

С.П. Кузнецов, Л.С. Согов

## К ОЦЕНКЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ МОЩНОСТИ СИГНАЛОВ, ГЕНЕРИРУЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Предложен эффективный метод расчета спектральной плотности мощности колебаний в динамических системах, основанный на теореме Пуанкаре о возвратах. Показано, что при использовании этого метода можно значительно сократить необходимые для спектральной обработки длины дискретного преобразования Фурье (ДПФ), избежать необходимости применения "окон" при анализе, получить критерий оценки длины ДПФ для достижения необходимой точности расчета.

### ВВЕДЕНИЕ

Численный спектральный анализ — один из широко распространенных способов исследования динамики нелинейных колебательных систем в регулярных и хаотических режимах. В этих целях используют алгоритмы, разработанные для оценки спектральной плотности мощности (СПМ) стационарных случайных процессов. Простейший из них состоит в том, что имеющаяся реализация длительностью  $T_p$  разбивается на некоторое число интервалов  $M$ , на каждом из которых сигнал подвергается преобразованию Фурье. Затем проводят усреднение полученных спектральных плотностей по всем  $M$  интервалам. Чем больше  $M$ , тем меньше дисперсия оценки спектральной плотности, но хуже разрешающая способность анализа. При описанной процедуре уровни сигнала на концах интервалов разбиения различаются, т.е. периодическое продолжение функции имеет разрывы, что существенно "портит" вычисляемый спектр. В частности, в окрестности каждого резкого спектрального пика (если такие имеются) появляются медленно спадающие "хвосты". Для устранения этого эффекта обычно выбирают большие длины дискретного преобразования Фурье (ДПФ) и применяют предварительную обработку временных реализаций с использованием теории "окон" [1]. В описанном выше методе расчета СПМ не используются данные о природе колебаний. Однако априорно известная информация о размерности фазового пространства динамической системы, генерирующей исследуемый сигнал, оказывается полезной для его последующей спектральной обработки. В данной работе предложен метод расчета СПМ колебаний в динамических системах, заданных дифференциальными уравнениями. В этом методе используется свойство возвращаемости изображающей точки в фазовом пространстве.

### 1. ВЛИЯНИЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ НА РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА СПМ СИГНАЛОВ

Будем рассматривать функции с ограниченным в области высоких частот спектром. Пусть  $f(t)$  — исследуемая функция  $t \in (-\infty, \infty)$ ,  $F(t)$  — функция, задающая окно для ДПФ, при этом находим спектр функции  $F(t)f(t)$ . В простейшем случае окно прямоугольное и

$$(1) \quad \begin{aligned} F(t) &= 1, & 0 \leq t \leq T, \\ F(t) &= 0, & t < 0, \quad t > T, \end{aligned}$$

где  $T$  — время анализа исследуемой функции. После ДПФ получаем спектральный ряд с шагом по частоте  $\Delta\omega = 2\pi/T$  и максимальной частотой  $\omega_m = \pi N/T$ , где  $N$  — длина преобразования Фурье. Истинный спектр  $S(\omega)$  функции  $f(t)$  при

бесконечном времени анализа связан с рассчитанным следующим выражением:

$$(2) \quad Q(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)f(t)\exp(i\omega t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tilde{\omega})\varphi(\tilde{\omega} + \omega)d\tilde{\omega},$$

где  $\varphi(\omega)$  — фурье-образ функции  $F(t)$ .

Таким образом, после ДПФ имеем функцию  $Q(\omega)$ , являющуюся сверткой искомого спектра с фурье-образом окна, который будет  $\delta$ -функцией только в предельном случае  $T \rightarrow \infty$ .

В случае прямоугольного окна

$$(3) \quad |\varphi(\omega)| = T|\sin(\omega T/2)|/(\omega T/2).$$

Заметим, что  $\varphi(\omega_i) = 0$  при  $\omega_i = 2\pi/T, 2 \cdot 2\pi/T, \dots$ . В то же время  $\varphi(0) = T$ , поэтому если функция  $f(t)$  периодическая и окно выбрано так, что время  $T$  кратно периоду  $f(t)$ , то с учетом (2) получаем  $Q(\omega_n) = S(\omega_n)$ , где  $\omega_n = 2\pi n/T$ . Это происходит вследствие того, что все спектральные составляющие  $S(\omega)$ , кроме  $n$ -й, попадают в нули функции  $\varphi(\omega)$ , и в этом случае нет искажений, связанных с ограниченностью времени анализа. Поэтому алгоритм расчета спектров, в котором учитывается это свойство ДПФ в общем случае, более эффективен по сравнению с традиционным.

Рассмотрим более подробно вопрос об ошибках, возникающих при расчете СПМ  $f(t)$ , разбитой на интервалы  $T_i = t_{i+1} - t_i$  с помощью ДПФ на ряде частот

$$\omega_n = 2\pi n/T_i, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{в случае, если } f(t_{i+1}) \neq f(t_i), \quad \frac{df(t_{i+1})}{dt} \neq \frac{df(t_i)}{dt} \text{ и т.д.}$$

Пусть  $f(t_i) \neq f(t_{i+1})$ . Устраним разрыв, для этого представим  $f(t)$  в виде произведения двух функций:  $f(t) = g(t)z(t)$ ,

где  $f(t_i) = g(t_i) = g(t_{i+1})$ ,

$$(4) \quad z(t) = 1 + \frac{(f(t_{i+1}) - f(t_i))(t - t_i)}{f(t_i)T_i}.$$

Тогда с учетом (2) спектр функции  $f(t)$  может быть представлен сверткой функций  $G(\omega)$  и  $Z(\omega)$ . Скорость убывания  $|Z(\omega)| \sim 1/\omega$  определяется первым членом уравнения (4) (второй член  $\sim t$  и убывает так же, как  $1/\omega^2$ ). Заметим, что при периодическом продолжении за пределы  $[t_i, t_{i+1}]$  функция  $g(t)$  не дифференцируема в этих точках и при вычислении (2) не все спектральные составляющие, кроме одной, попадают в нули фурье-образа функции  $z(t)$ , из-за чего и происходят искажения. Можно показать, что при совпадении на границах функции  $f(t)$  и всех ее производных до порядка  $n - 1$  включительно в окрестности спектрального пика получим  $|Z(\omega)| \sim 1/\omega^n$ , причем добиться большего, чем  $1/\omega^n$ , уменьшения увеличением времени анализа  $T_i$  невозможно. Ситуацию можно значительно улучшить, если выбирать такие  $t_i$ , при которых расстояния

$$|f(t_{i+1}) - f(t_i)|, \quad \left| \frac{df(t_{i+1})}{dt} - \frac{df(t_i)}{dt} \right| \text{ и т.д. минимальны.}$$

## 2. МЕТОД РАСЧЕТА СПМ КОЛЕБАНИЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВОЗВРАТОВ ПУАНКАРЕ

Ограничимся классом функций  $f(t)$ , производимых динамическими системами [2]. Известно, что для изображающей точки, фиксированной на аттракторе системы в момент  $t = 0$ , окруженной окрестностью размером  $O(\epsilon)$ , существует время такое, при котором изображающая точка  $\vec{X}(T)$  попадет в эту окрестность (воз-

враты Пуанкаре [3]). В общем случае нерегулярной функции  $f(t)$  для конечного  $T$  точного возврата может и не быть, поэтому зададим время  $T_m$ , на котором будем искать наилучший возврат, разбивая таким образом исследуемую функцию  $f(t)$  на отрезки временных реализаций:

$$(5) \quad \int_0^{T_p} f(t) \exp(i\omega t) dt = \sum_{i=0}^M \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t + t_i) \exp(i\omega t) dt.$$

Рассмотрим  $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f_i(t) \exp(i\omega t) dt$ . Если максимальная частота  $f(t)$  не превышает частоту Найквиста  $f_H = N/(2T_i)$ , то интеграл вычисляем точно с помощью ДПФ при  $\omega_n = 2\pi n/T_i$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , в случае, если функция  $f(t)$  периодическая и с ошибкой порядка  $\epsilon_m$  для нерегулярных колебаний, где  $\epsilon_m$  — наилучший возврат на временном интервале  $T_m$ . Таким образом, после первой итерации  $i = 1$  имеем дискретный ряд гармоник составляющих  $f(t)$ . Далее, если сигнал стохастический, то на втором шаге  $i = 2$  время наилучшего возврата  $T_2$  отличается от предыдущего, сетка частот исследуемой функции сгущается. При этом полученный уже на двух итерациях спектр не эквидистантный. В предельном случае при  $i \rightarrow \infty$  получим непрерывный спектр нерегулярной функции  $f(t)$ . На практике следует задать сетку частот, необходимую для построения спектра, и закончить итерации по  $i$  при попадании достаточного числа спектральных составляющих в каждый частотный интервал. Так как для нерегулярных колебаний на каждой итерации по  $i$  длины преобразования Фурье различаются, спектры рассчитываются на разных сетках частот и при усреднении внутри заданных частотных интервалов необходимо суммировать квадраты амплитуд.

Исследуем процесс усреднения спектральных составляющих более подробно. По определению коэффициенты спектрального ряда рассчитываются следующим образом:

$$C_{in} = 1/T_i \sum_{k=0}^{N-1} f_i(t_k) \exp(-i2\pi kn/N).$$

В свою очередь

$$f_i(t_k) = \sum_{n=0}^{N-1} C_{in} \exp(i2\pi kn/N).$$

Пусть изменение СПМ осуществляется совокупностью  $L$  фильтров с прямоугольной передаточной характеристикой  $K(\omega)$  шириной  $\Delta\omega$ , равной выбранному для построения спектра частотному интервалу. При этом искомая спектральная мощность в частотном интервале  $\Delta\omega_k$  пропорциональна среднему квадратичному отклику фильтра  $\langle Z_{1k}^2 \rangle$ , который связан с коэффициентами  $C_n$  и передаточной характеристикой:

$$(6) \quad \langle Z_{1k} \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} |C_{1n}|^2 |K(\omega)|^2 = \sum_{n=k}^{k+l} |C_{1n}|,$$

где  $k$  — номер фильтра,  $l$  — число спектральных составляющих, рассчитанных за время  $T_1$  и попавших в частотный интервал пропускания  $k$ -го фильтра  $\Delta\omega_k$ . Второе равенство в (6) имеет место вследствие того, что передаточная характеристика используемых фильтров прямоугольная. Тогда средняя СПМ в частотном интервале  $\Delta\omega_k$  за полное время  $T_p$  определяется выражением

$$(7) \quad P_k \sim \frac{\sum_{i=1}^M \langle Z_{ik}^2 \rangle T_i}{\Delta\omega_k \sum_{i=1}^M T_i}.$$

Таким образом, процедуру расчета спектра можно представить следующим образом.

1. Исключаем переходный процесс в системе, для этого проводим предварительное интегрирование уравнений. Затем фиксируем изображающую точку на аттракторе.

2. Ищем время наилучшего возврата за время  $T_m$ , заданное перед началом расчета, путем интегрирования системы дифференциальных уравнений.

3. Для того чтобы применить быстрое преобразование Фурье, разбиваем временной интервал  $T_i$  на  $2^k$  точек, в которых затем находим решение системы уравнений с новым шагом методом интегрирования дифференциальных уравнений при использовании ранее найденных решений в ближайших узлах.

4. После преобразования Фурье для найденной временной реализации усредняем полученные результаты на заданной сетке частот по формулам (6), (7).

5. Если сумма времен  $T_i$  не превышает полное время анализа  $T_p$ , заданное перед началом расчетов, возвращаемся к п. 2, в противном случае заканчиваем счет.

### 3. ПРИМЕР

На рис. 1, 2 приведены результаты расчета спектров переменной  $x(t)$  для системы Реслера в хаотическом режиме [4]. Система задается тремя дифференциальными уравнениями:

$$(8) \quad \begin{aligned} dx/dt &= -y - z, \\ dy/dt &= x + y/5, \\ dz/dt &= 1/5 + z(x - \mu), \end{aligned}$$

где  $\mu$  — параметр, при увеличении которого система из регулярного режима переходит в хаотический через удвоения периода [5]. Критическое значение параметра  $\mu = 4,23$ , т.е. при  $\mu > 4,23$  колебания становятся нерегулярными. Результаты получены при  $\mu = 5$ .

Из анализа результатов расчета (рис. 1, 2) следует вывод о большей эффективности предложенного метода по сравнению с традиционным. Можно заметить различный характер восстановления истинного спектра при увеличении времени анализа  $T_i$ . При использовании традиционного метода огибающая спектральных составляющих изменяет свою форму и в пределе  $T_i \rightarrow \infty$  стремится к истинному спектру. При этом при малых  $T_i$  форма рассчитанного спектра скорее напоминает спектр прямоугольного окна, чем спектр исследуемой функции. Во втором случае, увеличивая  $T_i$ , восстанавливаем все большее число точек, расположенных на огибающей истинного спектра, при этом ее форма не меняется. При построении рис. 1, 2 число интервалов по частоте составляет 250. Во всех вариантах полное время  $T_p = 2000$ .

Отметим еще одно важное свойство, присущее данному методу, которое связано с выбором  $T_i$  — времени анализа при расчете спектра непериодической функции для системы с различной размерностью фазового пространства. С повышением этой размерности для достижения той же точности возврата требуется значительно большее время  $T_i$ . Это свидетельствует о том, что при вычислении СПМ, как и для других статистик нерегулярных решений динамических систем, для достижения одинаковой точности расчета в системах с аттрактором большей размерности следует выбирать большие значения времени анализа. Среднее время возврата при заданной точности является тем характерным временным масштабом, который необходимо учитывать при обработке стохастических сигналов. Так как в традиционном методе расчета СПМ отсутствует информация о возвратах, для оценки времени анализа необходимо использовать другие данные, на-

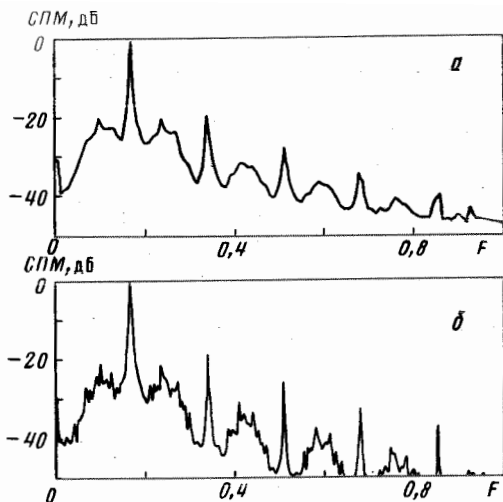


Рис. 1. СПМ колебаний в системе Реслера, рассчитанная традиционным методом при использовании прямоугольного окна при  $T = 100$  (а) и  $500$  (б)

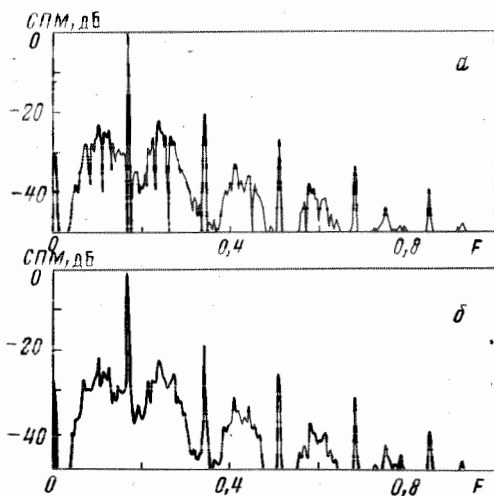


Рис. 2. СПМ колебаний в системе Реслера, рассчитанная при использовании возвратов Пуанкаре, при  $T_i < 100$  (а) и  $< 500$  (б)

пример период колебаний в системе до потери периодичности. Неверный выбор определяемого таким образом времени анализа может привести к ошибке.

Таким образом, в данной работе предложен эффективный метод расчета СПМ регулярных и нерегулярных колебаний с использованием возвратов Пуанкаре. Применяя этот метод для регулярных колебаний, можно сократить время анализа в 10 и более раз; для нерегулярных колебаний, как это следует из численных расчетов для системы Реслера, длину ДПФ удастся сократить в 5...6 раз при той же точности расчета. При использовании этого метода нет необходимости применять окна. В алгоритме для эффективной цифровой обработки сигнала используется информация о размерности фазового пространства динамической системы.

Используя этот метод, можно оптимально выбрать время анализа, за которое рассчитывается спектр регулярных и нерегулярных колебаний  $f(t)$ , так как здесь применено время возвратов, которое в среднем является характерным временным масштабом как регулярных, так и нерегулярных колебаний.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хэррис Дж. // ТИИЭР. 1978. Т. 66. № 1. С. 60.
2. Бутенин Н.Б., Неймарк Ю.И., Фурбаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987. С. 8.
3. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. С. 10.
4. Rossler O.E. // Phys. Letters. 1976. V. 57A. № 5. P. 397.
5. Фейгенбаум М. // Успехи физ. наук. 1983. Т. 141. № 2. С. 343.

Поступила в редакцию  
10 00 00