

УДК 517.9

## ВОЗДЕЙСТВИЕ ФРАКТАЛЬНОГО СИГНАЛА НА СИСТЕМУ ФЕЙГЕНБАУМА И БИФУРКАЦИЯ В УРАВНЕНИИ РЕНОРМГРУППЫ

А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов, И. Р. Сатаев

Для описания некоторых реалистичных сигналов, генерируемых динамическими системами на пороге хаоса, введена модель фрактального сигнала, имеющего фазовый портрет в виде двухмасштабного канторова множества. Показано, что воздействие такого сигнала на систему Фейгенбаума может приводить к бифуркации ренормгруппового уравнения, состоящей в слиянии и обмене характера устойчивости его неподвижных точек. С точки зрения реальной динамики, эта бифуркация соответствует смене типа критического поведения на пороге хаоса.

Значительный прогресс в нелинейной динамике был достигнут в последнее время в связи с исследованием сценариев перехода к хаосу [1]. В результате были введены в рассмотрение интересные примеры фрактальных притягивающих множеств, возникающих в фазовом пространстве динамических систем точно на пороге хаоса. Фракталы имеют иерархическую организацию, повторяя себя в бесконечно уменьшающихся масштабах, и характеризуются дробной величиной хаусдорфовой размерности [2, 3]. Простейшим примером может служить аттрактор Фейгенбаума, реализующийся в критической точке перехода к хаосу в динамических системах, демонстрирующих каскад бифуркаций удвоения периода. Этот аттрактор имеет структуру типа канторова множества с хаусдорфовой размерностью  $D_f = 0,538045$ .

Мощным инструментом теоретического исследования подобных ситуаций является метод ренормализационной группы, который в нелинейной динамике впервые был развит Фейгенбаумом [4], а затем разрабатывался многими другими исследователями. Этот подход состоит в конструировании специальной процедуры ренормпреобразования, позволяющей по известному оператору эволюции динамической системы на некотором временном интервале определить оператор эволюции на увеличенном в некоторое число раз промежутке времени. При многократном применении этой процедуры получается последовательность операторов, описывающих поведение на все больших и больших временах. В фазовом пространстве это соответствует переходу к рассмотрению динамики на все более мелких масштабах. В критической ситуации последовательность этих операторов имеет пределом некоторый универсальный оператор, который и определяет структуру фрактального притягивающего множества в фазовом пространстве.

В свете имеющихся достижений в понимании закономерностей критической динамики нелинейных систем естественным образом возникают задачи о воздействии такого рода движений друг на друга. При этом и динамика воздействующей системы, и динамика системы, подвергаемой воздействию, характеризуются иерархической организацией, охватывающей широкий диапазон масштабов в фазовом пространстве, включая сколь угодно малые. Конкуренция движений с разными масштабными свойствами может приводить, а может и не приводить к новым критическим закономерностям.

рностям в динамике второй системы. Как мы покажем, при изменении параметров воздействующего сигнала, характеризующих его масштабные свойства, возможен переход от одной ситуации к другой.

В рамках метода ренормализационной группы указанный феномен выступает как бифуркация ренормдинамики. Действительно, можно считать, что ренормпреобразование задает некоторую динамику в пространстве операторов ("ренормдинамику"), причем в качестве времени ("ренормвремени") фигурирует номер шага ренормпреобразования. Универсальный предельный оператор ассоциируется тогда с неподвижной точкой ренормпреобразования, которая, вообще говоря, может бифурцировать при изменении параметров задачи. Такая бифуркация должна проявляться и в обычной динамике, приводя к смене типа критического поведения, в том числе к перестройке структуры фрактального притягивающего множества и изменению скейлинговых констант.

1. Фрактальный сигнал. Сигнал, который мы хотели бы сконструировать, с тем, чтобы в дальнейшем изучить его воздействие на нелинейную систему, должен удовлетворять следующим условиям. Во-первых, иметь фазовый портрет в виде фрактальной структуры и обладать иерархией масштабов, а во-вторых - содержать параметры, позволяющие управлять его скейлинговыми свойствами, изменение которых могло бы вызвать бифуркацию ренормдинамики.

Определим фрактальный сигнал как заданную в дискретном времени последовательность  $y_n$ , которая строится с помощью рекуррентных соотношений

$$y_{2n} = b(1 + y_n), \quad y_{2n+1} = -a(1 + y_n), \quad (1)$$

где  $a < 1$  и  $b < 1$  - некоторые положительные константы. Начальный элемент  $y_0 = b/(1 - b)$ .

Можно показать, что такой сигнал порождается при задании надлежащего правила обхода во времени элементов двухмасштабного канторова множества [2]. Это множество получается из начального отрезка  $[-a/(1 - b), b/(1 - b)]$  посредством следующей рекуррентной схемы. На первом шаге построения отрезок делится на три части в отношении  $a, 1 - a - b, b$ , и средний интервал исключается. К каждому из оставшихся отрезков применяется такая же процедура и т.д. Фрактальная размерность предельного множества  $D$  определяется из уравнения [2]:

$$a^D + b^D = 1. \quad (2)$$

Заметим, что приведенная геометрическая трактовка и формула (2) справедливы, пока  $a + b < 1$ , так как в противном случае интервалы, из которых строится множество, начинают перекрываться. Исходное определение (1) сохраняет смысл и при нарушении указанного условия, но при этом определенная обычным образом размерность равна единице.

При  $a = 1/2, 5029$  и  $b = a^2$  построенное множество аппроксимирует аттрактор Фейгенбаума на пороге возникновения хаоса через удвоения периода, причем элементы сигнала при его конструировании с помощью формул (1) оказываются пронумерованными в правильном порядке следования во времени. Хаусдорфова размерность, вычисленная по формуле (2), в этом случае равна  $0,5245$ , что близко к точному значению  $D_F$ .

Аналогичным образом можно использовать модель (1) для описания сигналов, генерируемых отображениями более общего вида  $y_{n+1} = 1 - \lambda|y_n|^z$  с произвольным показателем степени  $z$  при критическом значении параметра  $\lambda$ . Для этого следует положить  $a = 1/b, b = 1/a^z$ , где  $a -$

масштабный фактор для данного  $z$  [5]. При  $a = b = 1/3$  элементы  $y_n$  пробегает точки классического канторова множества, расположенного на отрезке  $[-1/2, 1/2]$ . Такой сигнал естественно назвать канторовым сигналом. При  $a=1, b=0$  элементы  $y_n$  принимают только значения нуль и  $-1$ , причем порядок их следования во времени соответствует порядку следования  $R$  и  $L$  в символической записи траектории на пороге возникновения хаоса через удвоения периода [6].

Итак, многие интересные фрактальные сигналы, возникающие естественным образом в динамике нелинейных систем или конструируемые искусственно, оказываются объединены в один широкий класс, поскольку получаются по крайней мере приближенно посредством общей схемы (1) при различных значениях параметров  $a$  и  $b$ . Хотя предлагаемое построение может показаться несколько искусственным, оно представляется полезным для углубления понимания природы критических явлений в динамических системах и, в частности, создает основу для рассмотрения бифуркаций ренормдинамики.

2. Динамика системы Фейгенбаума под действием фрактального сигнала. Приближенный ренормгрупповой анализ. Пусть теперь фрактальный сигнал (1) воздействует на систему, демонстрирующую переход к хаосу через удвоения периода. Ситуация описывается модельным уравнением:

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 + c y_n, \quad (3)$$

где  $x$  - динамическая переменная,  $\lambda$  - параметр управления бифуркациями исходной системы,  $c$  - параметр интенсивности внешнего воздействия. Заметим, что в системе (3) с очевидностью возможна мультистабильность: при достаточно малых значениях  $c$  система способна совершать движения с разным сдвигом фазы относительно фрактального сигнала. Далее мы ограничимся ситуацией, когда в момент  $n = 0$  (см. определение (1)) система запускается из окрестности начала координат. Численные расчеты показывают, что при конечных  $c$  именно этот аттрактор обладает наиболее широким бассейном притяжения.

Начнем с приближенного ренормгруппового анализа в стиле [8], что позволит получить процедуру ренормпреобразования в явном виде и разобраться в качественных особенностях ренормдинамики.

Построим оператор эволюции системы за два шага дискретного времени. Рассматривая только небольшие значения динамической переменной и интенсивности внешнего воздействия, отбросим члены, содержащие  $x^4$  и  $c^2$ :

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= 1 - \lambda (1 - \lambda x_n^2 + c y_n)^2 + c y_{n+1} \approx \\ &\approx 1 - \lambda + 2\lambda^2 x_n^2 + (y_{n+1} - 2\lambda y_n) c. \end{aligned} \quad (4)$$

Воспользуемся теперь определением фрактального сигнала (1) и выразим  $y_n$  и  $y_{n+1}$  через  $y_{n/2}$ , а также выполним замену переменной

$$x_n = [1 - \lambda - (a + 2\lambda b)c] X_{n/2} \quad (5)$$

и параметров

$$\lambda_1 = 2\lambda^2 [\lambda - 1 + (a + 2\lambda b)c], \quad (6)$$

$$c_1 = c(a + 2\lambda b) / [\lambda - 1 + (a + 2\lambda b)c].$$

В результате получим отображение

$$X_{n+1} = 1 - \lambda X_n^2 + c_1 Y_n. \quad (7)$$

Итак, оператор эволюции за удвоенное время приведен с точностью до замены переменных к исходному виду (3). Это значит, что динамика двух экземпляров системы, параметры которых связаны соотношениями (6), будет подобной, различаясь в два раза по временным масштабам. Изложенную процедуру можно применить теперь к соотношению (7) и получить оператор эволюции за четыре временных шага и т.д. В результате  $m$ -кратной ренормализации приходим к отображению вида (3) с параметрами  $\lambda_n$  и  $c_n$ , которые получаются рекуррентным образом из соотношений

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} &= 2\lambda_n^2 [\lambda_n - 1 + (a + 2\lambda_n b) c_n], \\ c_{n+1} &= c_n (a + 2\lambda_n b) [\lambda_n - 1 + (a + 2\lambda_n b) c_n]^{-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Пара величин  $(\lambda_n, c_n)$  может рассматриваться как представление оператора эволюции, поскольку в данном приближении полностью определяет его. Поэтому уравнения (8) - это и есть уравнения ренормдинамики.

Если положить  $c = 0$ , можно найти неподвижную точку уравнений (8), которой отвечает  $\lambda_F = (\sqrt{3} + 1)/2$ . Эту точку естественно назвать фейгенбаумовской, так как именно она определяет критическое поведение системы при выключенном внешнем воздействии. Имеется и вторая, нефейгенбаумовская точка:

$$\lambda_{NF} = 1 / (\sqrt{a^2 + 4b + a}), \quad c_{NF} = 1 + 2\lambda_{NF} - 2\lambda_{NF}^2. \quad (9)$$

Линеаризуя отображение (8) вблизи неподвижных точек, можно проанализировать характер их устойчивости и определить соответствующие собственные числа. Для фейгенбаумовской неподвижной точки получаем

$$\delta_F^{(1)} = 4 + \sqrt{3} \approx 5,73, \quad \delta_F^{(2)} = 2\lambda_F (a + 2\lambda_F b), \quad (10)$$

а для нефейгенбаумовской

$$\begin{aligned} \delta_{NF}^{(1,2)} &= 1 - \lambda_{NF} + 2\lambda_{NF}^2 (1 + bc_{NF}) \pm \\ &\pm \sqrt{[1 - 2\lambda_{NF} + 2\lambda_{NF}^2 (1 + bc_{NF})]^2 - 2\lambda_{NF} (3\lambda_{NF} - 2)}. \end{aligned} \quad (11)$$

При  $a + 2\lambda_F b < 1/2\lambda_F$  первая точка является седлом, а вторая - неустойчивым узлом. В момент  $a + 2\lambda_F b = 1/2\lambda_F$  обе точки сливаются. При  $a + 2\lambda_F b > 1/2\lambda_F$  фейгенбаумовская точка становится неустойчивым узлом, а нефейгенбаумовская - седлом. Таким образом, при  $a + 2\lambda_F b = 1/2\lambda_F$  происходит бифуркация слияния и обмена устойчивости неподвижных точек, хорошо известная в теории бифуркаций [9]. Линия, соединяющая обе неподвижные точки, представляет собой устойчивое многообразие седла. Значения параметров исходного отображения и  $c$ , принадлежащие

этой линии, отвечают (в рассматриваемом приближении) критической ситуации перехода к хаосу. Действительно, при задании начальных  $\lambda$  и  $c$  на этой линии многократное применение ренормпреобразования (8) приводит к перемещению вдоль нее в одну из неподвижных точек. До бифуркации эта фейгенбаумовская неподвижная точка, а после бифуркации - нефейгенбаумовская. Найденная в рассматриваемом приближении бифуркационная линия на плоскости параметров фрактального сигнала  $(a, b)$  показана пунктиром на рис. 1. Области фейгенбаумовского и нефейгенбаумовского критического поведения обозначены соответственно  $F$  и  $NF$ .

Проведенный анализ позволяет также получить приближенные значения критических индексов. Константа, отвечающая за скейлинг по управляющему параметру, определяется наибольшим собственным числом седловой неподвижной точки:

$$\delta = \begin{cases} \delta_F^{(1)} = 5,73, & a + 2\lambda_F b < 1/2\lambda_F \\ \delta_{NF}^{(1)}(a, b), & a + 2\lambda_F b > 1/2\lambda_F \end{cases} \quad (12)$$

Масштабный фактор  $\alpha$  находится из соотношения (5):  $\alpha = \lambda - 1 + (a + 2\lambda b)c$ . Подставляя сюда значения  $\lambda$  и  $c$  для точки, являющейся седловой при данных  $a$  и  $b$ , имеем

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_F = 1/2\lambda_F = 2,73, & a + 2\lambda_F b < 1/2\lambda_F \\ \alpha_{NF} = 2/(a + \sqrt{a^2 + 4b}); & a + 2\lambda_F b > 1/2\lambda_F \end{cases} \quad (13)$$

Зависимости скейлинговых констант  $\delta$  и  $\alpha$  от параметра фрактального сигнала имеют характерный излом в точке бифуркации, связанный со сменой типа критической динамики. До бифуркации (ниже показанной на рис. 1 границы) это фейгенбаумовское поведение с фиксированными масштабными константами, а после нее - нефейгенбаумовское поведение с масштабными константами, зависящими от параметров  $a$  и  $b$ .

3. Точный ренормгрупповой анализ. Перейдем к строгому ренормгрупповому анализу задачи, который подтверждает качественные выводы приближенной теории и позволяет уточнить значения критических индексов и условия бифуркации на плоскости параметров фрактального сигнала  $(a, b)$ .

Получим сначала точное уравнение ренормгруппы. Обозначим правую часть (3) через  $f_0(x, y)$  и перейдем к отображению, описывающему изменение состояния за два временных шага:

$$x_{n+2} = f_0(f_0(x_n, y_n), y_{n+1}).$$

Изменяя масштаб динамической переменной  $x$  в некоторое число раз ( $-\alpha$ ) и выражая  $y_n$  и  $y_{n+1}$  через  $y_{n/2}$  в соответствии с (1), получаем новое отображение  $f_1(x, y)$ . Многократно повторяя процедуру, приходим к уравнению ренормгруппы

$$f_{n+1}(x, y) = -\alpha f_n(f_n(-x/\alpha, b(1+y)), -\alpha(1+y)). \quad (14)$$

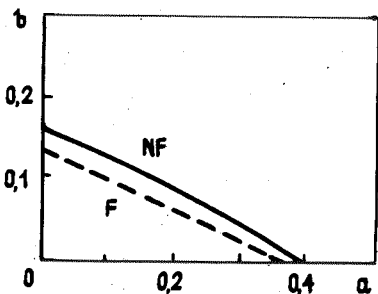


Рис. 1.

Далее основное значение будут иметь неподвижные точки данного уравнения. Получение этих решений подразумевает нахождение масштабной константы  $\alpha$  и функции  $f(x, y)$ , удовлетворяющей уравнению

$$f(x, y) = -\alpha f(f(-x/\alpha, b(1+y)), -\alpha(1+y)). \quad (15)$$

Если искать решение (14) в форме  $f_{\alpha}(x, y) = f(x, y) + \delta^n h(x, y)$ , где  $h$  - малая добавка, то в линейном приближении получаем

$$\begin{aligned} \delta h(x, y) = & -\alpha [f'(f(-x/\alpha, b(1+y)), -\alpha(1+y))h(-x/\alpha, b(1+y)) + \\ & + h(f(-x/\alpha, b(1+y)), -\alpha(1+y))]. \end{aligned} \quad (16)$$

Отсюда могут быть найдены собственные функции  $h_{\alpha}(x, y)$  и собственные числа  $\delta_{\alpha}$ , характеризующие динамику вблизи неподвижной точки.

В наших расчетах функция  $f(x, y)$  представлялась в виде разложения по полиномам Чебышева:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{M,N} u_{n,n} T_{2n}(x) T_n(y). \quad (17)$$

(Поскольку функция должна быть четной по первому аргументу, в разложении фигурируют полиномы по  $x$  только с четными индексами.) Для нахождения неподвижных точек уравнения (14) использовался метод Ньютона, в соответствии с которым новое приближение для функции  $f(x, y)$ ,

$$f_{\text{нов}}(x, y) = f(x, y) + h(x, y),$$

получается из решения уравнения

$$f(x, y) + h(x, y) = -\alpha f(f(-x/\alpha, b(1+y)), -\alpha(1+y)) + \hat{L}h(x, y), \quad (18)$$

где  $\hat{L}$  - линейный оператор, фигурирующий в (16). При использовании разложения (17) уравнение (18) превращается в систему  $M \times N$  линейных алгебраических уравнений, причем элементы матрицы оператора  $\hat{L}$  в соответствующем базисе вычислялись с использованием ортогональности полиномов Чебышева на сетке, образованной на плоскости  $(x, y)$  нулями произведения  $T_{2M+1}(x)T_{N+1}(y)$ . Значения  $2M$  и  $N$  в проводившихся расчетах достигали 10. Результаты расчетов для некоторых конкретных значений  $\alpha$  и  $b$  приведены в табл. 1.

Масштабные константы и собственные числа для нефейгенбаумовской неподвижной точки уравнения (14)

$b$	$a$	$\alpha_{NF}$	$\delta_{NF}^{(1)}$	$\delta_{NF}^{(2)}$
0	0,28571	3,50000	9,451	1,232
	0,38462	2,60000	5,03506	1,03642
0,05	0,43416	2,30329	3,99075	< 1
	0,5	2,00000	3,15823	
	0,1	3,62884	10,08665	
0,1	0,15	3,27345	8,08463	1,30943
	0,2	2,95726	6,52502	1,19965
	0	3,16228	7,42181	1,36605
0,15963	0,1	2,74442	5,57055	1,14818
	0,3	2,04806	3,33476	< 1
	0,4	1,17701	2,75770	
	0,5	1,53259	2,39421	
0,15963	0,39954	1,54945	2,44700	< 1
0,2	0,1	2,03762	3,36808	< 1
	0,2	1,83305	2,93239	
	0,3	1,62654	2,57723	
0,3	0,1	1,68773	2,71621	< 1

Для нахождения бифуркации слияния неподвижных точек подставим в (15)  $f(x, y) = g(x) + yh(x)$ , где  $g(x)$  - функция Фейгенбаума [4], а  $yh(x)$  - малая добавка. Привравнивая члены первого порядка малости, получаем следующее условие существования двукратно вырожденной неподвижной точки:

$$h(x) = -\alpha a [(b/a)g'(g(-x/\alpha))h(-x/\alpha) - h(g(-x/\alpha))]. \quad (19)$$

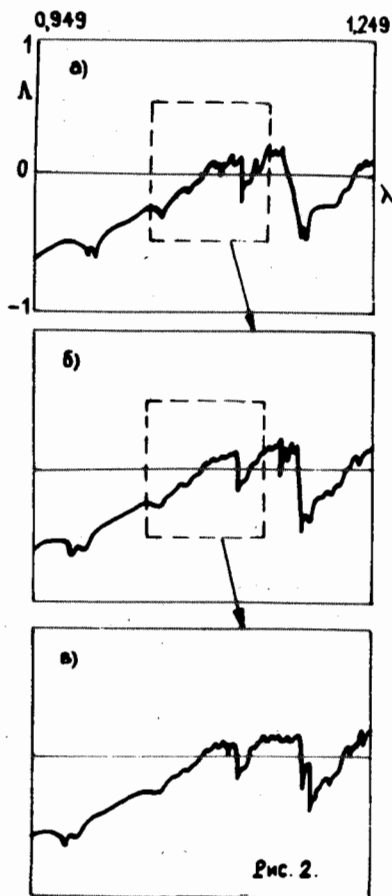
Численно эта задача решается таким образом: фиксируется отношение  $b/a = \xi$  и методом итераций находится наибольшее по модулю собственное число  $\nu$  линейного оператора, стоящего в квадратных скобках в правой части (19). Далее полагаем  $a = -1/\alpha\nu$ ,  $b = -\xi/\alpha\nu$ . На плоскости параметров  $a, b$  точки бифуркации располагаются на кривой, показанной сплошной линией на рис. 1.

4. Как проявляется бифуркация решения уравнения ренормгруппы в наблюдаемом поведении системы? Обсудим теперь перестройку критической динамики исходной системы (3), сопровождающую найденную бифуркацию ренормгруппового уравнения и выражающуюся в модификации скейлинговых свойств системы у порога хаоса.

С этой целью в первую очередь были изучены зависимости ляпуновского характеристического показателя от параметра  $\lambda$  для системы (3), относящейся к добифуркационной, "фейгенбаумовской" ситуации. Критическая точка перехода к хаосу фиксируется по переходу ляпуновского показателя через нуль. В отличие от традиционных картинок, иллюстрирующих сценарий удвоения периода, в докритической области нет четко выраженных бифуркаций: они размыты за счет влияния внешнего сигнала, который содержит компоненты со всевозможными частотами, кратными  $2^n$ . Однако при сужении рассматриваемой окрестности критической точки вид графиков все более приближается к традиционному, характерному для невозмущенного логистического отображения [1]. В соответствии с ожидаемым фейгенбаумским скейлингом получаемые при большом разрешении картинки обладают масштабной инвариантностью относительно изменения масштаба в  $\delta = 4,669$  по управляющему параметру и в два раза по ляпуновскому показателю. Наличие внешнего сигнала существенно лишь в том

отношении, что критическое значение параметра зависит от интенсивности воздействия с. Аттрактор в критической точке представляет собой классический аттрактор Фейгенбаума с размерностью  $D_F$ .

Вторая, "нефейгенбаумовская" ситуация иллюстрируется на рис. 2.



Представлена последовательность графиков, показывающих с возрастающим разрешением зависимость ляпуновского показателя от параметра  $\lambda$  вблизи критической точки для случая  $a=0,2$ ,  $b=0,2$ ,  $c=0,5$ . От картинке к картинке масштаб по вертикальной оси пересчитывается в два раза, а по горизонтальной - в 2,93239 раза, что соответствует старшему собственному числу линеаризованного преобразования ренормгруппы в нефейгенбаумовской неподвижной точке при данных  $a$  и  $b$ . Уже на втором шаге вид картинок практически перестает меняться. Это подтверждает наличие ожидаемого скейлинга, а значит, и то обстоятельство, что динамика системы на пороге хаоса связана с нефейгенбаумовской неподвижной точкой. В критической точке перехода к хаосу формируется новая фрактальная структура: тотальное воздействие внешнего сигнала на всех уровнях иерархии приводит к трансформации фейгенбаумовского аттрактора в новое притягивающее множество с иными скейлинговыми свойствами. Хаусдорфова размерность этого аттрактора зависит теперь от параметров внешнего сигнала  $a$  и  $b$ .

5. Критическая динамика в окрестности точки бифуркации уравнения ренормгруппы. Квасискейлинг. Как известно, в обычной динамике развитие процессов во времени замедляется при приближении к точке бифуркации. То же самое будет с ренормдинамикой, если управляющие параметры  $a$  и  $b$  выбрать вблизи бифуркационной кривой рис. 1.

Ренормдинамика на устойчивом многообразии неподвижной точки происходит тем медленнее, чем мы ближе к точке бифуркации. В рамках приближенного ренормгруппового анализа уравнение медленных движений можно найти, если положить в первом уравнении (8)  $\lambda_{n+1} = \lambda_n \approx \lambda_F$ . Тогда из него получаем

$$\lambda_n = \lambda_F - \frac{a + 2\lambda_F b}{2 - 1/\lambda_F} c_n$$

и после подстановки во второе уравнение (8) имеем

$$c_{n+1} = 2\lambda_F (a + 2\lambda_F b) c_n - \frac{a + 4\lambda_F b}{2\lambda_F - 1} c_n^2. \quad (20)$$

Теперь можно перейти от дискретного ренормвремени к непрерывному



$$\frac{dc}{dm} = \varepsilon c - \frac{a + 4\lambda_F b}{2\lambda_F - 1} c^2, \quad (21)$$

где  $c = 2\lambda_F(a + 2\lambda_F b) - 1$  - величина надкритичности.

В реальной динамике системы (3) приближение к точке бифуркации ренормгруппового уравнения будет выражаться в том, что для наблюдения скейлинга, связанного с той или иной неподвижной точкой ренормгруппового уравнения, необходимо спускаться на все более глубокие уровни разрешения фрактальной структуры. Требуемую глубину уровня можно оценить по формуле, вытекающей из (21):

$$m \sim \text{const}/\varepsilon. \quad (22)$$

Ситуацию, возникающую в непосредственной близости к точке бифуркации уравнения ренормгруппы, можно охарактеризовать термином квазискейлинг: численные расчеты показывают, что при переходе с одного уровня разрешения на другой график ляпуновского показателя почти не меняется при пересчете масштабов, хотя на самом деле происходит очень медленная эволюция этих картинок.

6. Объяснение критического поведения двух систем Фейгенбаума с однонаправленной связью. В работе [10] численно для модельной системы двух логистических отображений с однонаправленной связью и экспериментально для системы однонаправленно связанных нелинейных колебательных контуров, возбуждаемых периодическим внешним воздействием, был обнаружен новый тип критического поведения, названный бикритическим. Он реализуется в определенной точке на плоскости управляющих параметров подсистем, которая характеризуется тем, что при сколь угодно малом увеличении параметра первой или второй подсистемы возникает хаос соответственно в первой или второй подсистеме. В окрестности этой точки имеет место универсальная конфигурация областей на плоскости параметров, характеризующаяся двухпараметрическим скейлингом: она переходит в себя при изменении масштабов по осям координат в  $\delta^{(1)} = 4,6692$  и  $\delta^{(2)} = 2,39$  раза. Этому соответствует пересчет масштаба динамических переменных подсистем в  $\alpha^{(1)} = 2,5029$  и  $\alpha^{(2)} = 1,51$  раза.

Эти результаты находят свое объяснение в рамках более широкой картины, построенной в настоящей работе. Если первая система находится точно на пороге возникновения хаоса, то она генерирует фрактальный сигнал, приближенно описываемый моделью (1), которому соответствует определенная точка на плоскости  $(a, b)$  (рис. 1). Эта точка лежит выше бифуркационной кривой, поэтому поведение второй системы при переходе к хаосу будет определяться нефейгенбаумовской неподвижной точкой с константами скейлинга, равными, согласно табл. 1, 1,549 и 2,447. Видно, что они находятся в хорошем соответствии с найденными в [10] константами  $\alpha^{(2)}$  и  $\delta^{(2)}$ .

7. Заключительные замечания. Итак, мы показали, что в зависимости от параметров  $a$  и  $b$ , задающих масштабные свойства внешнего сигнала, происходит следующее. При малых  $a$  и  $b$  переход к хаосу в рассматриваемой системе подчиняется фейгенбаумовскому скейлингу с не зависящими от  $a$  и  $b$  классическими значениями масштабных констант  $\delta = 4,6692$  и  $\alpha = 2,5029$ . После перехода через некоторую критическую линию в плоскости  $a, b$  скейлинговые свойства динамики у порога хаоса начинают зависеть от  $a$  и  $b$ . Это напоминает ситуацию, имеющую место в теории фазовых переходов, когда размерность пространства, рассматриваемая как непрерывный параметр, переходит через критическое значение  $d = 4$ . При этом уравнение (21) медленной ренормдинамики в окрестности точки бифуркации совпадает с точностью до вида коэффициентов с классическим уравнением Вильсона - Фишера [7].

Доверившись полностью указанной аналогии, можно было бы думать, что в нашей задаче подходящим управляющим параметром должна служить фрактальная размерность воздействующего на систему сигнала. Это, однако, не так: бифуркационная кривая на плоскости  $(\alpha, b)$  не совпадает с линиями равной фрактальной размерности. Аналогия имеет скорее методологическое значение. Действительно, мы знаем, что включение задач теории фазовых переходов в более широкий класс, содержащий и нефизические ситуации, оказалось плодотворным для их понимания и приближенного описания. Точно так же анализ влияния искусственно сконструированного сигнала (1) на динамику системы Фейгенбаума проливает свет на особенности поведения таких систем под воздействием реалистичных фрактальных сигналов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шустер Г. Детерминированный хаос. - М.: Мир, 1988. - 240с.
2. Halsey T., Jensen M., Kadanoff L. et al. //Phys.Rev. 1986. V.33. N 2. P.1141.
3. Aurelli E. //J.Stat.Phys. 1987. V.47. N 3-4. P.439.
4. Фейгенбаум М. //УФН. 1983. Т.141. N 2. С.343.
5. Hu B., Sattia I. //Phys.Lett. 1983. V.A98. P.143.
6. Procaccia I., Thomee S., Tresser C. //Phys.Rev. 1987. V.A35. N 4. P.1884.
7. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. - М.: Мир, 1978. Т.1. С.394.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. - М.: Наука, 1986. С.173.
9. Иосс Ж., Джоэф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. - М.: Мир, 1983. - 300с.
10. Безручко Б. П., Гуляев Д. В. и др. //ДАН СССР. 1986. Т.287. N 3. С.619.

Саратовский филиал Института  
радиотехники и электроники  
АН СССР

Поступила в редакцию  
8 февраля 1990 г.,  
после доработки  
2 июля 1990 г.

## INFLUENCE OF FRACTAL SIGNAL ON FEIGENBAUM SYSTEM AND BIFURCATION IN RENORMALIZATION GROUP EQUATION

A. P. Kuznetsov, S. P. Kuznetsov, I. R. Sataev

The model of fractal signal having a phase portrait in a form of two-scale Cantor set is introduced for the description of some real signals generated by dynamical systems at an onset of the chaos. It is shown that the influence of such a signal on Feigenbaum system can lead to a bifurcation of the renormalization group equation, consisting of coincidence and exchange of stability of two fixed points. From the point of view of the real dynamics this bifurcation corresponds to the change of a type of critical behaviour at the onset of the chaos which is illustrated by demonstration of scaling properties of Lyapunov exponents. The effect of quasi-scaling in the vicinity of the bifurcation point is considered. The laws of transition to chaos in two one-directionally coupled Feigenbaum system are explained on the basis of the conception developed.