lett. A.* 1982. Vol. 87. P. 391.
24. *MacKay R.S.* A renormalization approach to invariant circles in area-preserving maps // *Physica D.* 1983. Vol. 7, № 1–3. P. 283–300.
25. *Wilbrink J.* New fixed point of the renormalisation operator associated with the recurrence of invariant circles in generic Hamiltonian maps // *Nonlinearity.* 1990. Vol. 3. P. 567–584.
26. *Гольберг А.И., Синай Я.Г., Ханин К.М.* Универсальные свойства для последовательностей бифуркаций утроения периода // *УМН.* 1983. Т. 38, № 1. С. 159–160.
27. *Cvitanovic P., Myrheim J.* Universality for period n-tuplings in complex mappings // *Phys. Lett. A.* 1983. Vol. 94. P. 329.
28. *Isaeva O.B., Kuznetsov S.P.* On scaling properties of two-dimensional maps near the accumulation point of the period-tripling cascade // *Regular and Chaotic Dynamics.* 2000. Vol. 5, № 4. P. 459–476.
29. *Кузнецов С.П.* Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // *Известия вузов. Радиофизика.* 1985. Т. 28, № 8. С. 991–1007.
30. *Kook H., Ling F.H., Schmidt G.* Universal behavior of coupled nonlinear systems // *Phys. Rev. A.* 1991. Vol. 43, № 6. P. 2700–2708.
31. *Kim S.-Y.* Universality of period doubling in coupled maps // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49. P. 1745–1748.
32. *Stavans J., Heslot F., Libchaber A.* Fixed winding number and the quasiperiodic route to chaos in a convective fluid//*Phys. Rev. Lett.* 1985. Vol. 55, № 6. P. 596–599.

33. *Jensen M. H., Kadanoff L. P., Libchaber A., Procaccia I., Stavans J.* Glodal universality at the onset of chaos: Results of a forced Rayleigh – Benard experiment // *Phys. Rev. Lett.* 1985. Vol. 55, № 25. P. 2798–2801.
34. *Su Z., Rollins R.W., Hunt E.R.* Measurements of  $f(\alpha)$  spectra of attractors at transitions to chaos in driven diode resonator systems // *Phys. Rev. A.* 1987. Vol. 36, № 7. P. 3515–3517.
35. *Kajanto M.J., Salomaa M.M.* Effects of external noise on the circle map and the transition to chaos in Josephson junctions // *Solid State Communications.* 1985. Vol. 53, № 1. P. 99–106.
36. *Crutchfield J.P., Nauenberg M., Rudnik J.* Scaling for external noise at the onset of chaos // *Phys. Rev. Lett.* 1981. Vol. 46, № 14. P. 933–935.
37. *Shraiman B., Wayne C.E., Martin P.C.* Scaling theory for noisy period-doubling transitions to chaos // *Phys. Rev. Lett.* 1981. Vol. 46, № 14. P. 935–939.
38. *Györgyi G., Tishby N.* Scaling in stochastic Hamiltonian systems: A renormalization approach // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol. 58, № 6. P. 527–530.
39. *Kapustina J.V., Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Mosekilde E.* Scaling properties of bicritical dynamics in unidirectionally coupled period-doubling systems in presence of noise // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 64. 066207 (12 pages).
40. *Györgyi G., Tishby N.* Path integrals in Hamiltonian systems: breakup of the last Kolmogorov-Arnold-Moser torus due to random forces // *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol. 62. № 4. P. 353–356.
41. *Isaeva O.B., Kuznetsov S.P., Osbaldestin A.H.* Effect of noise on the dynamics of a complex map at the period-tripling accumulation point // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol. 69, 036216 (6 pages).
42. *Markosova M., Markos P.* Numerical studies of the noisy sine circle map // *Phys. Lett. A.* 1989. Vol. 136, № 7, 8. P. 369–373.
43. *Dixon T.W., Gherghetta T., Kenny B.G.* Universality in the quasiperiodic route to chaos // *Chaos.* 1996. Vol. 6, № 1. P. 32–42.
44. *De la Llave R., Petrov N.P.* Regularity of conjugacies between critical circle maps: An experimental study // *Experimental Mathematics.* 2002. Vol. 11. P. 219–242.
45. *Rössler J., Kiwi M., Hess B., Marcus M.* Modulated nonlinear processes and a novel mechanism to induce chaos // *Phys. Rev. A.* 1989. Vol. 39, № 11. P. 5954–5960.
46. *Marcus M., Hess B.* Lyapunov exponents of the logistic map with periodic forcing // *Computers and Graphics.* 1989. Vol. 13, № 4. P. 553–558.
47. *Bastos de Figueireido J.C., Malta C.P.* Lyapunov graph for two-parameter map: Application to the circle map // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 1998. Vol. 8, № 2. P. 281–293.
48. *Kuznetsov A.P., Savin A.V.* About the typical structures and chaos border in the parameter plane of non-autonomous discrete maps with period-doubling // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* 2002. Vol. 5, № 3. P. 296–301.
49. *Fiel D.* Scaling for period-doubling sequences with correlated noise // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1987. Vol. 20. P. 3209–3217.
50. *Choi S.-Y., Lee E.K.* Scaling behavior at the onset of chaos in the logistic map driven by colored noise // *Phys. Lett. A.* 1995. Vol. 205. P. 173–178.

51. *Ivankov N.Yu., Kuznetsov S.P.* Complex periodic orbits, renormalization, and scaling for quasiperiodic golden-mean transition to chaos // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 63. 046210 (10 pages).
52. *Crutchfield J.P., Farmer J.D., Huberman B.A.* Fluctuations and simple chaotic dynamics // *Phys. Rep.* 1982. Vol. 92, № 2. P. 45–82.
53. *Jensen M.H., Bak P., Bohr T.* Transition to chaos by interaction of resonances in dissipative systems. I. Circle maps // *Phys. Rev. A.* 1984. Vol. 30, № 4. P. 1960–1969.
54. *Alstrøm P., Levinsen M.T., Rasmussen D.R.* Scaling exponents, relations, and order dependence for circle maps // *Physica D.* 1987. Vol. 26. P. 336–346.

Саратовский филиал Института  
радиотехники и электроники РАН  
Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 18.04.2005  
После доработки 15.06.2005

## ABOUT SCALING PROPERTIES IN THE NOISY CIRCLE MAP AT THE GOLDEN-MEAN WINDING NUMBER

*A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, J.V. Sedova*

Scaling regularities are examined associated with effect of additive noise upon a critical circle map at the golden-mean winding number. On a basis of the RG approach of Hamm and Graham [1] we present an improved numerical estimate for the scaling constant responsible for the effect of noise,  $\gamma = 2.3061852653\dots$ . Decrease of the noise amplitude by this number ensures possibility of observation for one more level of fractal-like structure associated with increase of characteristic time scale by factor  $(\sqrt{5} + 1)/2$ . Numeric results demonstrating evidence of the expected scaling are presented, e.g. portraits of the noisy attractors, devil's staircase plots, and Lyapunov charts.

*Кузнецов Сергей Петрович* – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). С 1988 – сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, в настоящее время заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор кафедры динамических систем. Автор учебно-научной монографии «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 150 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под руководством С.П. Кузнецова защищены шесть кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994-1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член-корреспондент РАЕН. Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».



*Кузнецов Александр Петрович* – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СО ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и заочной школы факультета нелинейных процессов. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лицея прикладных наук СГУ, шести учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). Член редколлегии журнала «Империя математики». E-mail: [alkuz@sgu.ru](mailto:alkuz@sgu.ru); [www.sgtnd.tserv.ru](http://www.sgtnd.tserv.ru)



*Седова Юлия Викторовна* – родилась в 1979 году. Окончила Саратовский государственный университет (2001). Кандидат физико-математических наук (СГУ, 2004), старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Научные интересы – влияние шума на динамические системы, дискретные отображения, связанные системы, динамический хаос. Автор 7 статей в отечественной и зарубежной печати.