

УДК 621.385.633

## ТЕОРИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЛОВ\*

*Н. С. Гинзбург, С. П. Кузнецов, Т. Н. Федосеева*

Оценена длительность линейной стадии переходного процесса в релятивистской ЛОВ в предположении, что сигнал возникает из спектральных составляющих излучения фронта электронного пучка и флуктуаций плотности заряда (дробовой эффект) в полосе синхронизма. Показано, что на нелинейной стадии при малом превышении электронного тока над стартовым значением амплитуда сигнала, достигнув максимума, начинает совершать затухающие колебания, что приводит к установлению стационарного режима. При токе, существенно превосходящем стартовый (в случае ЛОВ с малым КПД — в 3,25 раза), устанавливается более сложный автоколебательный режим, в котором амплитуда выходного сигнала модулирована с периодом, соответствующим времени прохождения электронами и волной (с групповой скоростью) длины лампы. Эта модуляция, имеющая первоначально синусоидальный характер, по мере увеличения тока приобретает вид последовательности острых пиков, а затем теряет периодичность.

После появления сильноточных ускорителей электронов [1] большое внимание уделяется созданию ЛОВ с интенсивными релятивистскими электронными пучками [2, 3]. Поскольку длительность импульсов, вырабатываемых такими ускорителями, достаточно мала ( $\sim 10$ — $100$  нс) и сравнима с длительностью процесса установления колебаний (см. разд. 4), применение нестационарной нелинейной теории для оценки основных параметров генератора является принципиально важным. Следует особо отметить существенное влияние на длительность переходного процесса уровня начального толчка, приводящего к возникновению автоколебаний. По-видимому, в ультрарелятивистских ЛОВ роль такого толчка играет излучение резкого фронта электронного потока.

Далее, определенное практическое значение имеет анализ таких сугубо нестационарных режимов обычных, слаборелятивистских ЛОВ, как генерация и усиление импульсов, сверхрегенеративное усиление и т. п. Укажем, наконец, что ЛОВ — это пример распределенной системы, в которой в принципе возможны очень своеобразные режимы автоколебаний наряду с тривиальным одночастотным (см. п. 5). Исследование таких режимов интересно как с точки зрения их возможного применения на практике, так и для теории распределенных автоколебательных систем.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Исследуемая модель ЛОВ (рис. 1) представляет собой согласованный на концах отрезок периодического волновода длины  $L$ , который пронизывается электронным пучком, имеющим на входе скорость  $v_0$ . Пучок направляется достаточно сильным продольным магнитным полем, так что поперечные смещения электронов отсутствуют. Эффектив-

\* В данной работе будет рассматриваться только ЛОВ типа О.

ное взаимодействие пучка с полем обратной волны возможно в том случае, если какая-нибудь ее пространственная гармоника имеет фазовую скорость, близкую к скорости электронов. Предположим, что в области пучка продольное электрическое поле этой гармоники можно представить в виде

$$E = \operatorname{Re} \{ \tilde{E}(x, t) \exp [i \Omega (t - x/v_0)] \}, \quad (1)$$

где частота  $\Omega$  определяется из уравнения

$$v_\phi(\Omega) = v_0, \quad (2)$$

а медленно меняющаяся комплексная амплитуда волны  $\tilde{E}(x, t)$  удовлетворяет условию

$$\left| \frac{1}{\Omega \tilde{E}} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} \right| \ll 1. \quad (3)$$

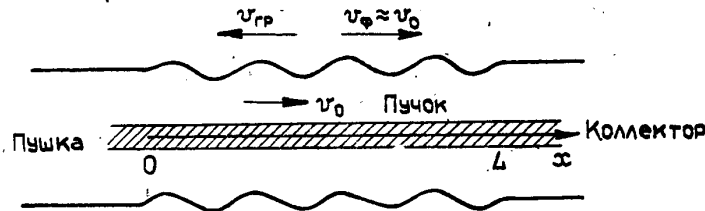


Рис. 1. Схематическое изображение релятивистской ЛОВ.

В этом случае на основании результатов работ [4, 5] можно показать (Приложение 1), что для величины  $\tilde{E}(x, t)$  справедливо уравнение возбуждения в следующей форме:

$$\frac{1}{v_{гр}} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} = - \frac{\beta^2 K}{2} \tilde{I}, \quad (4)$$

где  $v_{гр}$  — абсолютная величина групповой скорости,  $K$  — сопротивление связи пространственной гармоники на частоте  $\tilde{\Omega}$ ,  $\beta = \Omega/v_0$ ,

$$\tilde{I} = \frac{\Omega}{\pi} \int_t^{t + \frac{2\pi}{\Omega}} I(x, t) e^{-i(\Omega t - \beta x)} dt \quad (5)$$

— медленно меняющаяся комплексная амплитуда тока  $I$ . Уравнение (4) следует дополнить граничным условием на коллекторном конце волновода, выражающим отсутствие входного сигнала:

$$\tilde{E}|_{x=L} = 0. \quad (6)$$

Перейдем теперь к анализу движения электронов в поле волны (1) и расчету создаваемого ими конвекционного тока, пренебрегая влиянием поля пространственного заряда. Предположим, что, начиная с момента  $t=t_1$ , ток пучка на входе в волновод постоянен и равен  $I_0$ . Рассмотрим группу электронов, влетевших в пространство взаимодействия за время от  $t' \geq t_1$  до  $t' + 2\pi\Omega^{-1}$ . Считая на основании (3), что

все эти электроны движутся в поле одинаковой амплитуды  $\tilde{E}\left(x, t' + \frac{x}{v_0}\right)$ , получим

$$\frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial x} = \frac{e}{mc^2} \operatorname{Re} \left[ \tilde{E}\left(x, t' + \frac{x}{v_0}\right) e^{i\theta_\alpha} \right]; \quad (7)$$

$$\frac{\partial \theta_\alpha}{\partial x} = \frac{\Omega}{v(\gamma_\alpha)} - \frac{\Omega}{v_0}; \quad (8)$$

$$\gamma_\alpha |_{x=0} = \gamma_0, \quad \theta_\alpha |_{x=0} = \alpha, \quad (9)$$

где  $e$  и  $m$  — заряд и масса покоя электрона, индексом  $\alpha$  отмечены величины, которые относятся к электрону, попавшему в момент влета в фазу  $\alpha = \omega t'_\alpha$ ,  $\gamma_\alpha = \left(1 - \frac{v_\alpha^2}{c^2}\right)^{-1/2}$  — отношение полной энергии к энергии покоя,  $\theta_\alpha = \Omega\left(t - \frac{x}{v_0}\right)$  — текущая фаза относительно волны.

Заметим, что каждая группа движется в поле, наведенном электронами, влетевшими при  $t < t'$  и, в свою очередь, вносит в него некоторое возмущение. Для первой из рассматриваемых нами групп  $t' = t_1$ , и поле, которое на нее действует, естественно задать в качестве начального условия

$$\tilde{E}\left(x, t_1 + \frac{x}{v_0}\right) = \tilde{E}^0(x). \quad (10)$$

Вид функции  $\tilde{E}^0(x)$  пока конкретизировать не будем.

Используя формулу (5) и закон сохранения заряда  $Idt = I_0 \left| \frac{d\alpha}{\Omega} \right|$ , найдем выражение для комплексной амплитуды первой гармоники сгруппированного тока, который создается в сечении  $x$ , когда туда приходит рассматриваемая нами группа электронов (т. е. в момент  $t = t' + \frac{x}{v_0}$ ):

$$\tilde{I}(x, t') = \frac{I_0}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta_\alpha(x, t')} d\alpha. \quad (11)$$

Уравнение возбуждения (4) в переменных  $\left(x, t' = t - \frac{x}{v_0}\right)$  с учетом (11) принимает форму

$$\left(\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_{\text{гп}}}\right) \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t'} - \frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} = -\frac{\beta^2 K I_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta_\alpha(x, t')} d\alpha, \quad (12)$$

причем граничное условие вида (6) остается в силе.

Перейдем в полученных соотношениях (6)–(10) и (12) к безразмерным величинам

$$\zeta = \beta Cx, \quad l = \beta CL, \quad \tau = \Omega C(t' - t_1) \left(1 + \frac{v_0}{v_{\text{гп}}}\right)^{-1}, \quad (13)$$

$$\nu = 2C (\gamma_0^2 - 1), \quad F = \frac{\tilde{E}}{\beta u_0 C^2 \gamma_0 (1 + \gamma_0)}, \quad C = \sqrt[3]{\frac{I_0 K}{2u_0 \gamma_0 (1 + \gamma_0)}},$$

где  $u_0 = \frac{mc^2}{e}(\gamma_0 - 1)$  — ускоряющее напряжение,  $C$  — модифицированный параметр усиления, который будем считать малым ( $C \ll 1$ ). Тогда условие медленности изменения амплитуды волны (3) выполнено, если производная  $\partial F / \partial \tau$  не слишком велика по сравнению с единицей. В результате замены (13) имеем

$$\frac{\partial^2 \theta_\alpha}{\partial \zeta^2} = - \left( 1 + \nu \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \zeta} \right)^{3/2} \operatorname{Re} (F e^{i \theta_\alpha}); \quad (14)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial \zeta} = - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i \theta_\alpha} d\alpha; \quad (15)$$

$$\theta|_{\zeta=0} = \alpha, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = 0, \quad F|_{\zeta=l} = 0, \quad F|_{\zeta=0} = F^0(\zeta), \quad (16)$$

где уравнение (14) получено из (7) и (8) с использованием малости  $C$ .

Выражение для КПД генератора в режиме стационарных колебаний (амплитуда сигнала на выходе лампы  $|F|_{\zeta=0}$  постоянна) в принятой нормировке имеет вид

$$\eta = \frac{C (\gamma_0 + 1) \gamma_0}{4} |F|_{\zeta=0}^2. \quad (17)$$

Отсюда ясно, что в слаборелятивистском случае ( $\gamma_0 \sim 1$ ) система (14) — (16) применима только для генераторов с малым КПД, поскольку из условия  $C \ll 1$  следует  $\eta \ll 1$ . Напротив, в ультрарелятивистском случае уравнения справедливы и для генераторов с высоким КПД, так как малость  $C$  в формуле (17) может компенсироваться большим параметром  $\gamma_0^2$ . Дело в том, что при выводе (14) — (16) мы требовали малого изменения скорости электронов. В слаборелятивистском случае это требование неизбежно ведет к малому КПД, тогда как в случае ультрарелятивистской скорости электронов и при малом изменении скорости изменение энергии электронов может быть значительным.

## 2. О НЕКОТОРЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ПЕРЕХОДАХ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ ЛОВ

Установим соответствие выведенных уравнений с известными результатами теории ЛОВ в некоторых предельных случаях.

1) В режиме слабого сигнала ( $F \ll 1$ ) представим  $\theta_\alpha$  в виде  $\alpha + \vartheta_\alpha$ , где  $\vartheta_\alpha \ll 1$ . Тогда, обозначая

$$J = - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \vartheta_\alpha e^{-i\alpha} d\alpha, \quad (18)$$

из соотношений (14) — (16) можно получить

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \zeta^2} = F, \quad \frac{\partial F}{\partial \zeta} - \frac{\partial F}{\partial \tau} = iJ; \quad (19)$$

$$J|_{\tau=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial J}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = 0, \quad F|_{\zeta=l} = 0, \quad F|_{\tau=0} = F^0(\zeta). \quad (20)$$

Если теперь искать решение системы (19) с граничными условиями (20) в форме

$$J = \hat{J}(\zeta) e^{x\tau}, \quad F = \hat{F}(\zeta) e^{x\tau},$$

то приходим к уравнению для комплексного параметра  $x$ , которое аналогично найденному ранее в [6] (в обозначениях [6]  $x = \gamma \left( 1 + \frac{v_0}{v_{гр}} \right) - ib$ , см. также [8]):

$$\begin{vmatrix} e^{\delta_1 l} & e^{\delta_2 l} & e^{\delta_3 l} \\ \delta_1^{-1} & \delta_2^{-1} & \delta_3^{-1} \\ \delta_1^{-2} & \delta_2^{-2} & \delta_3^{-2} \end{vmatrix} = 0, \quad (21)$$

где  $\delta_{1, 2, 3}$  — корни кубического уравнения  $\delta^2 (\delta - x) = i$ .

Уравнение (21) имеет бесконечное (счетное) множество корней, которые можно пронумеровать в порядке убывания их действительных частей. Каждому корню  $x_k$  отвечают собственные функции  $\hat{J}_k(\zeta)$  и  $\hat{F}_k(\zeta)$ , причем, как нетрудно проверить, при соответствующей нормировке выполняются соотношения ортогональности\*:

$$\int_0^l \hat{F}_k(\zeta) \hat{F}_n(l - \zeta) d\zeta = \delta_{kn}. \quad (22)$$

Используя (22), можно показать, что решение начальной задачи (19) — (20) представляет собой суперпозицию собственных типов колебаний (мод), для каждого из которых характерна определенная комплексная частота  $\Omega_k = \Omega (1 - C x_k)^{**}$ :

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \tilde{J}_k(\zeta) e^{x_k \tau}, \quad F = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \hat{F}_k(\zeta) e^{x_k \tau}, \quad (23)$$

где

$$C_k = \int_0^l F^0(\zeta) \hat{F}_k(l - \zeta) d\zeta. \quad (24)$$

Моду, для которой действительная часть корня максимальна, назовем основной ( $k=1$ ). Очевидно, именно она определяет асимптотическое поведение решения практически при любых начальных условиях:

$$J \sim C_1 \hat{J}_1(\zeta) e^{x_1 \tau}, \quad F \sim C_1 \hat{F}_1(\zeta) e^{x_1 \tau} \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Известно, что основная мода становится нарастающей ( $\text{Re } x_1 > 0$ ) при  $l > 1,974$ , а вторая мода — при  $l > 3,70$ . Зависимость  $x_1$  от  $l$  исследо-

\* Для простоты не рассматриваются возможно существующие исключительные значения  $l$ , при которых (21) имеет кратные корни.

\*\* Возможность представления решения в виде сходящихся рядов (23) доказывается методами, изложенными в [12], по крайней мере, для случая, когда функция  $F^0(\zeta)$  дифференцируема на отрезке  $[0, l]$ , причем  $F^0(l) = 0$ . Заметим, однако, что для дальнейшего нам понадобится не это, довольно сильное, утверждение, а лишь соотношения (25) и (24) (при  $k=1$ ), которые могут быть получены как очевидные следствия теоремы об аналитических свойствах функции Грина линейной краевой задачи [12].

ввалась в [6]. Полученные там численные результаты хорошо аппроксимируются формулой

$$\chi_1 = 1,8 (1 - 1/\sqrt{m}) - 0,95i (1 + 0,6/\sqrt{m}),$$

где  $m = I_0/I_{ст1} \approx 0,13 l^3$ ,  $I_{ст1}$  — стартовый ток основной моды. При  $1 \leq m \leq 4$  ошибка составляет не более 1%.

2) В случае ЛОВ с малым КПД ( $v \ll 1$ ) система (14) — (16) совпадает с уравнениями, выведенными в [5], если пренебречь в (14) членом, содержащим  $v$ . Если, кроме того,  $\gamma_0 \rightarrow 1$ , то формулы (13) также переходят в соответствующие формулы нерелятивистской теории [5, 7].

3) Посредством замены переменных

$$\zeta' = \frac{\zeta}{v}, \quad \tau' = \frac{\tau}{v}, \quad \varepsilon_\alpha = \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_0} = \left(1 + \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \zeta'}\right)^{-1/2}, \quad A = \frac{v^2 F}{2}, \quad I = \frac{v^3}{2\pi} \quad (26)$$

преобразуем систему (14) — (16) к виду

$$\frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \zeta'} = \varepsilon_\alpha^{-2} - 1, \quad \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial \zeta'} = \operatorname{Re} (A e^{i\theta_\alpha}); \quad (27)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \tau'} - \frac{\partial A}{\partial \zeta'} = -I \int_0^{2\pi} e^{-i\theta_\alpha} d\alpha; \quad (28)$$

$$\theta_\alpha |_{\zeta'=0} = \alpha, \quad \varepsilon_\alpha |_{\zeta'=0} = 1, \quad A |_{\zeta'=l'} = 0, \quad A |_{\tau'=\tau_1} = A^0(\zeta). \quad (29)$$

Если искать стационарное решение системы (27) — (29) в форме  $A = A' e^{i(1-B)(\tau'+\zeta')}$ ,  $\theta_\alpha = \theta'_\alpha - (1-B)(\tau'+\zeta')$ , то для величин  $A'$ ,  $\theta'_\alpha$ ,  $\varepsilon_\alpha$  получаем уравнения работы [2], причем в ультрарелятивистском пределе ( $\gamma_0 \gg 1$ ) нормировка (см. (13) и (26)) совпадает с принятой в [2].

### 3. ЛИНЕЙНАЯ СТАДИЯ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В ЛОВ

Ограничимся случаем, когда время нарастания тока пучка  $I(t)$  от нуля до стационарного значения  $I_0$  мало по сравнению с полным временем установления колебаний. Используя общее асимптотическое представление решения (25), можно оценить продолжительность переходного процесса снизу по формуле

$$t_{уст} \gtrsim t'_{уст} = \frac{1 + \frac{v_0}{v_{гр}}}{\Omega C \operatorname{Re} \chi_1} \ln |F_{ст}/F_H|, \quad (30)$$

если известен уровень стационарного режима  $|F_{ст}|$  и начальная амплитуда основной моды  $|F_H|$ . Заметим, что для получения удовлетворительной оценки  $t'_{уст}$  достаточно найти лишь порядок величины  $\left|\frac{F_{ст}}{F_H}\right|$ , поскольку она входит в (30) под знаком логарифма. Поэтому далее положим  $|F_{ст}| \sim 1$  (см. [7, 2] и следующий раздел).

По-видимому, наиболее существенный вклад в  $|F_H|$  вносят шумовое излучение флуктуаций плотности (дробовой эффект) и излучение резкого фронта электронного пучка (фронт возникает, очевидно, при достаточно быстром изменении тока на входе и распространяется вдоль лампы со скоростью, близкой к  $v_0$ ). Сравним сначала значимость обоих эффектов. Будем считать, что при возникновении автоколебаний «затравкой» являются только спектральные составляющие излучения

в полосе синхронизма  $\Delta\Omega \sim \Omega C$ . В этом интервале частот энергия излучения фронта пропорциональна  $\left| I_\Omega \frac{\Delta\Omega}{2\pi} \right|^2$ , где  $I_\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} I(t) e^{-i\Omega t} dt$ ,

а энергия шумового излучения —  $\frac{1}{\pi} e I_0 \Delta\Omega$  в соответствии с формулой

Шоттки для среднего квадрата шумового тока. Следовательно, излучение фронта превалирует над шумами, если

$$|I_\Omega|^2 > \frac{4\pi e I_0}{\Omega C}. \quad (31)$$

При этом в качестве  $|F_n|$  можно принять амплитуду излучения фронта на частоте синхронизма (Приложение 2):

$$|F_n| \sim C \left| \frac{\Omega I_\Omega}{I_0} \right| \left( 1 + \frac{v_0}{v_{гр}} \right)^{-1} \sim C \left| \frac{\Omega I_\Omega}{I_0} \right|. \quad (32)$$

В противном случае, сопоставляя найденные выше соотношения, получим

$$|F_n| \sim \sqrt{\frac{4\pi e \Omega C}{I_0}}. \quad (33)$$

Приведем численный пример, используя для определенности значения параметров, характерные для ультрарелятивистской ЛОВ в режиме, близком к оптимальному по КПД [2]:  $l=2,2$ ,  $\nu=1,85$  (в обозначениях (26)  $l'=1,2$ ;  $I \approx 1$ );  $\gamma_0=4$ ,  $C=0,06$ ,  $\Omega=6 \cdot 10^{10} \text{ c}^{-1}$ ,  $I_0=10^4 \text{ A}$ ,  $v_0 \approx v_{гр} \approx c$ . Для данного значения  $l$  имеем  $\text{Re } \kappa_1 \approx 0,26$ . Будем считать, что ток пучка нарастает во времени, как показано на рис. 2, причем скачок тока на  $\Delta I$  происходит за время, малое по сравнению с  $\frac{2\pi}{\Omega}$

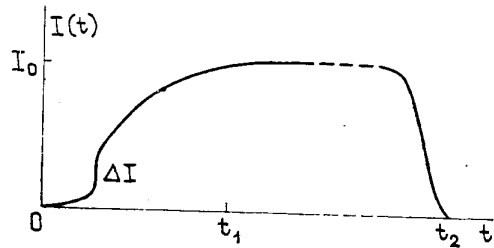


Рис. 2. Импульс электронного тока.

(физически скачок может быть связан с переходом от автоэлектронной к взрывной эмиссии). Пусть, далее, выполняются неравенства  $\frac{2\pi}{\Omega} \ll t_1 \ll$

$\ll t'_{уст} < t_2$ , где смысл  $t_{1,2}$  ясен из рисунка. Тогда основной вклад в спектр на частоте синхронизма  $\Omega$  дает участок скачка тока, т. е. можно положить  $|I_\Omega| \approx \Delta I / \Omega$ , а условие (31) принимает вид  $|\Delta I / I_0| >$

$$> \sqrt{\frac{4\pi e \Omega}{I_0 C}} \sim 1,4 \cdot 10^{-5}. \text{ В частности, при } \frac{\Delta I}{I_0} \sim 0,01, \text{ из (30) и (32)}$$

находим  $t'_{уст} \sim 16 \text{ нс}$ . Если по каким-либо причинам излучение фронта не оказывает заметного влияния на начало генерации (например, если излучение фронта успевает затухнуть до уровня шумов, прежде чем ток превысит стартовый), используя формулы (30) и (33), получим  $t'_{уст} \sim 30 \text{ нс}$ .

#### 4. НЕЛИНЕЙНАЯ СТАДИЯ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В ЛОВ

Установление колебаний в ЛОВ на нелинейной стадии исследовалось путем численного интегрирования уравнений на ЭВМ БЭСМ-4 конечно-разностным методом (Приложение 3).

Напомним (П.3), что если начальная амплитуда сигнала достаточно мала, зависимость амплитуды поля от времени обязательно содержит более или менее протяженный участок экспоненциального роста. Именно на этом участке можно, вообще говоря, «сшить» решение, полученное из линейной теории (возможно с учетом шумов) при  $t < t_1$  и из нелинейной при  $t \geq t_1$ . Поэтому общий характер процесса практически не зависит от конкретного вида начальных условий. При описываемых ниже расчетах эти условия задавались так\*:

$$F^0(\zeta) = \begin{cases} F_0 = \text{const}, & 0 \leq \zeta < 0,9l \\ F_0 \sin^2 \frac{5\pi}{l}(l - \zeta), & 0,9l \leq \zeta \leq l \end{cases} \quad (34)$$

ЛОВ с малым КПД ( $\nu \ll 1$ )\*\*. Для этого, наиболее простого, случая, когда динамика процесса определяется единственным безразмерным параметром длины лампы  $l$ , результаты расчетов представлены на рис. 3—6. Из рис. 3а видно, что если параметр  $l$  не слишком сильно превосходит стартовое значение, то переходный процесс заканчивается установлением стационарного режима, причем его амплитуда и поправ-

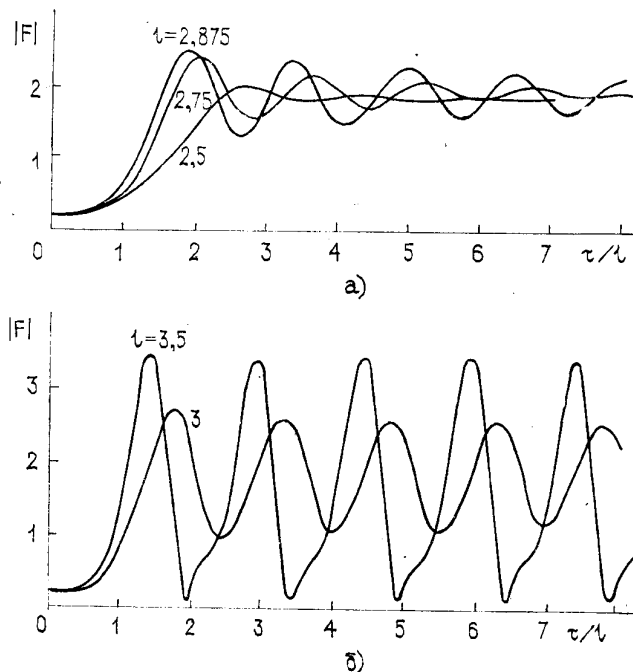


Рис. 3. Зависимость амплитуды выходного сигнала слаборелятивистской ЛОВ от времени в процессе установления колебаний при  $\nu \ll 1$ ,  $F_0 = 0,2$ .

\* Если начальным толчком для возникновения генерации служит скачок тока на фронте пучка, причем выполняется условие  $t_1 \ll L/v + L/v_{гр}$  (рис. 2), можно считать, что первая из рассмотренных в п. 1 групп электронов движется в заданном поле источника (фронта), излучающего навстречу пучку сигнал на частоте синхронизма  $\Omega$ . Начальные условия тогда можно задать непосредственно в виде поля постоянной амплитуды. При численном решении задачи их удобно, кроме того, согласовывать с граничными условиями, что и сделано при записи (34).

\*\* Характер нелинейной стадии переходного процесса в этом частном случае одинаков в слабо- и ультрарелятивистской ЛОВ.



ка к частоте синхронизма хорошо согласуются с найденными в [7]. Приближение системы к этому режиму носит характер затухающих осцилляций с периодом  $T \sim 1,5l$ ; декремент затухания оказывается тем меньше, чем больше  $l$ . Экстраполяция зависимости декремента от  $l$  (рис. 4) показывает, что он пройдет через нуль при  $l=2,92$ , после чего стационарный режим, по-видимому, становится неустойчивым относительно малых колебаний. Развитие этой неустойчивости должно приводить к возникновению нового своеобразного режима, который мы будем называть автомодуляцией выходного сигнала ЛОВ. Хотя в численном эксперименте нарастание малых колебаний не исследовалось (это потребовало бы специального задания начальных условий — распределения поля, соответствующего стационарному режиму с небольшими возмущениями)\*, сама автомодуляция действительно наблюдалась (рис. 3б). При небольшом превышении  $l$  над величиной 2,92 модуляция близка к синусоидальной, а при значительном — имеет вид последовательности высоких пиков. В режимах рис. 3б модуляция сохраняет период  $T \sim 1,5l$ . Соответствующий спектр выходного сигнала ЛОВ, очевидно, представляет собой набор эквидистантных линий, амплитуда которых убывает при удалении от основной составляющей.

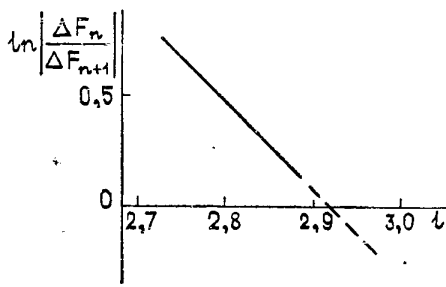


Рис. 4. Декремент затухания осцилляций около стационарного состояния: сплошная линия — по данным счета; пунктир — экстраполяция.

Заметим, что обычно возникновение многочастотных колебаний в ЛОВ связывалось с самовозбуждением второй моды линейной теории при  $l > 3,7$  и, соответственно, токе пучка  $I_0 > 6,3 I_{ст1}$  (см., например, [14]). Однако в свете сказанного выше ясно, что они появляются при значительно меньших токах (при  $l > 2,92$  и  $I_0 > 3,25 I_{ст1}$ ). При дальнейшем увеличении  $l$  автомодуляция становится неперiodической; изменение амплитуды и фазы сигнала во времени приобретает чрезвычайно сложный вид (рис. 5).

Чтобы понять физические причины осцилляторного характера переходного процесса, рассмотрим динамику распределения поля и высоко-

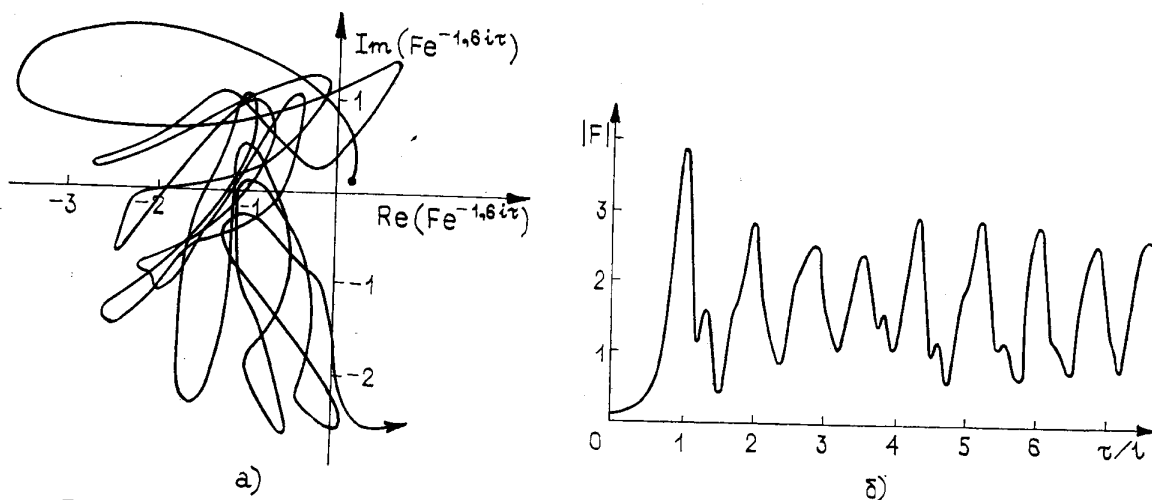


Рис. 5. Изменение комплексной амплитуды выходного сигнала слабoreлятивистской ЛОВ в процессе установления при  $v \ll 1$ ,  $l = 5,25$ ,  $F_0 = 0,3$ ; а) траектория конца вектора  $F \exp(-1,6 i \tau)$  на комплексной плоскости; б) зависимость  $|F|$  от времени.

\* К моменту публикации статьи такой эксперимент был проведен [13], и он подтвердил сделанное предположение.

частотного тока по длине лампы при  $l=3$  (рис. 6). Первый «кадр» примерно соответствует концу экспоненциального участка процесса установления колебаний и демонстрирует распределение поля и тока, отвечающее основной моде. К некоторому моменту (кадр 3) амплитуда  $|F|$  достигает такой величины, что сгруппированный ток у коллекторного конца начинает испытывать насыщение, затем падает почти до нуля,

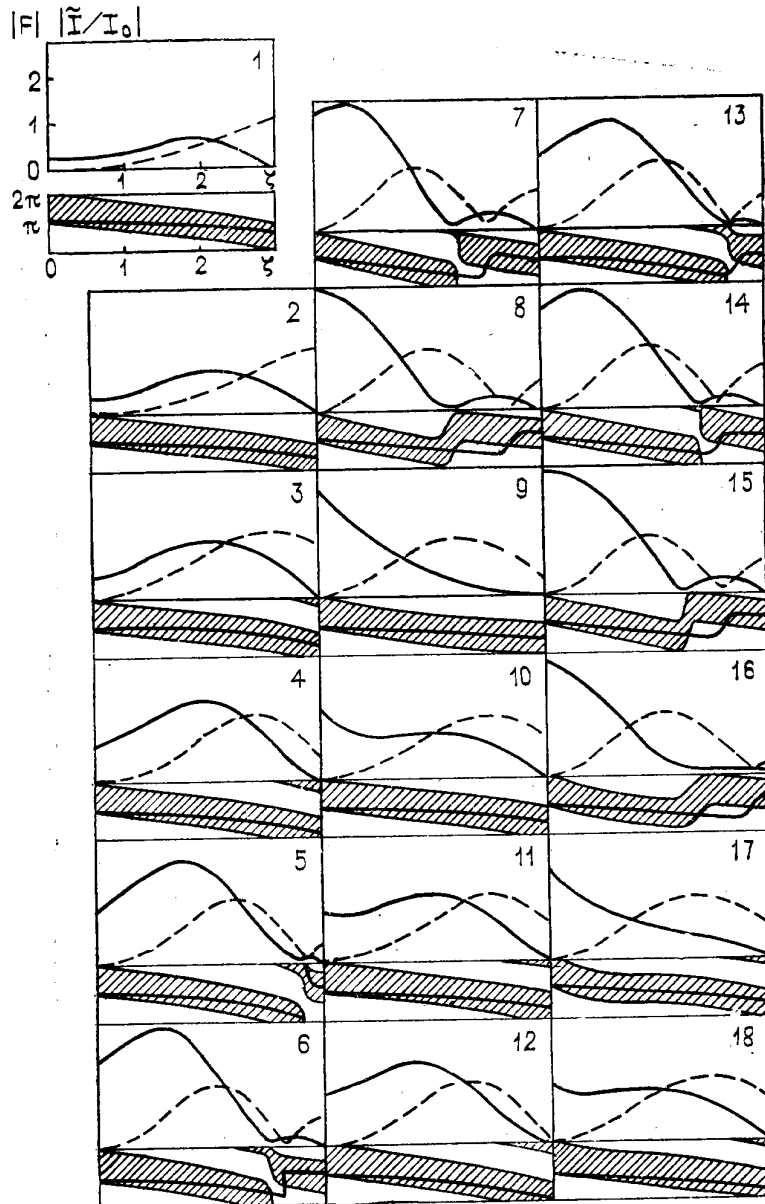


Рис. 6. Динамика распределения поля и высокочастотного тока по длине лампы при  $l=3$ . Каждый кадр показывает: сверху—амплитуды поля  $|F|$  (сплошная линия) и тока  $|\tilde{I}|/I_0$  (пунктир), внизу—область тормозящих фаз поля (заштрихована) и положение центра электронного сгустка в зависимости от  $\zeta$  при  $\tau = \text{const}$ . Промежуток безразмерного времени между соседними кадрами  $\Delta\tau=0,6$ .

меняет фазу примерно на  $\pi$  и снова нарастает (перегруппировка электронов) (кадры 4, 5). Очевидно, так же ведет себя и поле в этой области. В то же время по остальной длине лампы  $|F|$  продолжает увеличиваться (вблизи пушечного конца нелинейные эффекты вообще еще несущественны). В результате в середине пространства взаимодействия образуется высокий максимум  $|F|$ , а вблизи коллекторного конца —

еще один небольшой максимум. Далее, вся картина смещается влево из-за распространения огибающей с групповой скоростью, при этом оба максимума растут, так как первый проходит по области, занятой хорошо сгруппированным, а второй — перегруппированным пучком (кадры 6, 7)\*.

После того, как первый максимум проходит пушечный конец лампы, амплитуда поля вблизи этого конца резко падает, и поступающие в пространство взаимодействия электроны модулируются по скорости сравнительно слабым полем. Таким образом, они оказываются теперь хорошо сгруппированными только вблизи коллекторного конца, в области второго максимума. Поскольку последний ранее был наведен перегруппированным пучком, ток и поле здесь оказываются в противофазе,  $|F|$  падает почти до нуля, и затем поле снова меняет фазу на «правильную». К этому моменту (кадр 9) амплитуда поля по всей длине лампы довольно мала, так что насыщение тока снова существенно только у коллекторного конца. Сопоставляя кадры 11 и 3, видим, что они мало отличаются, поэтому можно ожидать повторения описанного процесса. Действительно, кадры 12—18 демонстрируют ту же самую последовательность фаз.

Таким образом, возникновение автомодуляции тесно связано, во-первых, с распределенным характером системы, что приводит к запаздыванию ее реакции на начало действия нелинейности, и, во-вторых, с явлением перегруппировки электронов полем большой амплитуды. Поэтому автомодуляция наблюдается только при достаточно большой безразмерной длине лампы, когда оба эффекта могут сказаться в полной мере.

*Ультрарелятивистская ЛОВ с большим КПД ( $\eta \sim 1$ ).* Напомним, что для режимов с большим КПД исходные нестационарные уравнения (14)—(16) корректны только в случае ультрарелятивистских скоростей электронов. Для удобства сравнения с работой [2], в которой исследовался стационарный режим ультрарелятивистской ЛОВ, будем пользоваться параллельно нормировками (13) и (26).

Характер процесса установления колебаний (рис. 7—9) в общих чертах соответствует рассмотренному выше. В частности, при безразмерных длинах, незначительно превышающих пусковое значение, про-

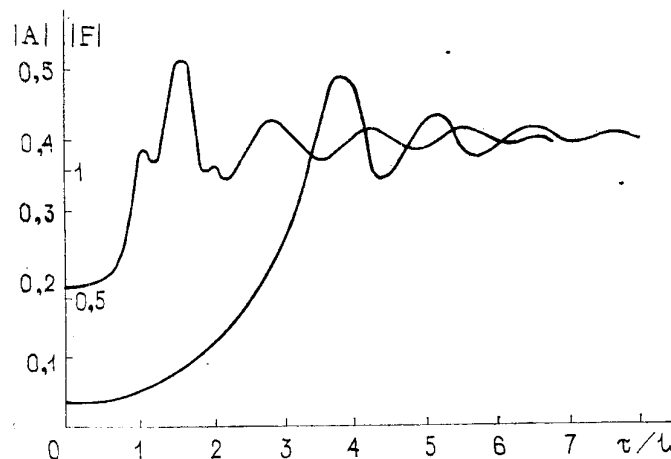


Рис. 7. Зависимость амплитуды выходного сигнала ультрарелятивистской ЛОВ от времени для двух различных уровней начального толчка при  $l = 0,1$ ,  $l' = 2,6$  ( $\nu = 0,855$ ;  $l = 2,2$ ).

\* Распределение поля и тока на кадрах 5—8 и 13—16 рис. 6 сходно с рассмотренным в [7] «перенапряженным» режимом. Этот стационарный режим, как таковой, практически не реализуется из-за возникновения автомодуляции (за исключением, возможно, очень узкой области  $l = 2,8 \div 2,92$ ).

цесс независимо от уровня начального толчка заканчивается установлением стационарного режима, найденного в [2], причем полученные значения КПД и расстроек совпадают с результатами [2] с точностью до 1% (рис. 7). При больших длинах возникает автомодуляция. Следует подчеркнуть, что это происходит при меньших  $I_0/I_{ст1}$ , чем в случае ЛОВ с малым КПД. Соответствующая область на плоскости параметров  $l' I^{1/3}$ ,  $I$  (или  $l$ ,  $\nu$ ) показана на рис. 8. Рис. 9 иллюстрирует более

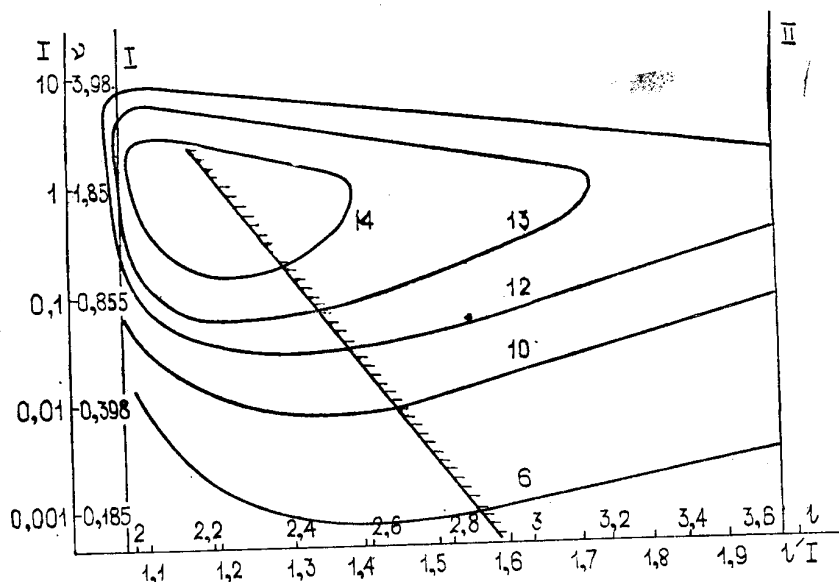


Рис. 8. Примерное положение области автомодуляции (заштрихована) на плоскости параметров  $I$ ,  $l' I^{1/3}$  или  $\nu$ ,  $l$ . Вертикальные линии I и II показывают границы самовозбуждения основной и второй моды.

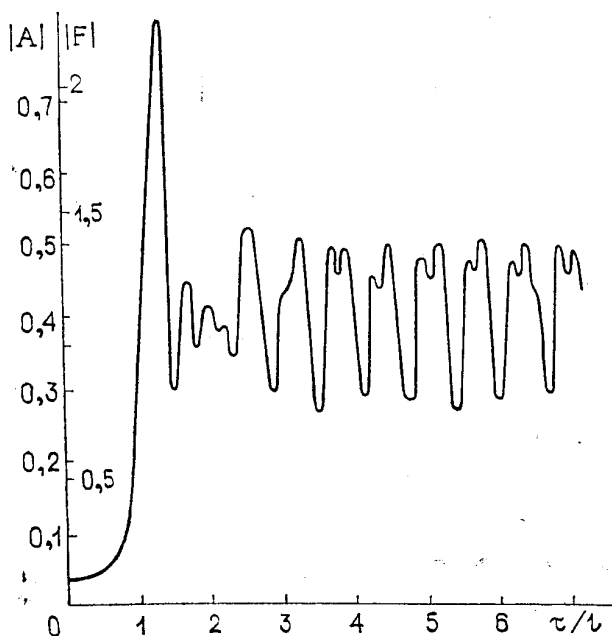


Рис. 9. Зависимость амплитуды выходного сигнала ультрарелятивистской ЛОВ от времени при  $I = 0,1$ ;  $l' = 4$  ( $\nu = 0,855$ ;  $l = 3,41$ ).

сложный автоколебательный режим, который можно сопоставить с рис. 5. При существенном превышении тока пучка над стартовым характерной особенностью переходного процесса в начале его нелиней-

ной стадии является резкий всплеск амплитуды выходного сигнала. Пиковая мощность при этом может превышать в несколько раз уровень, рассчитанный из стационарной теории. Чтобы практически использовать такой существенно нестационарный режим, необходимо подбором параметров ( $L, v_{гр}$ ) добиться, чтобы окончание импульса тока приходилось на конец всплеска.

На основании полученных данных можно заключить, что пучок передает электромагнитному полю значительную долю своей энергии, если длительность импульса тока в 2—3 раза превосходит даваемую формулой (30) величину времени  $t'_{уст}$ , хотя процесс может и не заканчиваться установлением стационарного состояния.

Авторы благодарят М. И. Петелина и Д. И. Трубецкова за внимание к этой работе, неоднократное обсуждение и полезные критические замечания.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

#### Уравнение возбуждения волновода заданным током

Как показано в работах [4, 5], выполняя обратное преобразование Фурье в уравнениях возбуждения волновода [9], для случая медленно меняющихся амплитуд (см. (3)) можно получить следующие выражения для поля обратной волны:

$$\frac{1}{v_{гр}} \frac{\partial \tilde{C}_{-s}}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{C}_{-s}}{\partial x} = \frac{1}{\pi N_s} \int_{S_{\perp}} dS \int_{\Omega t}^{\Omega t + 2\pi} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_s e^{-i\Omega t} d(\Omega t); \quad (\text{П. 1})$$

$$\mathbf{E} = \text{Re} (\tilde{C}_{-s} \mathbf{E}_{-s} e^{i\Omega t}), \quad (\text{П. 2})$$

где  $\mathbf{j}$  — вектор плотности тока,  $\mathbf{E}_{\pm s} = \mathbf{E}_{\pm s}^0(s, y, z) e^{\mp i\beta_s x}$  — собственные функции прямой и обратной волн,  $N_s$  — норма, имеющая смысл учетверенного потока мощности, переносимого волной при  $|\tilde{C}_{-s}| = 1$ ,  $v_{гр} = |\beta'_s(\Omega)|^{-1}$ . Величины  $\mathbf{E}_{\pm s}$ ,  $N_s$ ,  $v_{гр}$  взяты на частоте  $\Omega$ . Если учитывать только одну рабочую пространственную гармонику, следует разложить собственную функцию в ряд

$$\mathbf{E}_{\pm s}^0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{\pm sn}^0(y, z) \exp \left[ -i \left( \pm \beta_s + \frac{2\pi n}{d} \right) x \right], \quad (\text{П. 3})$$

где  $d$  — период волновода, и заменить в (П.1) и (П.2)  $\mathbf{E}_{\pm s}$  на соответствующий член ряда (П.3).

Считая поле рабочей пространственной гармоники однородным в области пучка, выберем нормировку собственных функций так, чтобы в этой области было  $E_{\pm snx} = \mp 1$ , тогда [9]  $N_s > 0$ . Вычислим интеграл в (П.1), учитывая, что в нашем случае вектор  $\mathbf{j}$  имеет только продольную составляющую. В результате, очевидно, получим величину  $\tilde{I}$  (см. формулу (11)). Тогда, обозначая  $K = \frac{2}{\beta^2 N_s}$  и  $\tilde{C}_{-s} = \tilde{E}$ , приходим к уравнению (4). Заметим, что величина  $K$  совпадает с общепринятым сопротивлением связи.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

## Излучение фронта электронного пучка

На основании методики, развитой в работах [10], можно показать, что излучение на частоте  $\Omega$ , определяемой условием (2), узкого фронта  $I(t') = I\left(t - \frac{x}{v_0}\right)$ , который движется вдоль линии АВ на пространственно-временной диаграмме рис. 10, занимает область АВС и имеет амплитуду

$$|\tilde{E}| = \frac{\beta^2 K}{2} \frac{v_0 |I_\Omega|}{\left(1 + \frac{v_0}{v_{гр}}\right)}, \quad (\text{П.4})$$

где  $I_\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} I(t') e^{-i\Omega t'} dt'$ . Используя обозначения (13), отсюда получаем формулу (32).

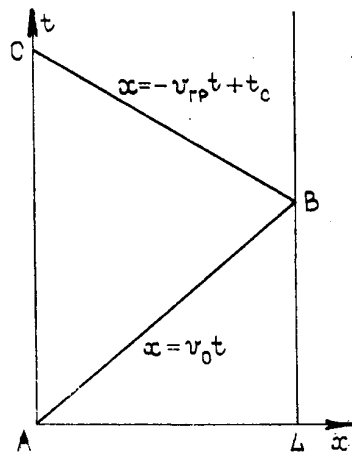


Рис. 10. Область на пространственно-временной диаграмме (АВС), занятая излучением на частоте  $\Omega$  фронта, движущегося по линии АВ.

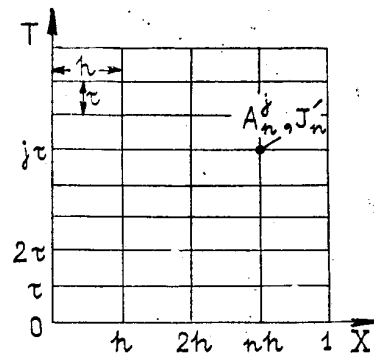


Рис. 11. Сетка на плоскости переменных  $X, T$ .

Заметим, что несмотря на то, что спектр  $I_\Omega$  может быть широкополосным, можно найти (П.4) и непосредственно из уравнения (4), полагая  $\tilde{I} = I(t') e^{-i\Omega t'}$ ,  $\tilde{E} = \tilde{E}(t')$  и проводя интегрирование. Действительно, при этом по крайней мере возбуждение спектральных составляющих поля на частотах, близких к  $\Omega$ , описывается правильно.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 3

## Конечно-разностный метод решения нестационарных нелинейных уравнений ЛОВ\*

Рассмотрим для определенности метод решения системы уравнений (27) — (29) (система (14) — (16) решается совершенно аналогично).

Каждую группу электронов (см. П. 2) заменим конечным числом  $K$  крупных частиц, начальные фазы которых составляют  $\alpha = \frac{2\pi q}{K}$  ( $q =$

\* Более простой, требующий меньших затрат машинного времени, но и менее точный метод был предложен в работе [11].

$= 0, 1, \dots, K-1$ ). Кроме того, для удобства разбиения длины пространства взаимодействия на шаги сделаем замену переменных  $T = \frac{\tau'}{l'}$ ,  $X = \frac{\zeta'}{l'}$ , так что система (27)–(29) принимает вид

$$\frac{\partial \theta_\alpha}{\partial X} = l' (\varepsilon_\alpha^2 - 1) = g(\varepsilon_\alpha), \quad \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial X} = l' \operatorname{Re}(A e^{i\theta_\alpha}) = f(A, \theta_\alpha); \quad (\text{П. 5})$$

$$\frac{\partial A}{\partial T} - \frac{\partial A}{\partial X} = -l' \frac{\pi I}{K} \sum_{q=0}^{K-1} e^{-i\theta_\alpha} = -J(\theta_\alpha); \quad (\text{П. 6})$$

$$\theta_\alpha|_{X=0} = \alpha, \quad \left. \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial X} \right|_{X=0} = 0, \quad A|_{X=1} = 0, \quad A|_{T=0} = A^0(X). \quad (\text{П. 7})$$

Решение ищется в точках сетки на плоскости переменных  $X, T$  с шагом  $h$  по  $X$  и  $\tau$  по  $T$  (рис. 11).

1) По известным значениям  $A_n^j$  на  $j$ -м слое по времени величины  $\theta_\alpha^n$  и  $\varepsilon_\alpha^n$  определяются по схеме предиктор — корректор:

$$\varepsilon_\alpha^{n+\frac{1}{2}} = \varepsilon_\alpha^n + \frac{h}{2} f(A_n^j, \theta_\alpha^n), \quad \theta_\alpha^{n+\frac{1}{2}} = \theta_\alpha^n + \frac{h}{2} g(\varepsilon_\alpha^n) \text{ (предиктор)}, \quad (\text{П. 8})$$

$$\varepsilon_\alpha^{n+1} = \varepsilon_\alpha^n + hf\left(\frac{A_n^j + A_{n+1}^j}{2}, \theta_\alpha^{n+\frac{1}{2}}\right), \quad \theta_\alpha^{n+1} = \theta_\alpha^n + hg\left(\varepsilon_\alpha^{n+\frac{1}{2}}\right) \text{ (кор-}$$

ректор), после чего по найденным  $\theta_\alpha^n$  определяются величины  $J_n^j = J(\theta_\alpha^n)$ .

2) По известным  $A_n^j$  и  $A_{n-1}^{j-1}$ , а также  $J_n^j$  и  $J_{n-1}^{j-1}$  рассчитываются значения комплексной амплитуды поля на следующем слое  $A_{n+1}^{j+1}$ . При этом используется формула

$$\begin{aligned} \frac{A_{n+1}^{j+1} - A_n^j}{\tau} - \frac{A_{n+1}^j - A_{n-1}^{j-1}}{2h} - \frac{\tau}{2} \frac{A_{n+1}^j - 2A_n^j + A_{n-1}^{j-1}}{h^2} = \\ = -\frac{3}{2} J_n^j + \frac{1}{2} J_{n-1}^{j-1} - \frac{\pi I \tau}{2K} \sum_{q=0}^{K-1} e^{-i\theta_\alpha^n} g(\varepsilon_\alpha^n), \end{aligned} \quad (\text{П. 9})$$

которая представляет собой аппроксимацию уравнения (П.6).

Величина  $A_0^{j+1}$  вычисляется по формуле

$$\frac{A_0^{j+1} - A_0^j}{\tau} - \frac{A_1^j - A_0^j}{h} - \frac{\tau - h}{2} \frac{A_0^{j+1} - 2A_0^j + A_0^{j-1}}{\tau^2} + \frac{1}{2} J_1^j = 0. \quad (\text{П. 10})$$

Особого рассмотрения требует начало счета. Для нахождения значений  $A_n^1$  по известным из (П.7)  $A_n^0$  применяются соотношения

$$A_0^{j+1} = A_0^j - \frac{\tau_0}{2h} (A_2^j - 4A_1^j + 3A_0^j), \quad (\text{П. 11})$$

$$A_n^{j+1} = \frac{1}{2} (A_{n+1}^j + A_{n-1}^j) + \frac{\tau_0}{2h} (A_{n+1}^0 - A_{n-1}^0) + \tau_0 J_n \quad (n > 0),$$

где  $\tau_0 \ll \tau$ . По этой схеме рассчитываются несколько первых шагов с последовательным удвоением шага до тех пор, пока он не достигнет величины  $\tau$ .

Описанный метод имеет точность  $O(\tau^2 + h^2)$  и устойчив при  $\tau < h$ . При проведении расчетов обычно выбиралось  $K=16$ ;  $h=0,02$ ;  $\tau=0,01$ . Время счета одного варианта на ЭВМ БЭСМ-4 около 3 часов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. S. E. Graybill and S. V. Nablo, Bull. Am. Phys. Soc., 12, № 6, 961 (1967); W. I. Link, IEEE Trans. Nucl. Sci., 14, № 3, 777 (1968).
2. Н. Ф. Ковалев, В. И. Петрухина, А. В. Сморгонский, Радиотехника и электроника, 20, № 7, 1547 (1975).
3. Н. Ф. Ковалев и др., Письма в ЖЭТФ, 18, № 4, 232 (1973).
4. С. П. Кузнецов, Д. И. Трубецков, Лекции по электронике СВЧ (3-я зимняя школа — семинар инженеров), кн. 5, изд. Саратовского ун-та, 1975, стр. 88; Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 2, 300 (1977).
5. Электроника ламп с обратной волной, под ред. В. Н. Шевчика и Д. И. Трубецкова, изд. Саратовского ун-та, 1975, гл. III.
6. М. Б. Голант, А. С. Тагер, Вопросы радиоэлектроники, серия Электроника, вып. 5, 26 (1964); И. К. Викулов, Б. Д. Хомутильников, Вопросы радиоэлектроники, серия 1, Электроника, вып. 11, 3 (1964); И. К. Викулов, А. С. Тагер, Радиотехника и электроника, 12, № 12, 2146 (1967).
7. Г. Н. Рапопорт, ДАН СССР, 117, № 3, 411 (1957); Изв. вузов — Радиотехника и электроника, 9, № 3, 483 (1964); Радиотехника, 1, № 5, 599 (1958).
8. В. Н. Шевчик, Д. И. Трубецков, Аналитические методы расчета в электронике СВЧ, изд. Сов. радио, М., 1970.
9. Л. А. Вайнштейн, В. А. Солнцев, Лекции по сверхвысокочастотной электронике, изд. Сов. радио, М., 1973.
10. А. И. Ахиезер, Г. А. Любарский, Я. Б. Файнберг, ЖТФ, 25, 2526 (1955); В. А. Солнцев, А. С. Тагер, Радиотехника и электроника, 5, № 7, 1100 (1960).
11. С. П. Кузнецов, Л. А. Пищик, Д. И. Трубецков, ЦНИИ «Электроника», № 4303/76, реф. в сб. ВИМИ «Рипорт», № 17, 1976.
12. М. А. Неймарк, Линейные дифференциальные операторы, изд. Наука, М., 1969.
13. Б. П. Безручко, Н. С. Гинзбург, С. П. Кузнецов, «Лекции по электронике СВЧ» (4-я зимняя школа-семинар инженеров), кн. 5, изд. Саратовского ун-та, 1978, стр. 236.
14. В. Клеен, К. Пешль, Введение в электронику сверхвысоких частот, ч. 2, изд. Сов. радио, М., 1963.

Научно-исследовательский  
радиофизический институт

Поступила в редакцию  
14 апреля 1977 г.

#### THE THEORY OF TRANSIENT PROCESSES IN RELATIVISTIC BWO

N. S. Ginzburg, S. P. Kuznetsov, T. N. Fedoseeva

The linear stage duration of the transient process in relativistic BWO is estimated in the assumption that a signal arises from spectral components of radiation from the electron beam front and charge density (shot effect) fluctuations in the synchronism band. It is shown that at the nonlinear stage when the electron current exceeds slightly the start value the signal amplitude having reached its maximum produces attenuating oscillations that results in setting down the stationary regime. For the current essentially exceeding the start value (for BWO with low efficiency — 3.25 times) a more complicated auto-oscillating regime is settled down when the output signal amplitude is modulated with the period necessary for the electrons and the wave to pass (with the group velocity) the tube. This modulation being originally of sinusoidal character becomes a succession of peaks as the current increases and then ceases to be periodic.