



## СВОЙСТВА СКЕЙЛИНГА ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ ЛОГИСТИЧЕСКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПОД ВНЕШНИМ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

*Н.Ю. Иваньков*

Методом ренормализационной группы исследовано влияние внешнего периодического возмущения на систему, описываемую логистическим отображением. Показано, что для рациональных частот воздействия пространство параметров модельного отображения обладает свойствами самоподобия вблизи критической точки, причем факторы масштабного преобразования определяются собственными числами линеаризованного уравнения ренормализационной группы.

### Введение

Как известно, широко распространены диссипативные динамические системы, демонстрирующие переход от порядка к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода [1–3]. Поведение таких систем хорошо моделируется одномерными отображениями вида

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (1)$$

где  $x$  – динамическая переменная;  $n$  – дискретное время;  $f(x)$  – гладкая функция, отображающая некоторый отрезок оси  $x$  в себя и имеющая на этом отрезке единственный квадратичный максимум. Примером может служить логистическое отображение

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2, \quad (2)$$

свойства которого изучены весьма подробно. С увеличением параметра  $\lambda$  в системе (2) наблюдается переход к хаосу через бесконечную последовательность бифуркаций удвоения периода. Последовательность бифуркационных значений параметра сходится к  $\lambda_c = 1.40116\dots$  [4–6].

В настоящей работе рассматривается воздействие малого периодического возмущения на систему, описываемую рекуррентным уравнением (2). Так как  $\lambda$  – единственный существенный параметр модели, то именно его периодическое изменение и изучается.

Итак, анализируется следующая модель [7–9]:

$$x_{n+1} = [\lambda + \varepsilon \cos(2\pi\omega n + \varphi)] - x_n^2, \quad (3)$$

где  $\varepsilon$  – амплитуда;  $\varphi$  – начальная фаза внешней периодической силы;  $\omega$  – число

вращения, характеризующее соотношение периодов собственного движения и внешнего воздействия.

Цель работы состоит в выявлении и иллюстрации свойств скейлинга пространства параметров отображения (3). Можно ожидать, что закономерности динамики системы с внешним периодическим воздействием окажутся универсальными в той же степени, как и закономерности Фейгенбаума, характерные для отображения (2).

Данная работа существенно опирается на результаты работ [8,9], в которых был развит метод ренормализационной группы (РГ), пригодный для исследований рассматриваемой системы в области малых амплитуд воздействия.

## 1. Ренормгрупповой анализ

Чтобы понять природу закономерностей скейлинга, применим к исследуемому отображению метод РГ, как это было проделано в работе [9] и подобно тому, как этот метод был использован для анализа логистического отображения [4–6, 10].

Рассмотрим отображение

$$x_{n+1} = f_0(x_n) + \varepsilon [Q_0(x_n) \cos 2\pi\omega_0 n + P_0(x_n) \sin 2\pi\omega_0 n], \quad (4)$$

в котором  $f_0(x)$  – гладкая функция с единственным квадратичным экстремумом. Так как амплитуды косинус- и синус-компонент внешнего периодического воздействия задаются функциями динамической переменной  $x$ , то отображение (4) является более общим, чем (3). Выполним отображение (4) дважды, выразив таким образом  $x_{n+2}$  через  $x_n$

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= f_0(x_{n+1}) + \varepsilon [Q_0(x_{n+1}) \cos 2\pi\omega_0(n+1) + P_0(x_{n+1}) \sin 2\pi\omega_0(n+1)] = \\ &= f_0(f_0(x_n) + \varepsilon [Q_0(x_n) \cos 2\pi\omega_0 n + P_0(x_n) \sin 2\pi\omega_0 n]) + \\ &+ \varepsilon \{Q_0(f_0(x_n) + \varepsilon [Q_0(x_n) \cos 2\pi\omega_0 n + P_0(x_n) \sin 2\pi\omega_0 n]) \cos 2\pi\omega_0(n+1) + \\ &+ P_0(f_0(x_n) + \varepsilon [Q_0(x_n) \cos 2\pi\omega_0 n + P_0(x_n) \sin 2\pi\omega_0 n]) \sin 2\pi\omega_0(n+1)\} \approx \\ &\approx f_0(f_0(x_n)) + f_0'(f_0(x_n)) \varepsilon Q_0(x_n) \cos 2\pi\omega_0 n + f_0'(f_0(x_n)) \varepsilon P_0(x_n) \sin 2\pi\omega_0 n + \\ &+ \varepsilon Q_0(f_0(x_n)) \cos 2\pi\omega_0 n \cos 2\pi\omega_0 - \varepsilon Q_0(f_0(x_n)) \sin 2\pi\omega_0 n \sin 2\pi\omega_0 + \\ &+ \varepsilon P_0(f_0(x_n)) \sin 2\pi\omega_0 n \cos 2\pi\omega_0 + \varepsilon P_0(f_0(x_n)) \cos 2\pi\omega_0 n \sin 2\pi\omega_0 = \\ &= f_0(f_0(x_n)) + \varepsilon \{ [f_0'(f_0(x_n)) Q_0(x_n) + Q_0(f_0(x_n)) \cos 2\pi\omega_0 + P_0(f_0(x_n)) \sin 2\pi\omega_0] \cos 2\pi\omega_0 n + \\ &+ [f_0'(f_0(x_n)) P_0(x_n) - Q_0(f_0(x_n)) \sin 2\pi\omega_0 + P_0(f_0(x_n)) \cos 2\pi\omega_0] \sin 2\pi\omega_0 n \}. \end{aligned}$$

Вместо динамической переменной  $x$  введем переменную  $y$ , определив ее следующим образом:

$$y_n = \alpha x_{2n}, \quad (5)$$

где  $\alpha = -2.5029\dots$  – константа Фейгенбаума [4–6]. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \alpha f_0(f_0(y_n/\alpha)) + \alpha \varepsilon \{ [f_0'(f_0(y_n/\alpha)) Q_0(y_n/\alpha) + Q_0(f_0(y_n/\alpha)) \cos 2\pi\omega_0 + \\ &+ P_0(f_0(y_n/\alpha)) \sin 2\pi\omega_0] \cos 2\pi(2\omega_0)n + [f_0'(f_0(y_n/\alpha)) P_0(y_n/\alpha) - Q_0(f_0(y_n/\alpha)) \sin 2\pi\omega_0 + \\ &+ P_0(f_0(y_n/\alpha)) \cos 2\pi\omega_0] \sin 2\pi(2\omega_0)n \}, \end{aligned}$$

что можно переписать в следующем виде:

$$y_{n+1} = f_1(y_n) + \varepsilon[Q_1(y_n) \cos 2\pi\omega_1 n + P_1(y_n) \sin 2\pi\omega_1 n]. \quad (6)$$

Полученное новое отображение (6) имеет такой же вид, как и отображение (4), но с новыми функциями  $f_1$ ,  $Q_1$ ,  $P_1$  и новым параметром частоты воздействия  $\omega_1$

$$f_1(y) = D^\wedge f_0(y) = \alpha f_0(f_0(y/\alpha)),$$

$$Q_1(y) = \alpha[f_0'(f_0(y/\alpha)) Q_0(y/\alpha) + Q_0(f_0(y/\alpha)) \cos 2\pi\omega_0 + P_0(f_0(y/\alpha)) \sin 2\pi\omega_0], \quad (7)$$

$$P_1(y) = \alpha[f_0'(f_0(y/\alpha)) P_0(y/\alpha) - Q_0(f_0(y/\alpha)) \sin 2\pi\omega_0 + P_0(f_0(y/\alpha)) \cos 2\pi\omega_0],$$

$$\omega_1 = 2\omega(\text{mod } 1).$$

Повторяя описанную процедуру многократно, приходим к рекуррентным уравнениям РГ, связывающим  $\{f_{n+1}, Q_{n+1}, P_{n+1}, \omega_{n+1}\}$  с  $\{f_n, Q_n, P_n, \omega_n\}$ . Если отображение  $f_0(y)$  соответствует точке накопления бифуркаций удвоения периода, то, согласно [4–6], имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D^{\wedge m} f_0(y) = g(y),$$

где  $g(y)$  – функция Фейгенбаума, удовлетворяющая функциональному уравнению

$$g(y) = \alpha g(g(y/\alpha)).$$

Далее, вместо  $Q$  и  $P$  введем комплекснозначную функцию  $Z(y) = Q(y) + iP(y)$ . Тогда окончательно получаем

$$Z_{n+1}(y) = L^\wedge(\omega_n)[Z_n(y)], \quad (8)$$

$$\omega_{n+1} = 2\omega_n(\text{mod } 1), \quad (9)$$

где линейный оператор  $L^\wedge(\omega)$  определен соотношением

$$L^\wedge(\omega)[Z(y)] = [\alpha(g'(g(y/\alpha)) Z(y/\alpha) + Z(g(y/\alpha))) \exp(-2\pi\omega i)]. \quad (10)$$

Рассмотрим случай, когда  $\omega$  является рациональным числом, представимым с помощью периодической двоичной дроби периода  $m$ . В этом случае исходное значение  $\omega$  воспроизводится после  $m$ -кратного применения РГ преобразования:  $\omega_m = 2^m \omega_0(\text{mod } 1) = \omega_0$ . Целесообразно получить РГ уравнение, которое связывало бы перенормированные функции  $Z_n(y)$  и  $Z_{n+m}(y)$ , определяющие эволюцию системы соответственно за  $2^n$  и  $2^{n+m}$  временных шагов.

Это уравнение имеет вид

$$Z_{n+m}(y) = W^\wedge[Z_n(y)], \quad (11)$$

где

$$W^\wedge = L^{\wedge m}. \quad (12)$$

Далее будет показано, что собственные числа оператора  $W^\wedge$ , превышающие по модулю единицу, ответственны за существование в пространстве параметров самоподобных структур вблизи точки  $\lambda = \lambda_c$ ,  $\varepsilon = 0$ .

Чтобы найти численно наибольшее по модулю собственное число оператора, использовался алгоритм, в котором функция  $Z_n(y)$  представлялась в виде разложения в ряд Тейлора до двадцатого члена включительно. По произвольной «затравочной» функции  $Z_0(y)$  осуществлялось преобразование (10) и вычислялись коэффициенты разложения в ряд Тейлора функции  $Z_m(y)$ . Затем процедура

повторялась, и по функции  $Z_m(y)$  определялись коэффициенты разложения функции  $Z_{2m}(y)$  и т. д. Собственное число  $\beta$  линейного оператора  $W^\wedge$  вычислялось как отношение

$$\beta = Z_{(N+1)m}(0)/Z_{Nm}(0), \quad (13)$$

когда оно стабилизировалось при увеличении  $m$ .

Были получены следующие результаты:

- а) для  $\omega_0=1/3$  (период двоичного представления  $m=2$ )  $\beta=58.96056\dots$ ;
- б) для  $\omega_0=1/5$  (период двоичного представления  $m=4$ )  $\beta=2306.0605\dots$ ;
- в) для  $\omega_0=1/7$  (период двоичного представления  $m=4$ )  $\beta=296.27854e^{i0.54925}$ .

На основании описанной процедуры помимо собственных чисел вычислялись также и соответствующие собственные функции оператора  $W^\wedge$ .

## 2. Свойства скейлинга

Обсудим взаимосвязь между собственными числами линейного оператора  $W^\wedge$  и свойствами скейлинга пространства параметров отображения (4).

Пусть  $v_1, v_2, \dots$  – собственные числа оператора  $W^\wedge$ , а  $\{h_k(y)\exp(i\varphi_k(y))\}_{k=1,2,\dots}$  – его собственные функции. Предположим, что начальное возмущение  $Z_0$  имеет вид линейной комбинации собственных функций оператора  $W^\wedge$

$$Z_0(y) = \sum_k c_k h_k(y) \exp(i\varphi_k(y)). \quad (14)$$

Поскольку при действии  $W^\wedge$  каждый член суммы умножается на соответствующее собственное число, имеем

$$Z_{Nm}(y) = W^{\wedge N}[Z_0(y)] = \sum_k v_k^N c_k h_k(y) \exp(i\varphi_k(y)). \quad (15)$$

При  $N \rightarrow \infty$  превалирующим станет член ряда, отвечающий наибольшему по модулю собственному числу  $v_1 = \beta$ . Таким образом, можно положить

$$Z_{Nm}(y) \approx c_1 \beta^N h_1(y) \exp(i\varphi_1(y)). \quad (16)$$

Возвращаясь к функциям  $Q(y)$  и  $P(y)$ , перепишем (16) в виде

$$Q_{Nm}(y) \approx c_1 |\beta|^N h_1(y) \cos(\varphi_1(y) + N \arg \beta), \quad (17)$$

$$P_{Nm}(y) \approx c_1 |\beta|^N h_1(y) \sin(\varphi_1(y) + N \arg \beta). \quad (18)$$

Применив к отображению (4)  $Nm$  раз процедуру, описанную в разделе 1 (что соответствует действию оператора  $W^{\wedge N}$  на  $Q_0(y) + iP_0(y)$ ) и пронормировав переменные, получим отображение следующего вида:

$$y_{n+1} = g(y_n) + \epsilon [Q_{Nm}(y_n) \cos 2\pi \omega_{Nm} n + P_{Nm}(y_n) \sin 2\pi \omega_{Nm} n] \quad (19)$$

или, учитывая (17) и (18),

$$y_{n+1} = g(y_n) + c_1 \epsilon |\beta|^N h_1(y_n) \cos(2\pi \omega_0 n - \varphi_1(y_n) - N \arg \beta). \quad (20)$$

Выполнив еще  $m$  шагов ренормпреобразования и вновь пронормировав переменные, получим

$$y_{n+1} = g(y_n) + c_1 \epsilon' |\beta|^N h_1(y_n) \cos(2\pi \omega_0 n - \varphi_1'(y_n) - N \arg \beta), \quad (21)$$

где

$$\epsilon' = \epsilon \beta, \quad (22)$$

$$\varphi' = \varphi + \arg\beta. \quad (23)$$

Два последних рекуррентных уравнения совпадают с точностью до замены  $\epsilon'$  на  $\epsilon$  и  $\varphi'$  на  $\varphi$ . Следовательно, конфигурация областей в пространстве параметров  $(\lambda, \epsilon_1, \epsilon_2)$ , где  $\epsilon_1 = \epsilon \cos\varphi$ ,  $\epsilon_2 = -\epsilon \sin\varphi$ , переходит в себя при повороте вокруг оси  $\lambda$  на угол  $\arg\beta$  и при изменении масштаба относительно точки  $(\lambda_c, 0, 0)$  в  $\beta$  раз по оси  $\epsilon$  и, как можно показать, в  $\delta^n$  раз по оси  $\lambda$ .

В заключение данного раздела рассмотрим вопрос о том, как изменяется при РГ преобразовании ляпуновский характеристический показатель, определяемый соотношением

$$\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N \ln |\partial x_N / \partial x_0|). \quad (24)$$

Для этого вернемся к исходному рекуррентному уравнению (4) и произведем  $m$  шагов ренормпреобразования. Пронормировав переменные, получим

$$y_{n+1} = g(y_n) + \epsilon [Q_m(y_n) \cos 2\pi\omega_m n + P_m(y_n) \sin 2\pi\omega_m n], \quad (25)$$

$$\omega_m = 2^m \omega_0 \pmod{1} = \omega_0.$$

Найдем связь между показателем Ляпунова  $\gamma'$ , вычисленным для отображения (25), и показателем  $\gamma$ , рассчитанным для (4). Заметим, что если  $\gamma$  вычислялся при  $\epsilon = \epsilon_0$ ,  $\lambda = \lambda_0$ , то  $\gamma'$  следует вычислять при

$$\epsilon = \epsilon_0 / \beta, \quad (26)$$

$$\lambda = \lambda_c + (\lambda_0 - \lambda_c) / \beta.$$

Предположим, что имеется цикл периода  $N$ . В соответствии с использованным правилом пересчета масштабов, после  $m$  шагов преобразования РГ имеем

$$y_N = \alpha^m x_{2^m N}.$$

По определению показателя Ляпунова

$$\begin{aligned} \gamma' &= (1/N) \ln |\partial y_N / \partial y_0| = (1/N) \ln \left| \frac{\alpha^m}{\alpha^m} \cdot \frac{\partial x_{2^m N}}{\partial x_0} \right| = \\ &= (1/N) \ln |\partial x_{2^m N} / \partial x_{2^m-1N} \cdot \partial x_{2^m-1N} / \partial x_{2^m-2N} \cdot \dots \cdot \partial x_N / \partial x_0|. \end{aligned}$$

Так как рассматривается цикл периода  $N$ , то

$$\partial x_{2^m N} / \partial x_{2^m-1N} = \partial x_{2^m-1N} / \partial x_{2^m-2N} = \dots = \partial x_N / \partial x_0$$

и, следовательно,

$$\gamma' = (1/N) \ln |\partial x_N / \partial x_0|^{2^m} = 2^m (1/N) \ln |\partial x_N / \partial x_0| = 2^m \gamma.$$

Итак, формула для пересчета показателя Ляпунова имеет вид

$$\gamma' = 2^m \gamma. \quad (27)$$

Можно показать, что это соотношение остается справедливым, если два рассматриваемые режима, получаемые друг из друга посредством РГ преобразования (26), не являются периодическими.

### 3. Методика проверки свойств скейлинга

На рис. а-г показаны карты динамических режимов модели (3) на плоскости параметров  $(\lambda, \epsilon)$  для  $\omega = 1/3$  (а, б) и  $1/5$  (в, г). На этих картах различными цветами

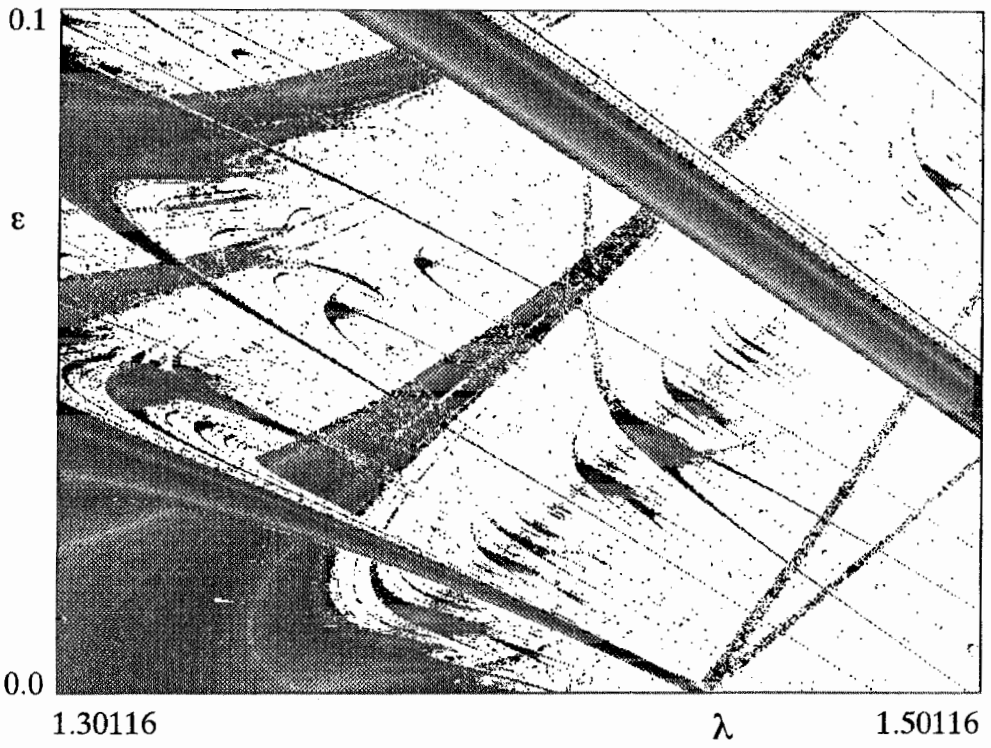


Рис. а

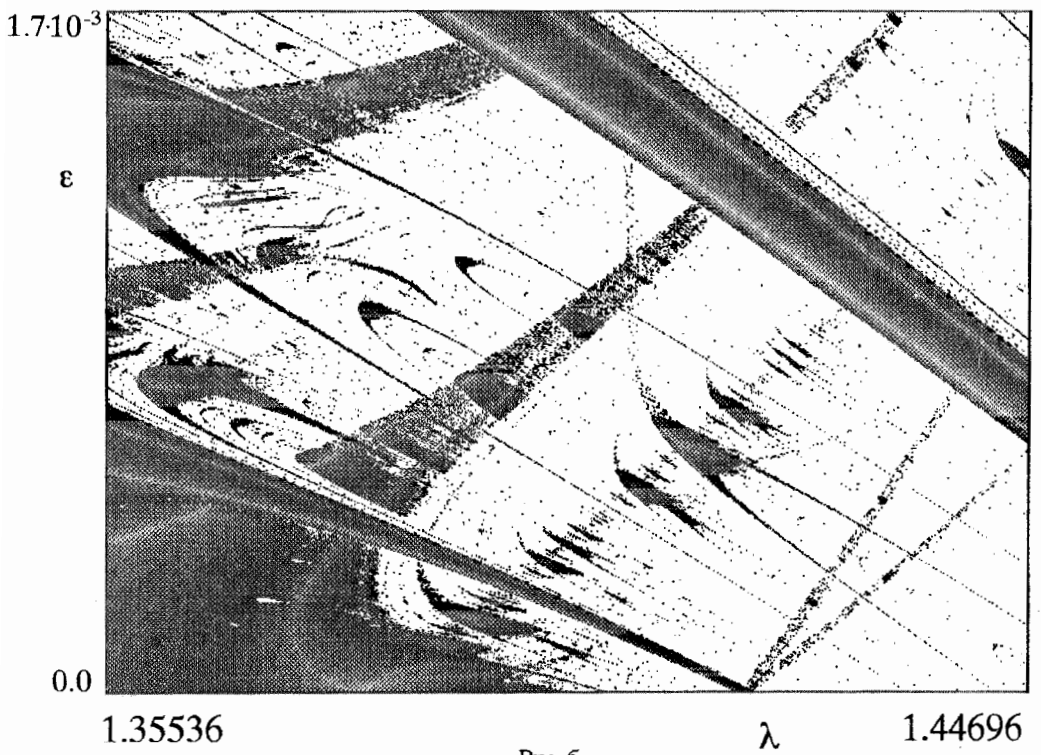


Рис. б

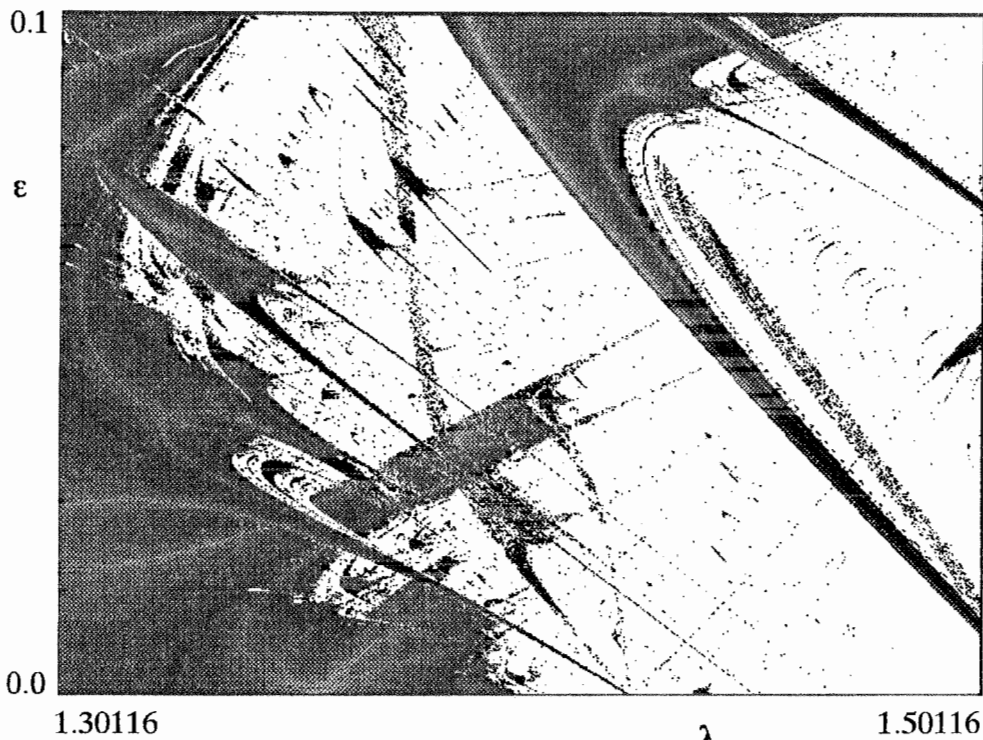


Рис. 6

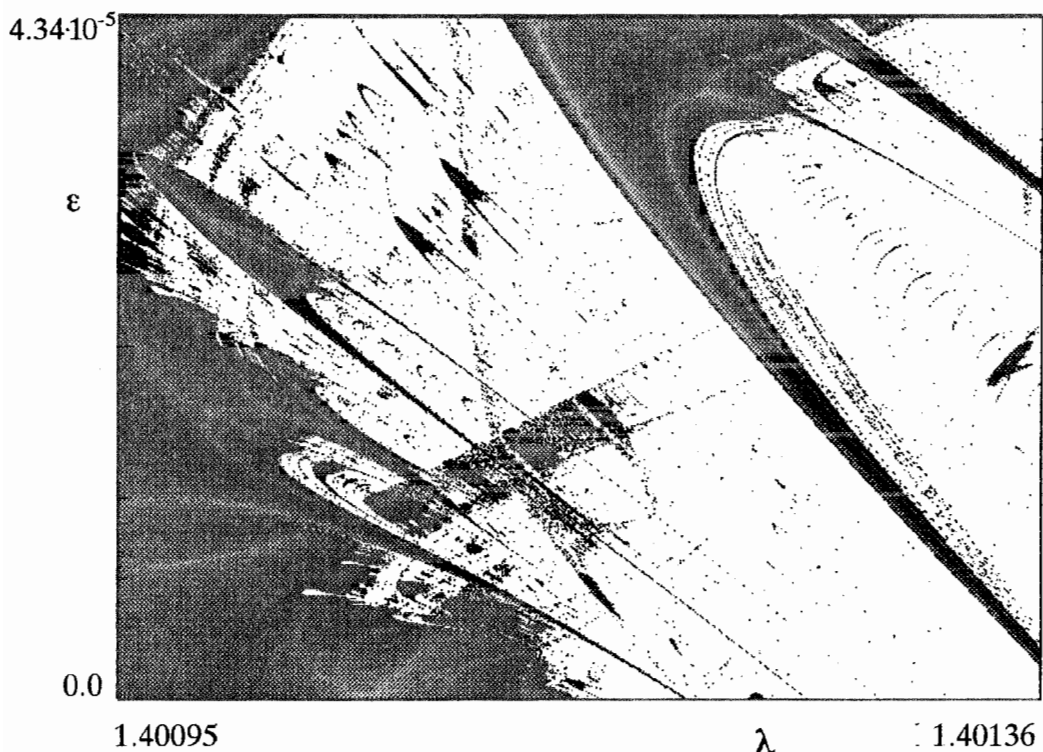


Рис. 2

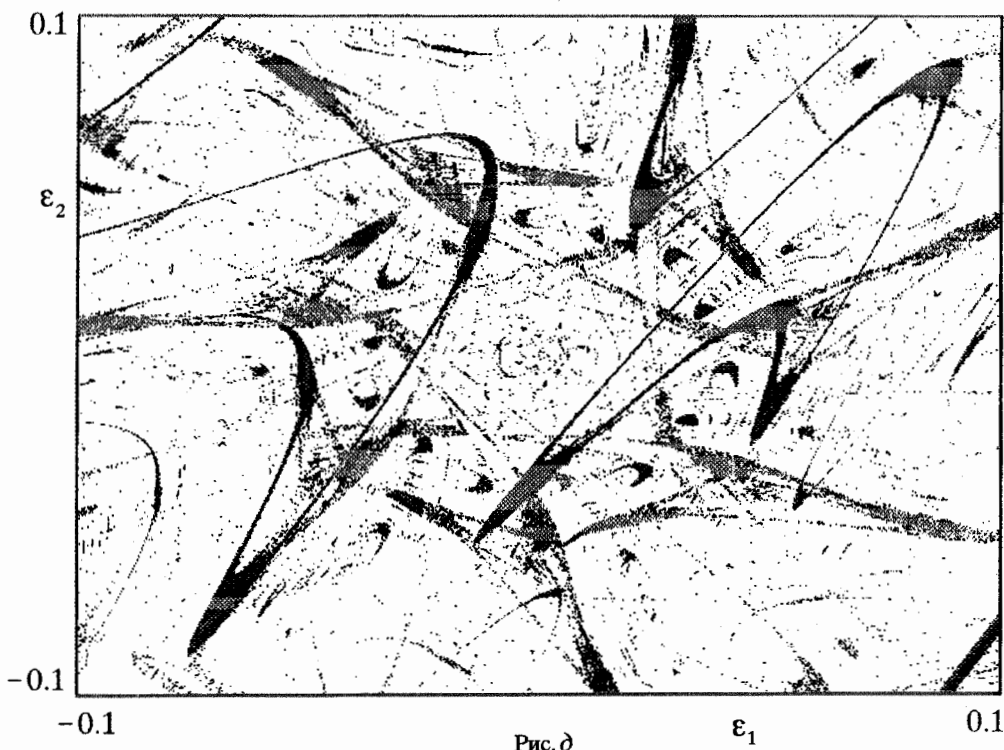


Рис. д

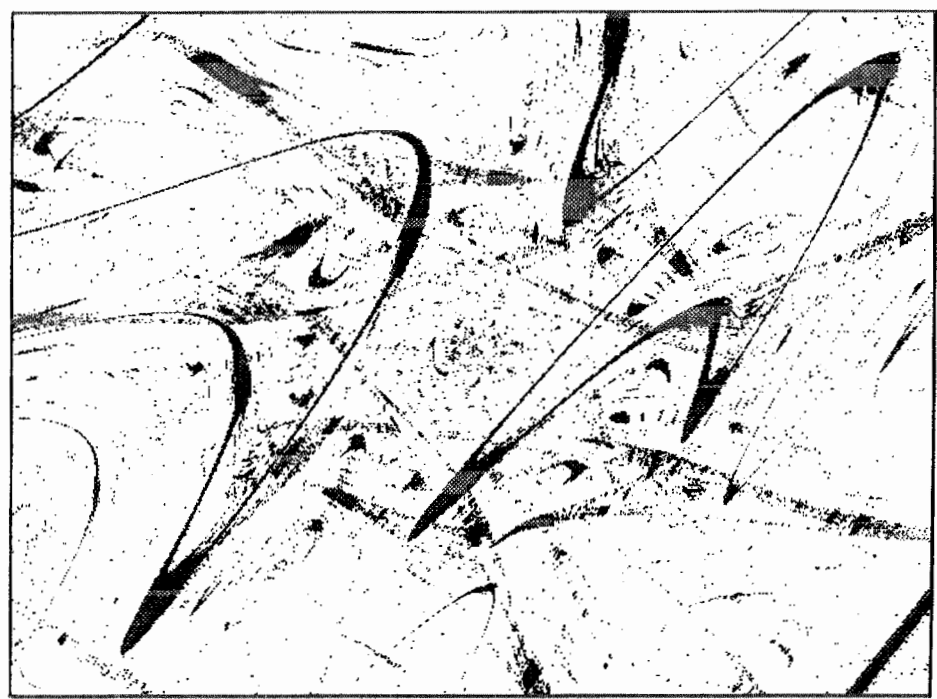


Рис. е



закодирована величина показателя Ляпунова. Белый цвет соответствует положительным  $\gamma$  – области хаоса. Черный цвет отвечает  $\gamma=0$  – порог бифуркаций. Плавный переход от черного цвета к светлосерому соответствует изменению  $\gamma$  от нуля до минус бесконечности. Поскольку частота воздействия рациональна, отрицательным значениям  $\gamma$ , очевидно, соответствуют устойчивые циклы различных периодов.

Для иллюстрации свойств скейлинга карта динамических режимов отображения (3) воспроизводится на рис. б и рис. г с изменением масштаба относительно точки  $(\lambda_c, 0)$  в  $\beta$  раз по оси  $\epsilon$  и в  $\delta^n$  раз по оси  $\lambda$ . Напомним, что при  $\omega=1/3$  и  $1/5$  собственное число  $\beta$  оказалось действительным. При этом, правила кодирования ляпуновского показателя цветом применялись в соответствии с (27). Сравнивая карты режимов на рис. а, б и на рис. в, г можно наглядно видеть ожидавшийся скейлинг.

Для  $\omega=1/7$  параметр  $\beta$  оказался комплексным. Чтобы проиллюстрировать скейлинг в этом случае, на рис. д показано сечение пространства параметров плоскостью  $\lambda=\lambda_c$ . На рис. е произведено изменение масштабов в  $|\beta|$  раз по осям координат и поворот вокруг оси  $\lambda$  на угол  $\arg\beta$ . Видно, что карта режимов в уменьшенном масштабе с замечательной точностью воспроизводит исходную.

### Заключение

К исследованию свойств логистического отображения под внешним периодическим воздействием применен ренормгрупповой анализ. Показано, что для рациональных частот воздействия, представимых периодическими двоичными дробями, пространство параметров модели обладает свойством самоподобия вблизи критической точки – точки накопления удвоенный периода при нулевой амплитуде внешней силы. Для нескольких значений частоты воздействия построены сечения пространства параметров и продемонстрировано наличие структур, обладающих свойствами самоподобия (скейлинга) вблизи критической точки.

Полученные результаты остаются в силе, если заменить логистическое отображение другим, переводящим некоторый отрезок оси  $x$  в себя и имеющим на нем единственный квадратичный экстремум. Такая универсальность обусловлена тем, что определенный в работе оператор  $W^\wedge$  и спектр его собственных чисел определяются только свойствами преобразования РГ и частотой внешнего воздействия  $\omega$  и не зависит от конкретного вида отображения (1). Вопрос о том, сохраняется ли эта универсальность в случае нелинейных диссипативных систем более общего вида, требует специального изучения.

Автор выражает благодарность С.П.Кузнецову за научное руководство и А.П.Кузнецову за обсуждение и помощь.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-02-16414).*

### Библиографический список

1. Мун Ф. Хаотические колебания. М.: Мир, 1990. С. 56.
2. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991. С. 92.
3. Abraham N.B., Gollub J.P., Swinney H.L. Testing nonlinear dynamics, review of a recent NATO Adv.Research, June 1983.
4. Feigenbaum M.J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations //J. Stat. Phys. 1978. Vol. 19, № 1. P.25.

5. Feigenbaum M.J. The universal metric properties of nonlinear transformation //J. Stat. Phys. 1979. Vol. 21, № 6. P.669.

6. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем //УФН. 1983. Т.141, № 2. С.343.

7. Arneodo A. Scaling for a periodic forcing of a period-doubling system //Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 53. P.1240.

8. Кузнецов С.П. О воздействии периодического внешнего возмущения на систему, демонстрирующую переход порядок-хаос через бифуркации удвоения периода // Письма в ЖЭТФ. Т. 39, вып.3. С.113.

9. Kuznetsov S.P., Pikovsky A.S. Renormalization group for the response function and spectrum of the period-doubling system // Physics Letters A. Vol. 140, № 4. P. 166.

10. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Критическая динамика одномерных отображений // Изв. вузов. ПНД. 1993. Т. 1, № 1,2. С. 15.

*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 5.03.97  
после переработки 18.03.97*

## THE SCALING PROPERTIES OF THE PARAMETER SPACE OF THE PERIODICALLY FORCED LOGISTIC MAP

*N.Yu. Ivankov*

The period doubling system driven by an external periodical force is investigated by (RG) renormalization group method. When the frequency of the force is rational, the parameter space is found to have self-similarity properties near the critical point with scaling factors being defined by eigenvalues of linearized RG equation.

*Иваньков Николай Юрьевич* – родился в Саратове (1977). В настоящее время студент третьего курса Колледжа прикладных наук Саратовского университета. Область научных интересов – физика нелинейных динамических систем.

