

УДК 621.385.633.1

НЕСТАЦИОНАРНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЛОВ НА АНОМАЛЬНОМ ЭФФЕКТЕ ДОПЛЕРА

С. П. Кузнецов, А. П. Четвериков

На основании численного решения уравнений нелинейной нестационарной теории показано, что для ультрарелятивистской ЛОВ на аномальном эффекте Доплера характерны многочастотные автомодуляционные режимы генерации. Обсуждаются причины возникновения автомодуляции. Оценено время установления колебаний.

1. Взаимодействие электронного пучка, движущегося в продольном магнитном поле, с поперечной волной в условиях аномального эффекта Доплера [1] может быть использовано для создания мощных релятивистских генераторов СВЧ излучения с высоким КПД. Описаны два варианта таких генераторов — с резонансной и нерезонансной электродинамическими системами [2, 3]. Во втором случае осуществляется взаимодействие пучка с обратной пространственной гармоникой периодической структуры, т. е. устройство можно классифицировать как лампу обратной волны на аномальном эффекте Доплера (ЛОВ АД)*.

Некоторые результаты стационарной нелинейной теории ЛОВ АД были изложены в нашем докладе на Всесоюзном семинаре «Высокочастотная релятивистская электроника» (Горький, 1978) и в работе Гинзбурга [3], а предварительные результаты нестационарной теории нашли отражение в докладе [4]. Данная статья посвящена подробному изложению нестационарной нелинейной теории ЛОВ АД.

2. Рассмотрим взаимодействие ультрарелятивистского электронного пучка, движущегося в однородном статическом магнитном поле $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$, с обратной пространственной гармоникой волноведущей системы $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ — орты прямоугольной системы координат). Предположим, что пучок на входе в пространство взаимодействия имеет скорость $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{e}_z$, а поле в области пучка можно представить в виде плоской волны с правой круговой поляризацией:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \text{Re} [E(z, t) \mathbf{e}_E \exp(j(\omega_0 t - h_0 z))], \\ \mathbf{B} &= \text{Re} \left[\frac{E(z, t)}{v_{\phi 0}} \mathbf{e}_B \exp(j(\omega_0 t - h_0 z)) \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{e}_E = \mathbf{e}_x + j\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_B = -j\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y$, $E(z, t)$ — медленно меняющаяся комплексная амплитуда электрического поля, $h_0 = \omega_0/v_{\phi 0}$, $v_{\phi 0}$ — фазовая скорость волны на частоте ω_0 , определяемой условием $\omega_0 - h_0 v_0 + \omega_c = 0$ ($\omega_c = eB_0/m_0\gamma_0$, $-e$ и m_0 — заряд и масса покоя электрона, $\gamma_0 = (1 - v_0^2/c^2)^{-1/2} \gg 1$, c — скорость света)**.

* Вследствие нерезонансного характера электродинамической системы длительность переходного процесса в ЛОВ АД меньше, чем в резонансном автогенераторе. Из-за кратковременности импульсов тока, формируемых сильноточными ускорителями, это преимущество ЛОВ АД является существенным.

** Условием медленности изменения амплитуды является малость введенного ниже параметра D . Зависимость собственных функций волновода от частоты в полосе

Нестационарное уравнение возбуждения для амплитуды E имеет вид [5]

$$-\frac{1}{v_{\text{гр}}} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{h_0^2 K_t}{4} \int_{S_{\perp}} \overline{e^* j_{\perp} \exp(-j(\omega_0 t - h_0 z))} dS_{\perp}, \quad (2)$$

где $v_{\text{гр}}$ — групповая скорость обратной пространственной гармоники, K_t — сопротивление связи для поперечных компонент электрического поля, j_{\perp} — высокочастотная составляющая плотности тока, S_{\perp} — поперечное сечение волновода, черта означает усреднение по периоду $2\pi/\omega_0$.

Уравнения движения электронов запишем в пренебрежении кулоновским взаимодействием:

$$\frac{dP}{dt} + j \frac{eB_0}{m_0 \gamma} P = -e \left(1 - \frac{v_z}{v_{\phi 0}}\right) E \exp(j(\omega_0 t - h_0 z)); \quad (3)$$

$$\frac{dp_z}{dt} = -\frac{e}{v_{\phi 0}} \operatorname{Re} [V^* E \exp(j(\omega_0 t - h_0 z))]; \quad (4)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{e}{m_0 c^2} \operatorname{Re} [V^* E \exp(j(\omega_0 t - h_0 z))], \quad (5)$$

где \mathbf{v} и \mathbf{p} — скорость и импульс электрона, $V = v_x - jv_y$, $P = m_0 \gamma V$, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

Введем безразмерные переменные $F = \frac{4\sqrt{2DE}}{h_0 K_t I_0 \sqrt{a}}$, $\bar{\gamma} = \frac{\gamma_0 - \gamma}{\gamma_0 \beta_0 \beta_{\phi}}$, $r = \frac{P}{p_0} \sqrt{\frac{2}{aD}} \exp(-j(\omega_0 t - h_0 z))$, $\zeta = h_0 D z$, $\tau = \frac{\omega_0 D (t - z/v_0)}{1 + v_0/v_{\text{гр}}}$, в которых $a = \frac{1 - \beta_{\phi}^2}{D}$, $D = \left[\frac{K_t I_0 (1 - \beta_{\phi}^2)}{8U_0} \right]^{1/2} \ll 1$ — параметр взаимодействия, $\beta_{\phi} = v_{\phi 0}/c$, $\beta_0 = v_0/c$, $p_0 = |\mathbf{p}|_{z=0}$, I_0 — постоянная составляющая тока пучка, U_0 — ускоряющий потенциал. Тогда с учетом интеграла движения $p_z/p_0 = 1 - \bar{\gamma}$ и соотношения $j_{\perp} = I_0 \frac{v_{\perp}}{v_z}$, вытекающего из закона сохранения заряда, уравнения (2) — (5) принимают вид

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta} - \frac{\partial F}{\partial \tau} = -\frac{r}{1 - \bar{\gamma}}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \zeta} + ja \frac{r \bar{\gamma}}{1 - \bar{\gamma}} = \frac{1 - 2\bar{\gamma}}{1 - \bar{\gamma}} F; \quad (7)$$

$$\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \zeta} = \frac{\operatorname{Re}(r^* F)}{1 - \bar{\gamma}}. \quad (8)$$

$\Delta \omega \sim D \omega_0$, как можно показать, несущественна при $\omega_c/\omega_0 \gg \gamma_0^{-2}$. Последнее реально в ультрарелятивистской области энергий ($\gamma_0 \gg 1$) и предполагается выполненным. Отметим, что данное ограничение не накладывает в работе [3]. Поэтому для режимов, в которых реализуются монохроматические автоколебания (см. ниже), область применения нашей теории несколько уже, чем теории [3]. Для систем, в которых возможно распространение волн с противоположными поляризациями, проводимый анализ годится в том случае, если электроны совершают в пространстве взаимодействия достаточно большое число оборотов $n \approx a \zeta_L / 4\pi$ (определение $a \zeta_L$ см. дальше).

Систему (6)—(8) следует дополнить граничными и начальными условиями

$$r|_{\zeta=0} = 0, \quad \bar{\gamma}|_{\zeta=0} = 0, \quad F|_{\zeta=\zeta_L} = 0, \quad F|_{\zeta=0} = F^0(\zeta), \quad (9)$$

где $\zeta_L = h_0 DL$, L — длина прибора.

В линейном приближении ($|F|$, $|r|$, $\bar{\gamma} \ll 1$) из (6)—(9) получаем

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta} - \frac{\partial F}{\partial \tau} = -r, \quad \frac{\partial r}{\partial \zeta} = F, \quad r|_{\zeta=0} = 0, \quad F|_{\zeta=\zeta_L} = 0, \quad F|_{\zeta=0} = F^0(\zeta), \quad (10)$$

что совпадает с линеаризованной нестационарной задачей для ЛОВМ [6]. Асимптотическое решение (10) при $\tau \rightarrow \infty$ имеет вид

$$F = C \exp(\alpha(2\tau + \zeta)) \sin [\sqrt{1 - \alpha^2} (\zeta_L - \zeta)], \quad (11)$$

где C и $\alpha \approx 1 - (\pi/2\zeta_L)^{3/2}$ — начальная амплитуда и инкремент основного типа колебаний*; нарастание сигнала во времени происходит при $\zeta_L > \pi/2$ (пусковое условие).

Для анализа стационарного одночастотного режима генерации сделаем в (6)—(9) подстановку

$$F = \hat{F}(\zeta) \exp(jb(\tau + \zeta)), \quad r = \hat{r}(\zeta) \exp(jb(\tau + \zeta)),$$

где $b = \frac{h(\omega) - \omega/v_0 - \omega_c/v_0}{hD}$ — параметр рассинхронизма, ω — частота

генерируемых колебаний. При заданных a и ζ_L решение полученной нелинейной краевой задачи заключается в нахождении функций

$\hat{F}(\zeta)$, $\hat{r}(\zeta)$, $\bar{\gamma}(\zeta)$ и параметра b . Следуя методике [7], можно получить уравнение для приведенной амплитуды поля $A = |\hat{F}(\zeta)/\hat{F}(0)|$

$$\left\{ \left(\frac{dA}{d\zeta} \right)^2 + \frac{(1 - A^2)^2 A^2 b^2}{4 [1 + \eta(A^2 - 1)]^2} \right\} [1 + \eta(A^2 - 1)] + A^2 = 1 \quad (12)$$

и фазовое условие генерации

$$\eta = \frac{2b}{a + b}, \quad (13)$$

где $\eta = \frac{1}{2} |F(0)|^2$ — КПД прибора.

На рис. 1 приведены рассчитанные на основании (12) зависимости КПД от ζ_L при нескольких значениях $a\zeta_L = \text{const}$ (параметр ζ_L пропорционален $I_0^{1/2}$, а $a\zeta_L$ не зависит от I_0). Как видно из рисунка, для прибора с меньшими $a\zeta_L$ характерны более высокие КПД. Отметим, что генерация возможна и при ζ_L , несколько меньших $\pi/2$ (режим жесткого возбуждения). На рис. 2 показаны области мягкого и жесткого возбуждения на плоскости b , η , а на рис. 3 — зависимость ζ_L от b при различных $\eta = \text{const}$. Полученные результаты согласуются с результатами работы [3].

3. Рассматривая переходный процесс в ЛОВ АД, будем считать, что 1) при включении прибора ток быстро нарастает от нуля до стационарного значения I_0 и 2) начальный уровень колебаний очень мал. Тогда

* При $\zeta_L > \frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$ и т. д. становятся нарастающими второй, третий и т. д. виды колебаний, однако их инкременты меньше, чем у основного. Поэтому асимптотика решения сохраняет форму (11).

да, используя (11), получим следующую оценку длительности линейной стадии процесса (время достижения амплитудой значения $|F| \sim 1$):

$$t_1 \sim - \frac{1 + v_0/v_{гр}}{2D\omega_0 x} \ln|C|. \quad (14)$$

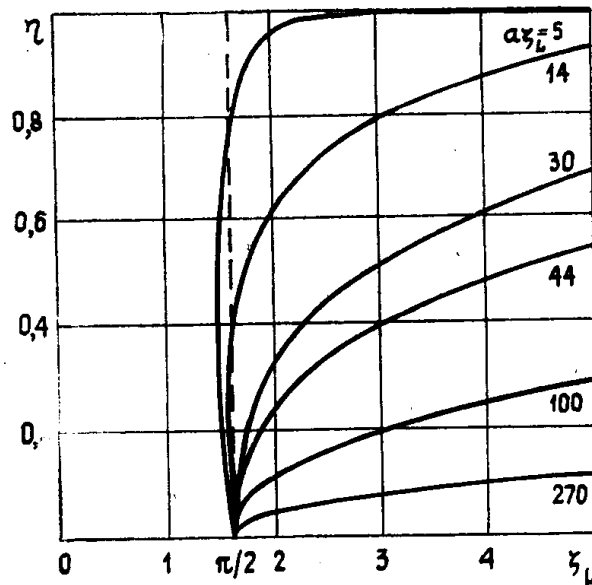


Рис. 1.

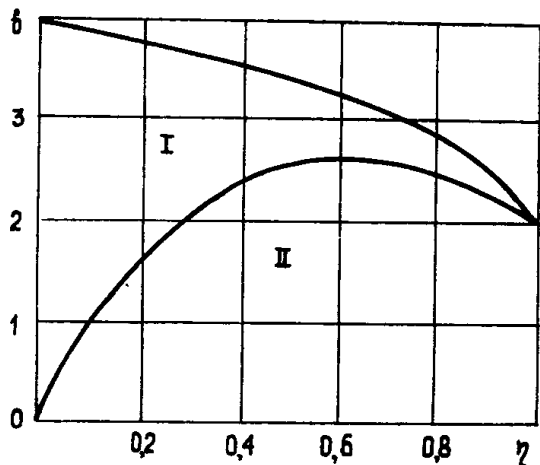


Рис. 2.

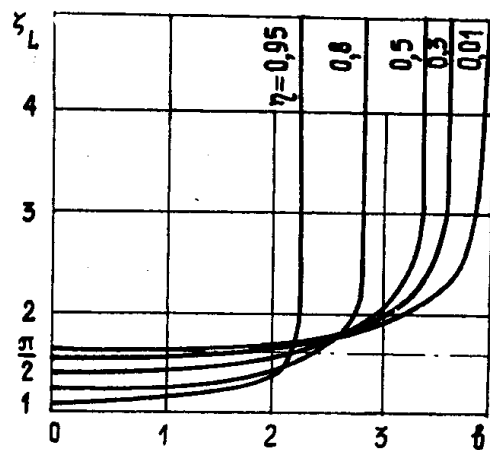


Рис. 3.

Предполагая, что начальная амплитуда основного вида $|C|$ определяется тепловыми шумами электродинамической системы, находим, что по порядку величины

$$|C| \sim \sqrt{\frac{kT^0 \omega_0 D}{I_0 U_0}}, \quad (15)$$

где k — постоянная Больцмана, T^0 — температура электродинамической системы*.

* В начальную амплитуду колебаний не вносят вклада излучение фронта пучка и флуктуации плотности (дробовой эффект) — эти возмущения являются продольными и не возбуждают поперечную волну. Излучение тепловых флуктуаций поперечной скорости, по оценкам, мало. Значительным может оказаться излучение флуктуаций поперечной скорости, связанных с особенностями формирования сильноточного пучка; поэтому оценка времени t_1 (14), (15) может быть завышенной. Данный вопрос требует, однако, специального исследования.

На рис. 4 показана зависимость времени t_1 от ζ_L при различных $N = h_0 L / 2\pi$ ($\omega_0 = 6 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$, $I_0 U_0 \sim 50 \text{ ГВт}$, $T = 300 \text{ К}$).

Таким образом, при реальных параметрах ЛОВ АД можно обеспечить нарастание сигнала до нелинейного уровня за времена, типичные для импульсов тока, формируемых сильноточными ускорителями (10—100 нс [8]).

4. Для нелинейной стадии процесса система уравнений (6)—(9) решалась численно сеточным методом второго порядка. Метод обеспечивал точное выполнение интеграла движения $|r|^2 = 2\bar{\gamma}(1 - \bar{\gamma})$, следующего из уравнений (7) и (8). В качестве начального условия при $\tau = 0$ задавалось решение линейной задачи (11) с амплитудой $C \sim 0,1$.

Были проведены три серии расчетов — для малого ($a\zeta_L = 270$), среднего ($a\zeta_L = 44$) и большого ($a\zeta_L = 14$) КПД.

На рис. 5 показаны (сплошными линиями) зависимости амплитуды выходного сигнала от безразмерного времени τ при $a\zeta_L = 270$ и нескольких значениях ζ_L . С увеличением ζ_L характер установившегося режима, которым заканчивается переходный процесс, последовательно усложняется. При ζ_L , незначительно больших пускового значения $\pi/2$, реализуется стационарный одночастотный режим (рис. 5а). Уже при $\zeta_L = 1,8$ появляется периодическая автомодуляция выходного сигнала по амплитуде и фазе (рис. 5б). При дальнейшем увеличении ζ_L автомодуляция становится все более глубокой, а затем теряет периодичность (рис. 5в—ж)*. Пунктирные кривые на рис. 5 соответствуют линейному приближению, а штрихпунктирные — стационарной теории.

При $a\zeta_L = 44$ процессы носят аналогичный характер (рис. 6), но автомодуляция возникает при несколько меньшем ζ_L . При $\zeta_L = 3$ в момент $\tau = 9,3$ происходит остановка ЭВМ из-за того, что $\bar{\gamma} \rightarrow 1$ (численный эффект полного торможения электронов). В реальном приборе можно с уверенностью предсказать уменьшение скорости электронов по сравнению с начальной на величину больше-порядка Dv_0 , после чего исходные допущения нашей теории становятся неприменимыми.

Подобные же результаты получены при $a\zeta_L = 14$, причем автомодуляция и «остановка» электронов возникают при еще меньших ζ_L , чем в предыдущем случае.

5. Чтобы пояснить механизм наблюдаемых явлений, обратимся к рис. 7, на котором показаны зависимости величин $|F|$, φ_F (сплошные кривые), $|r|$, φ_r (штриховые кривые), γ от ζ при нескольких значениях $\tau = \text{const}$ для случая глубокой периодической автомодуляции $a\zeta_L = 44$, $\zeta_L = 2$ ($|F|$, φ_F , $|r|$, φ_r — амплитуды и фазы поля и по-

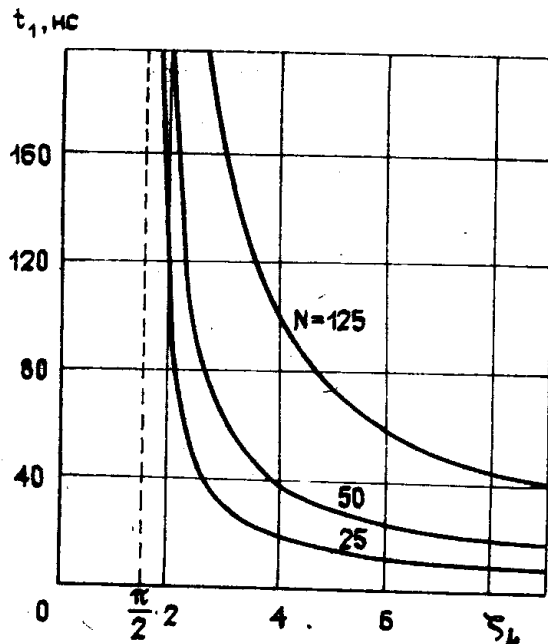


Рис. 4.

* При $\zeta_L = 4,8$ и 6 для τ вплоть до $\tau = 40$ никакой тенденции к возникновению периодичности не наблюдалось; на рис. 5 приведена часть полученной зависимости

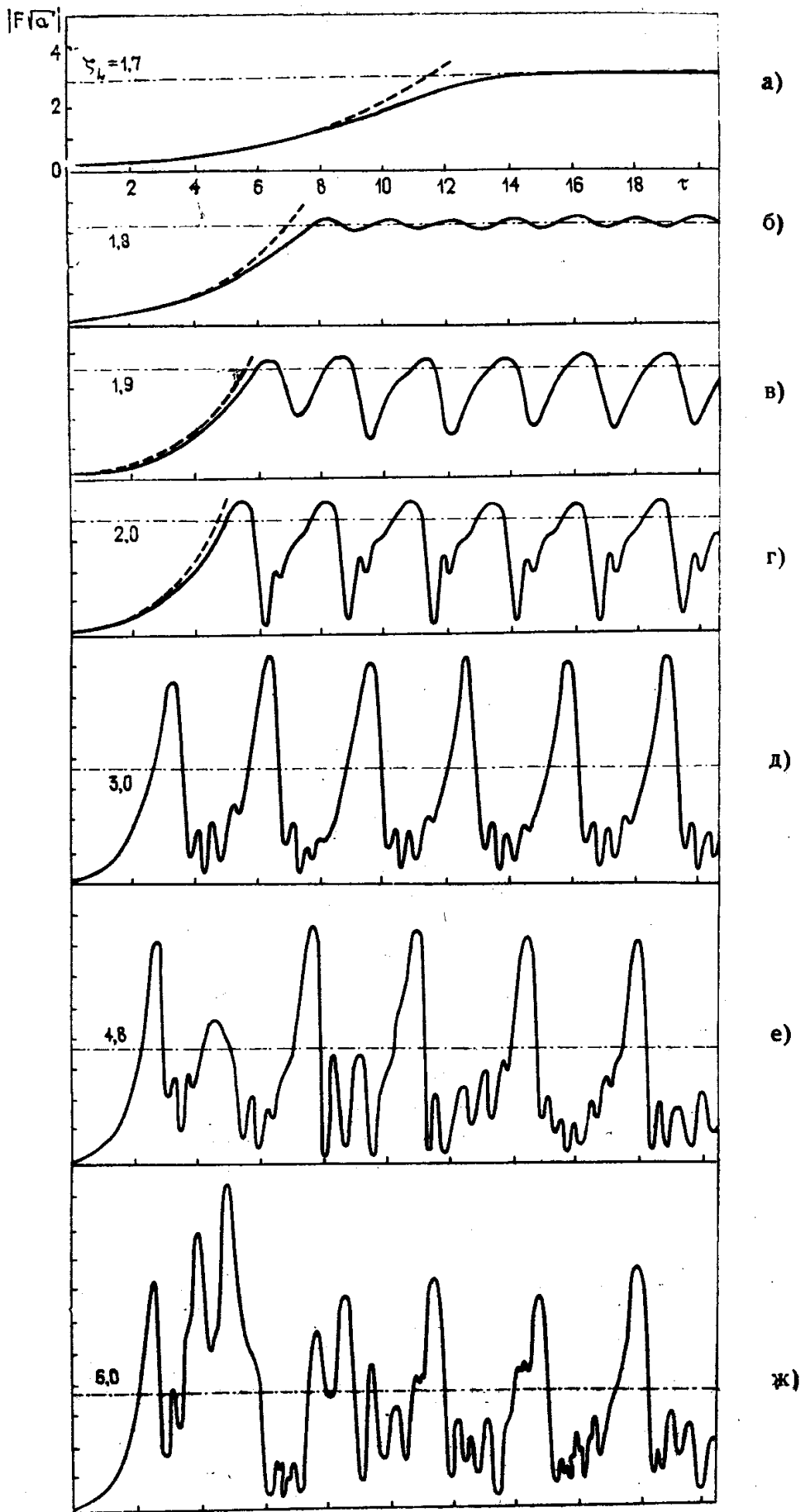


Рис. 5.

перечного тока, $\bar{\gamma}$ характеризует отдаваемую электронами энергию, $\tau \sim t - z/v_0$.

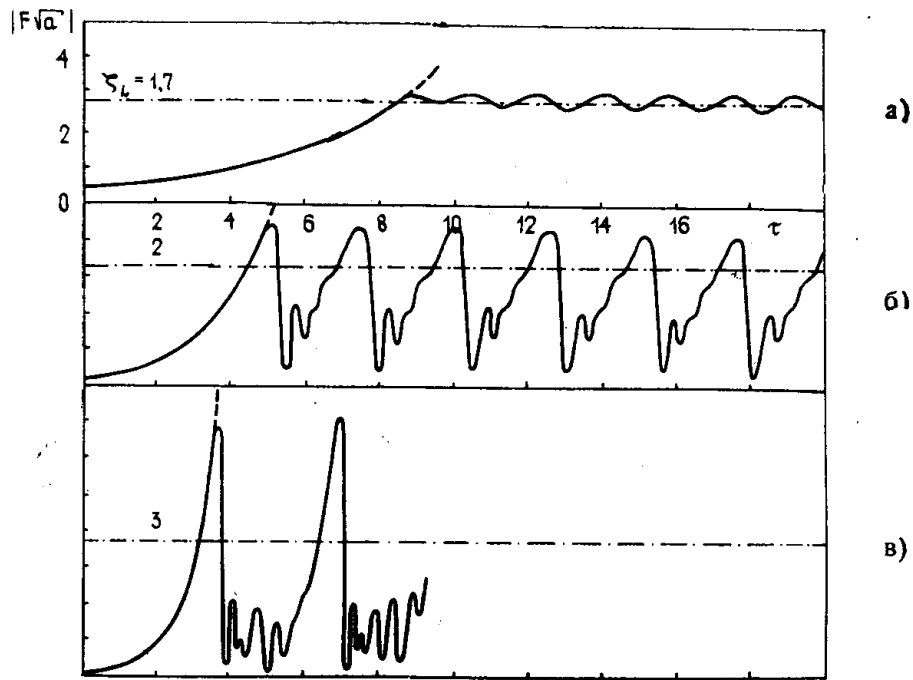


Рис. 6.

К концу линейной стадии процесса распределение $|F|$ и $|r|$ по ζ соответствует основному виду колебаний (рис. 7а). При этом $|r|$ и $\bar{\gamma}$ являются монотонно возрастающими функциями ζ . С течением времени их значения у коллекторного конца ($\zeta = \zeta_L$) прибора становятся достаточно большими, пучок тормозится и нарушается условие синхронизма, которое выполнялось в линейном приближении, — фаза тока у коллекторного конца становится быстро меняющейся. Вследствие этого, несмотря на большую амплитуду, ток наводит довольно слабое поле с быстро меняющейся фазой (рис. 7б). Эти процессы, разыгрывающиеся у коллекторного конца, не могут помешать нарастанию поля у пушечного конца ($\zeta = 0$), так как перенос возмущений волной происходит с конечной скоростью (в используемых безразмерных обозначениях эта скорость равна единице). Через время $\Delta\tau \sim \zeta_L$ до пушечного конца доходит «информация» о начале действия нелинейных эффектов, и амплитуда поля резко падает (рис. 7в). Таков механизм образования первого мощного импульса выходного сигнала (рис. 6б).

После прохождения импульса по всей длине лампы остается поле с быстро меняющейся фазой. Оно не может сильно промодулировать пучок, и, как и на начальной стадии процесса, $\bar{\gamma} \ll 1$. Из образовавшегося сложного распределения поля снова выделяется основной вид колебаний (остальные виды являются затухающими) — начинает формироваться следующий мощный импульс (рис. 7г).

Процесс является строго периодическим, поскольку каждый новый импульс развивается из одинакового распределения поля. Период определяется временем $\tau_0 \sim \zeta_L$ или, в размерном виде, $t_0 \sim L/v_0 + L/v_{гр} = T_0$. В действительности, как видно из рис. 5, 6, он составляет $(1-1,3) T_0$.

Другая ситуация возникает при $\zeta_L \gtrsim 3\pi/2$, когда нарастающими являются по крайней мере два вида колебаний. Распределение поля, предшествующее появлению мощного импульса, теперь определяется суперпозицией видов колебаний и зависит от соотношения их амплитуд и фаз. Поэтому различаются высота и форма импульсов, а также рас-

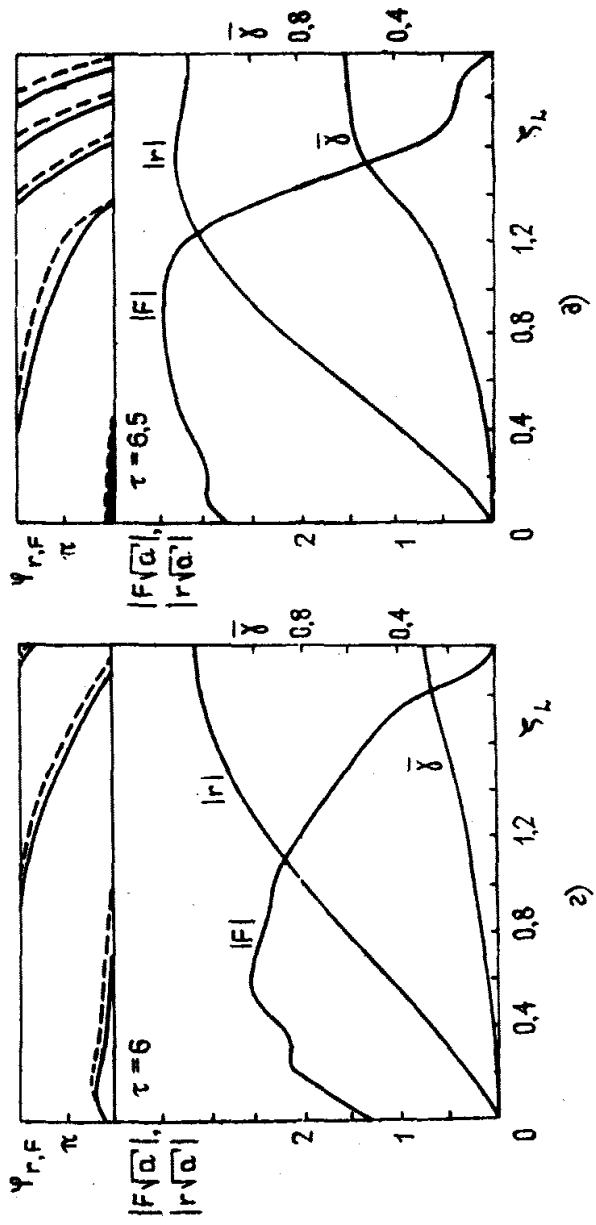
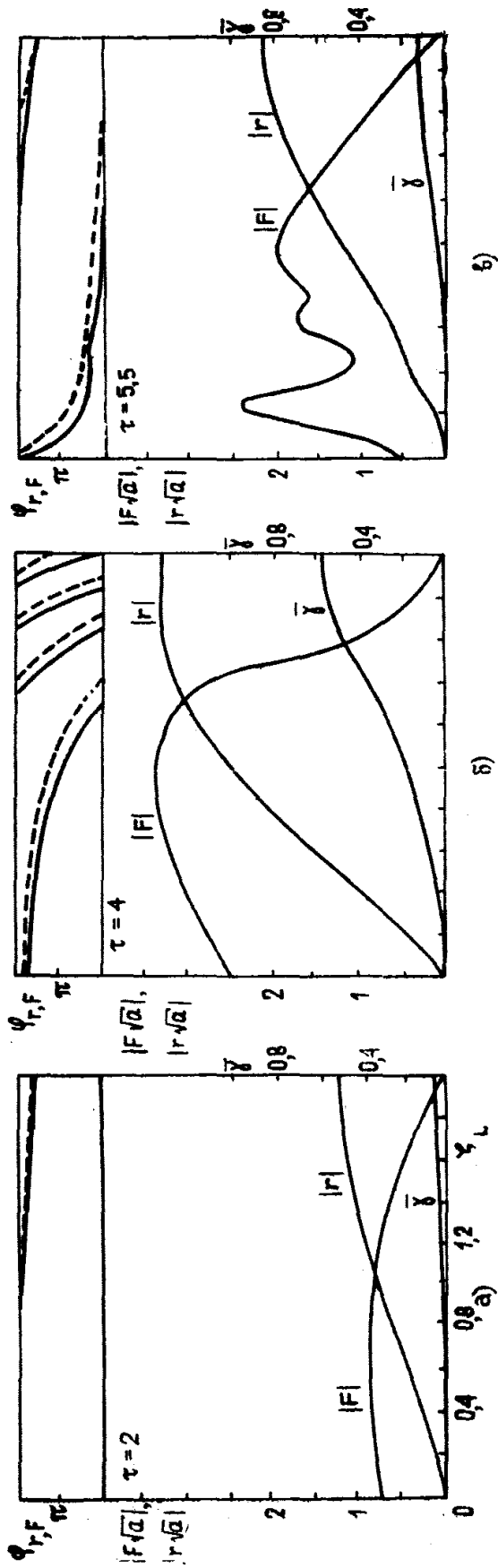


Рис 7.

пределение поля, возникающее после прохождения каждого импульса. В этом, по-видимому, и заключается механизм стохастизации, наблюдаемой на рис. 5е, ж (в численном эксперименте периодичность автомодуляции действительно теряется при ζ_L , близких к $3\pi/2$).

По характеру бифуркационных переходов ЛОВ АД сходна с ЛОВО [5], что обусловлено одинаковым типом обратной связи. Имеющиеся отличия (в частности, режим монохроматических автоколебаний реализуется в ЛОВ АД в области значений тока гораздо более узкой, чем в ЛОВО) обусловлены разными механизмами группирования*.

6. Резюмируя, подчеркнем, что в ультрарелятивистской ЛОВ АД практически невозможно самовозбуждение монохроматических колебаний с достаточно большим КПД. Вместо них реализуются сложные многочастотные автомодуляционные режимы, причем амплитуда выходного сигнала имеет, как правило, вид последовательности импульсов. Мощность в максимумах импульсов значительно превышает рассчитанную по стационарной теории. Период автомодуляции соизмерим со временем прохождения сигнала по петле обратной связи. Длительность переходного процесса при возбуждении начальных колебаний тепловыми шумами в электродинамической системе в короткой части сантиметрового диапазона длин волн составляет десятки наносекунд.

Авторы благодарны Д. И. Трубецкову за ценные обсуждения при постановке задачи и анализе результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург В. Л., Франк И. М. — ДАН СССР, 1947, 56, № 6, с. 583.
2. Петелин М. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1974, 17, № 6, с. 902.
3. Гинзбург Н. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 4, с. 470.
4. Кузнецов С. П., Трубецков Д. И., Четвериков А. П. Тезисы докладов на IX Межвузовской конференции по электронике СВЧ. — Киев: 1979, с. 88.
5. Гинзбург Н. С., Кузнецов С. П., Федосеева Т. Н. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, 21, № 7, с. 1037.
6. Электроника ламп с обратной волной. /Под ред. В. Н. Шевчика и Д. И. Трубецкова. — Саратов: Гос. ун-т, 1975. — Гл. 3.
7. Кузнецов С. П., Четвериков А. П. — Радиотехника и электроника, 1978, 23, № 2, с. 385.
8. Релятивистская высокочастотная электроника. /Под ред. А. В. Гапонова-Грехова. — Горький: ИПФ АН СССР, 1979.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию
25 октября 1979 г.

NONSTATIONARY NONLINEAR THEORY OF ULTRARELATIVISTIC BWO ON ANOMALOUS DOPPLER EFFECT

S. P. Kuznetsov, A. P. Chetverikov

Based on numerical solution of equations of nonlinear nonstationary theory it is shown that multifrequency automodulation regimes of generation are typical of ultrarelativistic BWO on anomalous Doppler effect. Reasons of automodulation occurrence are discussed. Time of oscillation setting is estimated.

* В ЛОВО нелинейные эффекты связаны, главным образом, с «рассыпанием» электронного сгустка в результате перегруппировки, из-за чего уменьшается амплитуда первой гармоники тока. Автомодаляция возникает в том случае, если на длине лампы успевает образоваться второй электронный сгусток (в слабorelativistic ЛОВО — при $I_0/I_{0н} \approx 3$) [5]. В ЛОВ АД нелинейность обусловлена уменьшением средней скорости электронов в результате взаимодействия; при этом гармоника тока не уменьшается и автомодаляция возникает практически сразу за порогом возбуждения (см. выше). Аналогичные эффекты наблюдаются в ЛОВО при больших значениях релятивистского фактора [5].