

УДК 534.015; 537.86:519

ДИНАМИКА ОДНОНАПРАВЛЕННО СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ ФЕЙГЕНБАУМА У ПОРОГА ГИПЕРХАОСА. БИКРИТИЧЕСКИЙ АТТРАКТОР

А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов, И. Р. Сатаев

Предполагается, что бикритическая точка располагается на плоскости управляющих параметров двух логистических отображений с однонаправленной связью там, где сходятся линии перехода к хаосу в обеих подсистемах. Рассмотрены характеристики глобальных скейлинговых свойств (σ -функции, $f(\alpha)$ -спектры, обобщенные размерности) бикритической динамики. Показано, что бикритичность может наблюдаться также в цепочках, состоящих более чем из двух элементов.

1. Введение. После того, как установились наиболее фундаментальные концепции хаотической динамики маломерных нелинейных систем, наметился многообещающий подход к анализу более сложных, распределенных систем, состоящий в рассмотрении решеток связанных отображений, конструируемых из ячеек с известными динамическими свойствами [1 - 7]. В большинстве случаев это решетки отображений типа Фейгенбаума, демонстрирующих переход к хаосу через бифуркации удвоения периода. Ряд интересных результатов получен, в частности, в случае решеток с однонаправленной связью, предложенных для моделирования турбулентности в потоковых системах [6, 7]. Это пространственные удвоения периода, насыщение размерности аттрактора вниз по потоку, пространственно-временной хаос, генерация движущихся доменных стенок при наличии малого случайного возмущения и т. д. В работе [1] был обнаружен новый, нефейгенбаумовский тип критического поведения, который может быть реализован уже в случае двух однонаправленно связанных систем, демонстрирующих удвоения периода. Подходящим примером является модельное отображение

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad y_{n+1} = 1 - \lambda y_n^2 - Bx_n^2, \quad (1)$$

где x и y - динамические переменные двух связанных систем, λ и λ - управляющие параметры и B - константа связи. Упомянутое критическое поведение реализуется, если одновременно вывести первую систему посредством λ и вторую систему посредством λ точно на порог хаоса.

(Для системы (1) при $B = 0,375$, $\lambda_c = 1,40115519$, $\lambda_s = 1,12498140$). Соответствующая точка на плоскости λ, A была названа в [11] бикритической точкой вследствие естественной аналогии с фазовыми переходами. Этот термин обозначает обычно точку, где сходятся две различные линии фазовых переходов второго рода.

Бикритическое поведение с очевидностью отвечает возникновению динамического режима с двумя положительными ляпуновскими показателями, так называемого гиперхаоса [12]. В работе [13] был развит ренормгрупповой анализ бикритической ситуации и вскрыты соответствующие свойства универсальности и скейлинга. Настоящая статья является логическим продолжением [13]. Мы рассмотрим геометрическую структуру бикритического аттрактора, введем σ -функции, описывающие его глобальные скейлинговые свойства, обсудим $f(\alpha)$ -спектры, обобщенные размерности, а также покажем возможность реализации бикритичности в более сложных решеточных системах.

2. Геометрия бикритического аттрактора. Как мы сейчас увидим, аттрактор в бикритической точке представляет собой весьма интересный пример мультифрактального множества, вложенного в двумерное фазовое пространство (x, y) . Чтобы понять его геометрическую природу, напомним сначала известную процедуру построения аттрактора Фейгенбаума [10, 15]. Для этого итерируют отображение $x_{n+1} = 1 - \lambda_c x_n^2$, $x_0 = 0$, получая последовательность x_1, x_2, x_3, \dots . Тогда нулевой уровень построения есть отрезок $[x_1, x_2]$, первый уровень - это объединение двух отрезков $[x_1, x_3]$ и $[x_2, x_4]$, второй уровень есть объединение четырех отрезков $[x_1, x_5]$, $[x_2, x_6]$, $[x_3, x_7]$, $[x_4, x_8]$ и т.д. Каждое множество, получаемое на некотором шаге построения, содержит все последующие множества. Возникающий в пределе объект и есть аттрактор Фейгенбаума.

Чтобы построить бикритический аттрактор, возьмем начальную точку $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ и найдем итерациями (1) последовательность пар (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) ... Нулевому уровню построения будет отвечать теперь прямоугольник с противолежащими вершинами в точках (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Обозначим его

$$\Pi_0 = [(x_1, y_1), (x_2, y_2)]. \quad (2)$$

Первый уровень будет представлен двумя прямоугольниками с противолежащими вершинами соответственно (x_1, y_1) , (x_3, y_3) и (x_2, y_2) , (x_4, y_4) :

$$\Pi_1 = [(x_1, y_1), (x_3, y_3)] \cup [(x_2, y_2), (x_4, y_4)]. \quad (3)$$

Далее продолжаем построение, как показано на рис. 1. На n -м уровне имеем

$$\Pi_n = \bigcup_{i=1}^{2^n} [(x_i, y_i), (x_{i+2^n}, y_{i+2^n})]. \quad (4)$$

Бикритический аттрактор получается в пределе $n \rightarrow \infty$.

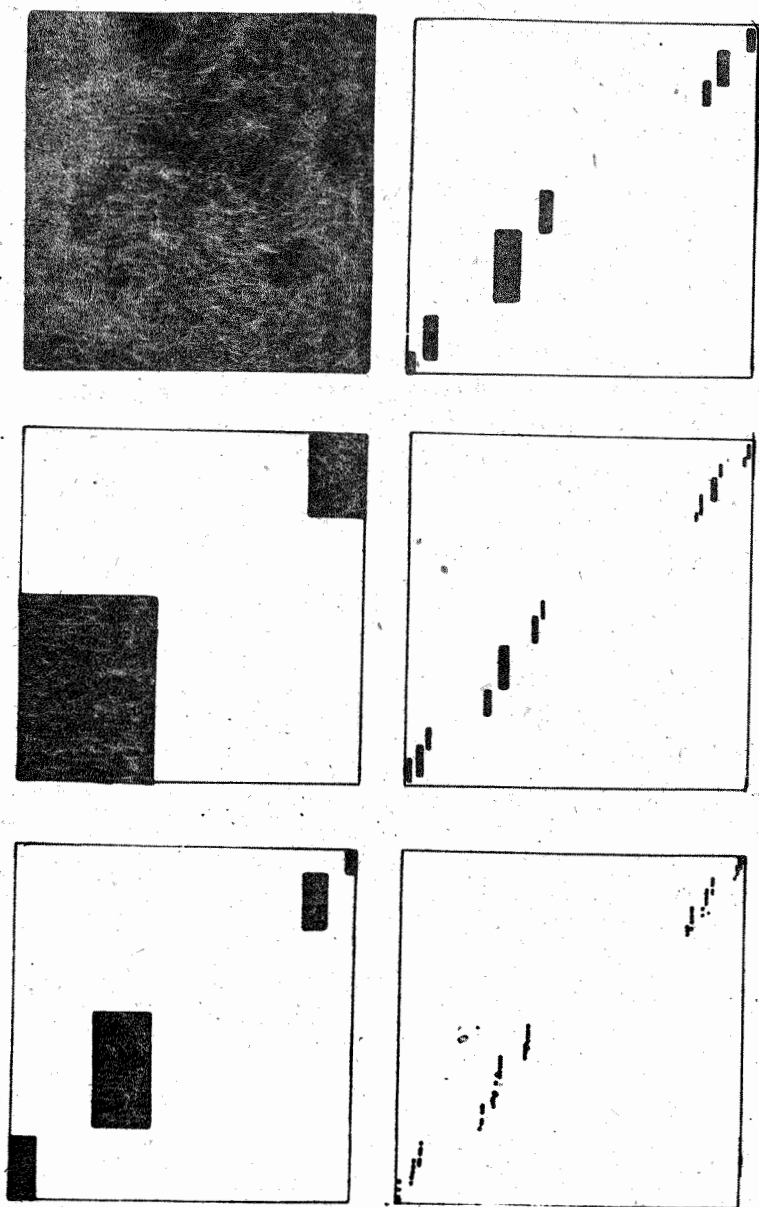


Рис. 1.

Оценим хаусдорфову размерность этого множества. На n -м уровне построения оно аппроксимировано 2^n прямоугольниками размера $l_1 \times L_1$. Для больших n эти прямоугольники вытягиваются вдоль оси y , так что $L_1 \gg l_1$ (см. рис. 1 и последующее обсуждение функций σ_x и σ_y). Число квадратиков размера l_1 , необходимых для покрытия i -го прямоугольника, оценивается как L_1/l_1 . Следуя известному определению хаусдорфовой размерности D [14], рассмотрим сумму l_1^D по всем квадратикам и прямоугольникам

$$S_n = \sum_{i=1}^{2^n} (L_1/l_1)/l_1^D \quad (5)$$

и выберем величину D так, чтобы обеспечить конечность S_n при $n \rightarrow \infty$. Численный расчет дает $D = 1,0794$.

3. Характеристики бикритического аттрактора. Для глобального описания масштабных свойств бикритического аттрактора введем по аналогии с Фейгенбаумом [8, 9] две функции σ_x и σ_y :

$$\sigma_x(m/2N) = \frac{x'_m - x'_{m+N}}{x_m - x_{m+N/2}}, \quad \sigma_y(m/2N) = \frac{y'_m - y'_{m+N}}{y_m - y_{m+N/2}} \quad (6)$$

где m и $N = 2^n$ стремятся к бесконечности, x_m , y_m и x'_m , y'_m - элементы циклов периода N и $2N$ для отображения (1) в бикритической точке. Эти функции, найденные численно, показаны на рис. 2а (σ_x - слева, σ_y - справа). Вследствие независимости динамики первой подсистемы функция σ_x совпадает с известной функцией Фейгенбаума. С другой стороны, σ_y есть новая универсальная функция, описывающая масштабные свойства y -проекции бикритического аттрактора. Тот факт, что $|\sigma_x| > |\sigma_y|$, говорит о том, что расщепление траекторий по y -направлению уменьшается медленнее, чем по x -направлению при увеличении разрешения структуры аттрактора. Функция σ_y , так же как σ_x , имеет разрывы во всех двоичных рациональных точках $m/2^n$. Отметим, что неравномерность тонкой структуры для σ_y выражена сильнее, чем для σ_x .

Известно, что для σ_x справедливы соотношения

$$\sigma_x(+0) \rightarrow 1/a^2, \quad \sigma_x(1/2-0) \rightarrow 1/|a|, \quad a = -2,50291. \quad (7)$$

Аналогично для σ_y можно найти, что

$$\sigma_y(+0) \rightarrow 1/b^2, \quad \sigma_y(1/2-0) \rightarrow 1/|b|, \quad b = -1,50532. \quad (8)$$

Грубо можно представить σ_x и σ_y двумя ступеньками уровня (7) и (8). Это соответствует аппроксимации бикритического аттрактора мультифракталом, дающим при проецировании на оси координат двухмасштабные канторовы множества [15] с параметрами $1/a$, $1/a^2$ и $1/b$, $1/b^2$. Для аттрактора Фейгенбаума подобная аппроксимация дает, в частности, полезные приближенные выражения для спектра мощности, размерностей, $f(\alpha)$ - спектра и т.д., которые нетрудно обобщить применительно к y -проекции аттрактора.

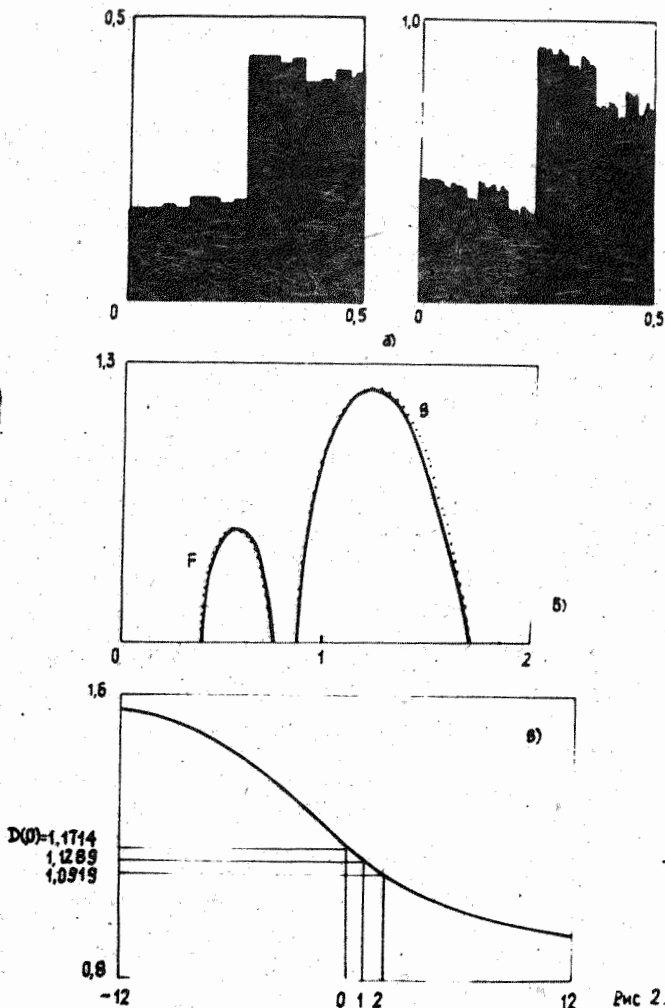


Рис. 2.

Перейдем к оценке спектра масштабных индексов $f(\alpha)$. Мы будем смотреть на этот спектр скорее как на атрибут сигнала, генерируемого "черным ящиком", нежели как на характеристику бикритического аттрактора. Имея два сигнала x и y , ограничимся их независимой обработкой. Используя процедуру [15], определим функцию разбиения на n -м уровне разрешения

$$\Gamma_n = \sum_{i=1}^{2^n} p_i^q / l_i^\tau \quad (9)$$

где $p_i = 1/2^n$, $l_i = |x_i - x_{i+2^n}|$ или $|y_i - y_{i+2^n}|$, x_i , y_i — последовательности, генерируемые отображением (1) в бикритической точке, с нулевыми начальными условиями. Далее потребуем, чтобы Γ_n оставались конечными при $n \rightarrow \infty$ и положим

$$q = \frac{1}{n} \log_2 \left| \sum_{i=1}^{2^n} l_i^{-\tau} \right|. \quad (10)$$

Следуя [15], получаем $f(\alpha)$ -спектр в параметрической форме

$$\alpha = d\tau/dq, \quad f = \alpha q - \tau. \quad (11)$$

В двухмасштабном приближении сумма Γ_{n+1} может быть получена из Γ_n заменой каждого члена p_i^q / l_i^τ на два:

$$\frac{|a|^\tau}{2^q} \frac{p^q}{l^\tau} + \frac{|a|^{2\tau}}{2^q} \frac{p^q}{l^\tau} \text{ для } x \quad \text{и} \quad \frac{|b|^\tau}{2^q} \frac{p^q}{l^\tau} + \frac{|b|^{2\tau}}{2^q} \frac{p^q}{l^\tau} \text{ для } y.$$

Итак, имеем $\Gamma_{n+1} = (|a|^\tau + |a|^{2\tau}) 2^{-q} \Gamma_n$ для x и $\Gamma_{n+1} = (|b|^\tau + |b|^{2\tau}) 2^{-q} \Gamma_n$ для y . Отсюда находим соответственно $q = \log_2(|a|^\tau + |a|^{2\tau})$ и $q = \log_2(|b|^\tau + |b|^{2\tau})$ и получаем α и f из (11) аналитически.

На рис. 2б приведены $f(\alpha)$ спектры, порождаемые обеими переменными x и y . Точечные линии отвечают двухмасштабной аппроксимации, а сплошные — точному численному расчету. Для первой переменной x получаем, конечно, традиционную фейгенбаумовскую форму $f(\alpha)$ [15], тогда как второй спектр совершенно иной. Он расположен в интервале изменения α от $1/\log_2 b^2 = 0,84736$ до $1/\log_2 |b| = 1,69472$ и имеет экстремум $f_{\max}^{(y)} = D_0^{(y)} \approx 1,1714$. Можно было бы предположить, что эта величина должна давать хаусдорфovu размерность y -проекции бикритического аттрактора. Это, однако, не так из-за перекрытия y -проекций различных элементов построения множества (см. рис. 1). Это выражается и в том, что $D_0^{(y)} > 1$. Несмотря на это, $D_0^{(y)}$ может рассматриваться как некоторая размерность, отражающая масштабные свойства переменной y . С теми же оговорками можно ввести целое семейство обобщенных размерностей $D_q^{(y)} = \tau / (1 - q)$ [14]. Их график показан на рис. 2в, где некоторые важные точки отмечены соответствующими численными значениями.

4. Решеточные системы. Бикритичность - широко распространенный тип универсального поведения указанного класса систем, реализуемый типичным образом при наличии не менее двух управляющих параметров. Его можно встретить не только в системах из двух связанных элементов, но также в цепочках из большего их числа. Например, в системе трех элементов

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad y_{n+1} = 1 - Ay_n^2 - Bx_n^2, \quad z_{n+1} = 1 - Cz_n^2 - Dy_n^2 \quad (12)$$

можно наблюдать следующие бикритические ситуации.

1) Положим $\lambda < \lambda_c$, что обеспечивает в первой системе некоторый устойчивый цикл. Выберем затем A так, чтобы реализовать фейгенбаумовскую критическую ситуацию во второй системе, а C так, чтобы в третьей системе получить бикритичность. Эта ситуация может быть описана с помощью диаграммы

$$P \longrightarrow F \longrightarrow B,$$

где P обозначает периодическое движение, F - фейгенбаумовскую критическую динамику и B - бикритическую динамику. Расчеты показывают, что такое состояние решетки можно реализовать, например, при следующих значениях параметров: $\lambda = 1$, $A = 1, 272008$, $B = 0, 25$, $C = 1, 128102$, $D = 0, 375$.

2) Положим $\lambda = \lambda_c$ и $A = A_c$ для данного B и небольших C и D . Тогда вторая система будет в бикритическом состоянии, тогда как третья совершает вынужденное (синхронизованное) движение со скейлинговыми свойствами, присущими бикритичности:

$$F \longrightarrow B \longrightarrow B.$$

Эта ситуация наблюдается, например, при значениях параметров $\lambda = 1, 401155$, $A = 1, 124981$, $B = 0, 375$, $C = 0, 6$, $D = 0, 375$.

3) Для $\lambda = \lambda_c$ и небольших A и B имеем фейгенбаумовское критическое состояние в первой системе и синхронизованное движение второй системы с теми же скейлинговыми свойствами. При подходящем выборе C для данного D можно получить бикритичность в третьей системе:

$$F \longrightarrow F \longrightarrow B.$$

Эта ситуация наблюдается при значениях параметров $\lambda = 1, 401155$, $A = 0, 8$, $B = 0, 375$, $C = 1, 179791$, $D = 0, 375$.

Аналогичные соображения, с очевидностью, применимы к решеткам, составленным из большего числа элементов. Например, в решетке из 4

элементов могут быть реализованы состояния, характеризующиеся следующими диаграммами:

$$\begin{array}{ll}
 P \longrightarrow P \longrightarrow F \longrightarrow B, & F \longrightarrow F \longrightarrow F \longrightarrow B, \\
 P \longrightarrow F \longrightarrow F \longrightarrow B, & F \longrightarrow F \longrightarrow B \longrightarrow B, \\
 P \longrightarrow F \longrightarrow B \longrightarrow B, & F \longrightarrow B \longrightarrow B \longrightarrow B,
 \end{array}$$

Ясно, что степень разнообразия возможных ситуаций возрастает с увеличением числа элементов в решетке. Все они, однако, легко описываются с помощью подобных диаграмм.

Проведенное рассмотрение убеждает, что объединение в решетку даже простейших систем, демонстрирующих переход к динамическому хаосу, приводит к новым вариантам критических закономерностей. Постепенное "подключение" ячеек к решетке в ситуации односторонней связи - это возможный путь исследования данных критических состояний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kaneko K. // *Progr. Theor. Phys.* 1984. V. 72. P. 480.
2. Crutchfield J.P., Kaneko K. *Phenomenology of Spatio-Temporal Chaos//Directions in Chaos*, ed. by Hao Bai-lin, World Scientific Publ. Co, Singapore, 1987. P. 272.
3. Waller I., Kapral R. // *Phys. Rev.* 1984. V. A30. P. 2047.
4. Bunimovich L.A., Sinai Ya.G. // *Nonlinearity.* 1988. V. 1. P. 491.
5. Кузнецов С. П. // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1982. Т. 25. С. 1366.
6. Kaneko K. // *Phys. Lett.* 1985. V. A111. P. 321.
7. Aranson I.S., Gaponov-Grekhov A.V., Rabonovich M.I. // *Physica.* 1988. V. D33. P. 1.
8. Feigenbaum M.J. // *J. Stat. Phys.* 1979. V. 21. P. 669.
9. Feigenbaum M.J. // *Comm. Math. Phys.* 1980. V. 77. P. 65.
10. Вул Е. В., Синай Я. Г., Ханин К. М. // *УМН.* 1984. Т. 39. Вып. 3. С. 3.
11. Безручко Б. П., Гуляев Ю. В. и др. // *ДАН СССР.* 1986. Т. 287. С. 619.
12. Rössler O.E. // *Phys. Lett.* 1979. V. A71. P. 155.
13. Кузнецов С. П. // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1990. Т. 33. N 7. С. 788.
14. Farmer J.D. // *Physica.* 1982. V. D4. P. 366.
15. Halsey T.S., Jensen M.H. et al. // *Phys. Rev.* 1986. V. A33. P. 1141.

16. Huberman B., Zisook A.//Phys. Rev. Lett. 1981. V.26. P. 626;
Nauenberg M., Rudnik J.//Phys. Rev. 1981. V. B24. P. 493.

Саратовский филиал Института
радиотехники и электроники РАН

Поступила в редакцию
16 октября 1990 г.

DYNAMICS OF FEIGENBAUM SYSTEMS WITH UNIDIRECTIONAL COUPLING
NEAR ONSET OF HYPERCHAOS. BICRITICAL ATTRACTOR

A. P. Kuznetsov, S. P. Kuznetsov, I. R. Sataev

The bicritical point exists in a plane of control parameters of two logistic maps with unidirectional coupling, where the lines of transition to chaos in both subsystems come together. A geometrical structure of bicritical attractor is presented as direct production of two Cantor-like sets. The characteristics of global scaling properties are introduced such as σ -functions, $f(\alpha)$ -spectra, generalized dimensions. It is demonstrated that the bicriticality may be observed also in chains of more than two cells.