

РАДИОФИЗИКА

Том XXV

ИЗДАНИЕ ГОРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
И НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО
РАДИОФИЗИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
1982

УДК 517.9

БИФУРКАЦИИ УДВОЕНИЯ В ПРОСТОЙ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ

С. П. Кузнецов

1. Как известно, многие динамические системы различной физической природы демонстрируют в зависимости от параметров либо регулярное, периодическое, либо

нерегулярное, стохастическое поведение [1]. Один из способов возникновения хаоса был открыт Фейгенбаумом [2] при изучении простой модели

$$x_{m+1} = f_\lambda(x_m). \quad (1)$$

Здесь x_m характеризует состояние системы, m — дискретное время, λ — параметр, $f_\lambda(x)$ — функция, имеющая квадратичный максимум, например, $f_\lambda(x) = \lambda(1-x^2)$. Система (1) имеет критическую точку перехода порядок—беспорядок $\lambda = \lambda_{cr}^0$ в окрестности которой поведение последовательностей x_m подчиняется не зависящему от конкретного вида функции $f_\lambda(x)$ универсальному закону подобия [2]. При приближении λ к λ_{cr}^0 снизу имеют место бифуркации удвоения периода: при $\lambda_n^0 \approx \lambda_{cr}^0 - A \delta^{-n}$ теряет устойчивость 2^n -периодическое решение (2^n -цикл) и возникает устойчивый 2^{n+1} -цикл. В критической точке ближайшие к экстремуму функции $f_\lambda(x)$ элементы 2^n - и 2^{n+1} -циклов связаны соотношением $x(2^n) = ax(2^{n+1})$. Константы $a = -2,5029$ и $\delta = 4,6692$ универсальны, а λ_{cr}^0 и A зависят от функции $f_\lambda(x)$ *. Поэтому удобно иногда использовать параметр $\Lambda = (\lambda - \lambda_{cr}^0)/A$, бифуркационные значения которого универсальны ($\Lambda_n^0 = -\delta^{-n}$). Отмеченные закономерности наблюдались в численных расчетах и в эксперименте для целого ряда систем как с дискретным, так и с непрерывным временем [2-5]. Важным следующим шагом должно стать получение аналогичных по своему характеру результатов для распределенных систем. В данной работе исследуется с этой точки зрения интересная для радиотехнических приложений модель генератора с запаздывающей обратной связью [6-8].

Рассмотрим замкнутую в кольцо цепочку из безынерционного усилителя, инерционного линейного элемента — фильтра и линии задержки [6]. Будем считать, что генерируемый сигнал задается одной, зависящей от времени величиной $x(t)$, а уравнение динамики модели имеет вид

$$x(t+T) = f_\lambda(\hat{l}x(t)). \quad (2)$$

Здесь T — время задержки, \hat{l} — линейный оператор, передаточная функция которого в области низких частот имеет вид $e^{-i\omega t} \hat{l} e^{i\omega t} = l(\omega) \approx 1 - \omega^2 \tau^2$, $\tau \ll T$. Функция $f_\lambda(x)$ характеризует нелинейные свойства усилителя, а параметр λ — глубину обратной связи.

Если зависимость $x(t)$ медленная, то из (2) следует уравнение $x(t+T) = f_\lambda(x(t))$, анализ которого сводится к изучению последовательности вида (1). Мы покажем, что модель (2), как и (1), демонстрирует бесконечную последовательность бифуркаций удвоения, и найдем бифуркационные линии на плоскости параметров $(\Lambda, T/\tau)$. Будут сформулированы гипотезы подобия и осуществлена их проверка в численном эксперименте на конкретизированной модели (2) с дискретным в масштабе τ временем:

$$x_{k+K} = \lambda(1 - (\hat{l}x_k)^2), \quad \hat{l}x_k = x_k + a(x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1}). \quad (3)$$

2. На рис. 1 представлены типичные зависимости $x(t)$ с периодом $2T, 4T, 8T$, полученные численно для модели (3). Как видно из рисунка, сигнал содержит протяженные пологие участки, на каждом из которых значение $x(t)$ близко к одному из элементов цикла отображения (1), в области быстрого изменения амплитуды — перепады между соседними элементами цикла. Перестройка перепада в результате бифуркации удвоения состоит в появлении слева и справа от него хвостов, которые обеспечивают отвечающие новому циклу значения x в середине пологих участков. Первая гипотеза подобия заключается в следующем: хвосты, образующиеся после бифуркаций разного порядка n , подобны друг другу, их характерный временной масштаб увеличивается пропорционально $2^{n/2}$, а масштаб по оси x уменьшается пропорционально разности Δx между элементами 2^{n+1} - и 2^n -циклов отображения (1). Количественная проверка этого утверждения была проведена для хвостов, опирающихся на подобные по Фейгенбауму элементы циклов в критической точке $\lambda = \lambda_{cr}^0$. Конфигурация хвоста h_n определена как разность функций $x(t)$, отвечающих (неустойчивым)

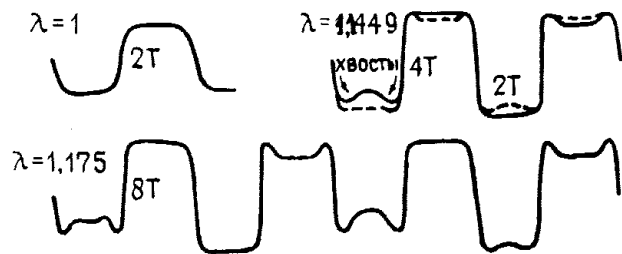


Рис. 1.

* Для $f_\lambda(x) = \lambda(1-x^2)$ значения констант таковы: $\lambda_{cr}^0 = 1,1837$, $A = 1,4291$.

2^{n+1} и 2^n -периодическим режимам, и изображена на рис. 2 в приведенных координатах $\xi = (t/\tau)2^{-n/2}$, $\eta = h_n a^n$ *. Видно, что уже при $n \geq 2$ форма хвоста хорошо описывается универсальной кривой. Совпадение графиков h_n в области $\xi \rightarrow \infty$ означает выполнение закона подобия [2], а при конечных ξ — представляет собой новый содержательный результат.

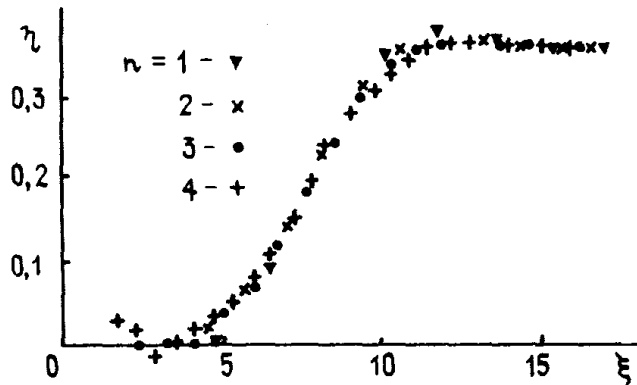


Рис. 2.

3. Согласно установленному закону подобия, длина хвоста, возникающего после n -й бифуркации, имеет порядок $2^{n/2} \tau$. Поэтому соседние перепады, разделенные интервалом T , «не чувствуют» друг друга при $2^{n/2} \tau \ll T$. Это значит, что бифуркации удвоения с номерами $n \ll N \sim 2 \log_2(T/\tau)$ происходят в модели (2) примерно при тех же значениях параметра, как и в модели (1): $\lambda_n \approx \lambda_n^0$, $\Lambda_n \approx -\delta^{-n}$. Отличие λ_n от λ_n^0 при $n \geq N$ обусловлено взаимодействием соседних перепадов посредством их хвостов. Поскольку хвосты подчиняются закону универсальности и подобия, то же самое должно относиться и к их взаимодействию. Мы ожидаем поэтому, что выполняется вторая гипотеза подобия:

$$\Lambda_n = \delta^{-n} \varphi(62^{-n/2}). \quad (4)$$

Здесь φ — универсальная функция, $\theta = T/\tau + \Delta$ — нормированный интервал между центрами подобия взаимодействующих хвостов, относящихся к соседним перепадам, Δ — безразмерная константа порядка нескольких единиц (не универсальная). Условием применимости формулы (4) является неравенство $T \gg \tau$. Действительно, только в этом случае с ростом номера бифуркации n форма хвостов успевает стать универсальной до того, как появится взаимодействие между ними.

4. Найденные численно для модели (3) при $\alpha = 1/3$ бифуркационные значения λ_n приведены в таблице. Для сокращения объема расчетов были учтены очевидные из рис. 1 приближенные свойства симметрии сигнала (использованные расчетные соотношения см. в заголовке таблицы). Параметры модели M и α определяют отношение $T/\tau = (2M-1)/\sqrt{\alpha}$.

Таблица

Бифуркационные значения параметра λ_n для модели

$$x_m^{n+1} = \lambda [1 - (y_m^n)^2], \quad y_m^n = x_m^n + \alpha (x_{m-1}^n - 2x_m^n + x_{m+1}^n),$$

$$x_{-1/2}^n = x_{1/2}^n, \quad x_{M+1/2}^n = x_{M-3/2}^n$$

	$M = 5$	6	7	8	9	10		n
λ_n	0,890128	0,882013	0,877413	0,874549	0,872647	0,871250	0,866025	1
	1,136033	1,128496	1,124846	1,122819	1,121578	1,120763	1,118034	2 λ_n^0
	1,191035	1,180209	1,175386	1,173237	1,172094	1,171419	1,169658	3
	1,202901	1,191980	1,187312	1,184826	1,183212	1,182289	1,180697	4
	1,205470	1,194552	1,189882	1,187344	1,185727	1,184835	1,183060	5
						1,185386	1,183566	6
λ_{cr}	1,206171	1,195255	1,190582	1,188040	1,186428	1,185536	1,183704	λ_{cr}^0
$\lambda_{cr}(5)$	1,205810	1,195583	1,190592	1,187943	1,186441	1,185541		

* Начало отсчета времени выбрано в центре подобия системы хвостов из условия наилучшего совпадения графиков h_4 и h_3 и лежит на расстоянии порядка τ от центра перепада.

Проверку гипотезы подобия (4) проведем в два этапа.

1) *Подобие для линии критических точек.* Из таблицы видно, что при $T/\tau = \text{const}$ значения λ_n сходятся к конечному пределу $\lambda_{cr}(T/\tau) \neq \lambda_{cr}^0$. Соотношение (4) можно согласовать с этим результатом, предположив, что $\varphi(\xi)|_{\xi \rightarrow 0} = \kappa \xi^{-\nu}$, где $\nu = 2 \log_2 \delta = 4,4463$. Полагая в (4) $n \rightarrow \infty$, получаем уравнение критической линии на плоскости (Λ, θ) :

$$\Lambda_{cr} = \kappa \theta^{-\nu} \quad \text{или} \quad (\lambda_{cr} - \lambda_{cr}^0)/A = \kappa (T/\tau + \Delta)^{-\nu}. \quad (5)$$

Константы $\kappa \approx 17910$ (универсальная) и $\Delta \approx 7,518$ были определены по совокупности имеющихся значений λ_{cr} методом наименьших квадратов и использованы для расчета λ_{cr} из (5) (последняя строка таблицы). Хорошее совпадение с результатами численного эксперимента очевидно.

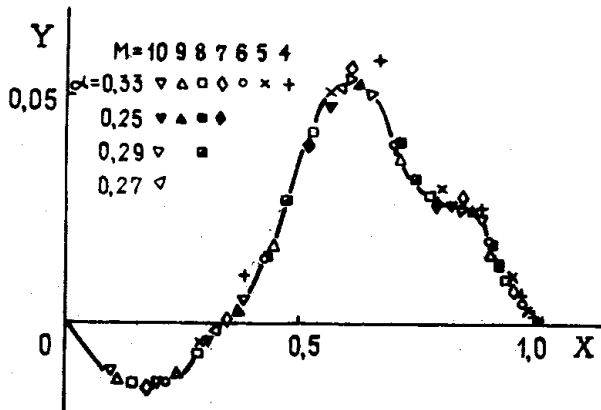


Рис. 3.

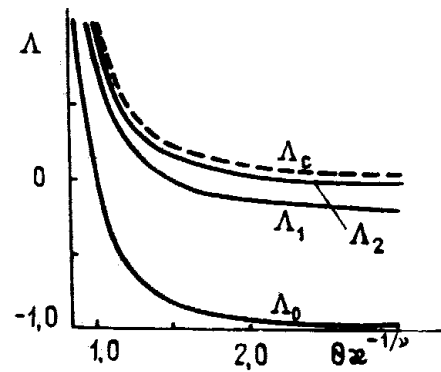


Рис. 4.

2) *Подобие для бифуркаций удвоения.* Гипотезе подобия (4) можно придать форму

$$Y = \Phi(X), \quad X = \left(\frac{\lambda_{cr} - \lambda_{cr}^0}{\lambda_{cr} - \lambda_n^0} \right)^{2/\nu}, \quad Y = \frac{\lambda_{cr} - \lambda_n - \lambda_{cr}^0 + \lambda_n^0}{\lambda_{cr} - \lambda_n^0}. \quad (6)$$

Функция Φ удобна тем, что определена на конечном отрезке $[0,1]$ и не имеет особенностей. Зависимость (4) выражается неявно через $\Phi(X)$:

$$\theta 2^{-n/2} = [\kappa (X^{-\nu/2} - 1)]^{1/\nu}, \quad \Lambda \delta^n = \frac{2X^{\nu/2} - 1 - \Phi(X)}{1 - X^{\nu/2}}. \quad (7)$$

На рис. 3 в координатах (X, Y) приводятся данные численных экспериментов, относящиеся к бифуркациям разного порядка n для нескольких значений M и α . Точки, соответствующие $T/\tau \gg 1$, ложатся на одну кривую, и это подтверждает гипотезу (4). Как и ожидалось, при уменьшении T/τ возникают отклонения от закона подобия.

На рис. 4 показаны бифуркационные линии на плоскости (Λ, θ) , построенные с помощью графика функции Φ (рис. 3) и формул (7). Заметим, что закон Фейгенбаума $\Lambda_{cr} - \Lambda_n \sim \delta^{-n}$ для нашей системы имеет место в непосредственной окрестности критической линии: $\Lambda_{cr} - \Lambda \ll \Lambda_{cr}$. Нетривиальная форма кривой $\Phi(X)$ говорит о том, что в области $|\Lambda_{cr} - \Lambda| \sim \Lambda_{cr}$ бифуркационные линии подчиняются более сложному закону, но он тоже не зависит от конкретного вида функции $f_\lambda(x)$ и характеристики фильтра $l(\omega)$.

Развитый в данной статье подход может быть полезен в применении к различным распределенным системам в тех случаях, когда соответствующая сосредоточенная (точечная) система претерпевает переход порядок — беспорядок через бифуркации удвоения периода.

Автор благодарен М. И. Рабиновичу и Д. И. Трубецкову за внимание к работе, а также А. П. Кузнецову за полезное обсуждение текста статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рабинович М. И. — УФН, 1978, 125, № 1, с. 123.
2. Feigenbaum M. J. — J. Stat. Phys., 1978, 19, № 1, p. 25.
3. Huberman B. A., Crutchfield J. P. — Phys. Rev. Lett., 1979, 43, № 23, p. 1743.

4. Franceschini V. — J. Stat. Phys., 1980, 22, p. 397.
5. Анищенко В. С., Астахов В. В., Летчфорд Т. Е., Сафонова М. А.
Изв. вузов — Радиофизика (в печати).
6. Азыян Ю. М., Мигулин В. В. — Радиотехника и электроника, 1956, 1, № 4,
с. 418.
7. Кислов В. Я., Мясин Е. А., Залогин Н. Н. — Радиотехника и электроника,
1980, 25, № 10, с. 2160.
8. Кузнецов С. П. — Изв. вузов — Радиофизика (в печати).

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию
2 июля 1982 г.
