

С. П. КУЗНЕЦОВ

ХАОС: СЦЕНАРИЙ ФЕЙГЕНБАУМА И ЕГО ОБОБЩЕНИЯ

Отличительным свойством динамических систем является возможность предсказания конечного состояния системы из исходных данных. На первый взгляд, возникновение хаоса в таких системах несовместимо с их определением. И все же ...

Что общего между прыгающим по земле мячиком, лазером, планетной системой, бурлящим потоком воды в ручье, биологической популяцией? Общее в том, что все эти объекты могут рассматриваться как некоторые *динамические системы*. О динамической системе говорят, если можно указать набор величин (динамических переменных), значения которых в любой последующий момент времени получаются по определенному правилу. Это правило задает *оператор эволюции* динамической системы [1]. Например, для прыгающего мячика оператор эволюции определяется законами движения в поле тяжести и удара мячика о поверхность. Мгновенное состояние задается двумя

величинами — расстоянием от земли и скоростью. Геометрически оно изображается как точка на плоскости, где эти две величины отложены, соответственно, по оси абсцисс и ординат. Такая плоскость называется *фазовой плоскостью*. Динамике системы отвечает движение изображающей точки по некоторой определенной кривой — *фазовой траектории*.

Выделяют два класса динамических систем — консервативные (например, колебательные системы в отсутствие трения) и диссипативные. Для диссипативных систем характерно то, что их динамика, по истечении некоторого времени, перестает зависеть от начального состояния — движение становится *установившимся*.

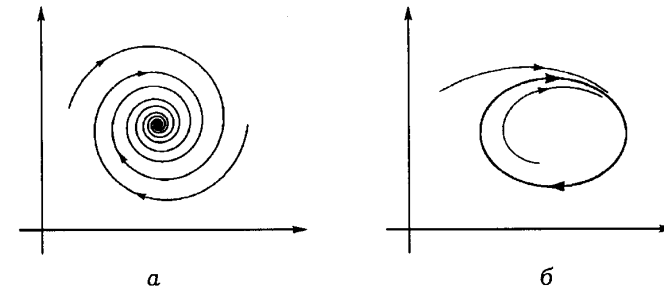


Рис. 1

Множество точек в фазовом пространстве диссипативной системы, посещаемых в установившемся режиме, называется *аттрактором*. Простые примеры аттракторов — устойчивое состояние равновесия (точка в фазовом пространстве, см. рис. 1а) и предельный цикл, отвечающий режиму периодических автоколебаний (замкнутая фазовая траектория, на которую наматываются все близкие траектории, см. рис. 1б).

Замечательным достижением теории динамических систем стало открытие хаотической динамики. Возникновение хаоса кажется на первый взгляд несовместимым с определением динамической системы, подразумевающим возможность однозначного предсказания конечного состояния по исходному. На самом деле противоречия нет. В хаотическом режиме сколь угодно малая неточность в задании начального состояния системы быстро нарастает во времени, так что

предсказуемость возможна только на малых интервалах времени. Такого рода режимы характеризуются нерегулярным, хаотическим изменением динамических переменных во времени.

Известно несколько возможных сценариев возникновения хаоса [2, 3], но в этой статье мы будем обсуждать только один из них — *сценарий Фейгенбаума*. Именно анализ этого сценария, проведенный в середине 70-х годов американским физиком Митчелом Фейгенбаумом [4, 5], ознаменовал настоящий прорыв в понимании проблемы перехода к хаосу. При этом в нелинейную динамику были привнесены концепции, которые сложились и показали себя плодотворными в других областях теоретической физики (квантовая теория поля, фазовые переходы, теория полимеров).

Сконструируем формально, подчиняясь логике основного определения, простой пример динамической

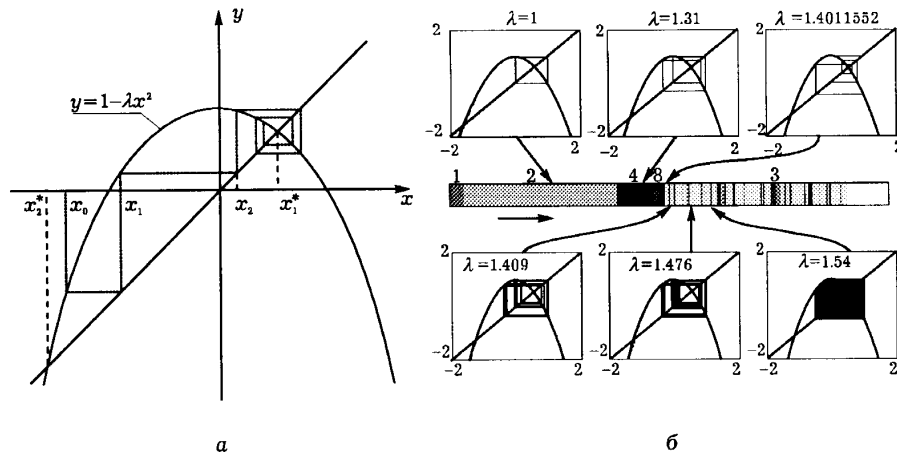


Рис. 2. Построение итерационной диаграммы, позволяющей исследовать динамику логистического отображения (а) и примеры различных режимов динамики, реализующихся в зависимости от параметра (б). Области параметра, отвечающие определенным значениям периода установившихся режимов, представлены различными оттенками серого цвета. Самый светлый оттенок отвечает хаосу, белый — расходимости, т.е. уходу динамической переменной при итерациях на бесконечность.

диссипативной системы, в котором представлен интересующий нас сценарий. Прежде всего, предположим, что рассматриваются только моменты времени, задаваемые целым числом единиц $n = 0, 1, 2, \dots$, так что это система с дискретным временем. Пусть состояние характеризуется единственной переменной x_n , где индекс указывает момент времени. Определим оператор эволюции соотношением

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad (1)$$

где λ — параметр, от величины ко-

торого зависит характер динамики. Уравнение (1) называют *логистическим отображением*. Траектория системы задается последовательностью точек на прямой $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$.

Какие режимы динамики реализуются в нашей динамической системе при значениях λ , скажем, в интервале от 0 до 2? На этот вопрос можно ответить, поэкспериментировав с уравнением (1) с помощью компьютера и получив графики, представленные на рис. 2.

Стартуя из окрестности начала координат, можно убедиться, что при

малых λ последовательность x_n , порождаемая уравнением (1), приближается к неподвижной точке x_2^* , которая, следовательно, и служит аттрактором. Она находится из условия $x = f(x)$, где $f(x) = 1 - \lambda x^2$, как один из корней квадратного уравнения. Второй корень x_2^* отвечает «репеллеру» — неустойчивой точке (см. рис. 2а). Из рассмотрения итерационной диаграммы видно, что неподвижная точка остается устойчивой (притягивающей), пока вычисленная в ней производная $f'(x)$ по абсолютной величине меньше единицы. С ростом параметра, при $\lambda = 0,75$ достигается ситуация, когда $f'(x) = -1$, и с этого момента аттрактором становится цикл периода 2, т.е. траектория системы, состоящая из 2-х точек, которой соответствует чередование двух значений переменной: $\dots, x_1, x_2, x_1, x_2, \dots$, см. рис. 2б. В этом случае говорят, что произошла *бифуркация удвоения* неподвижной точки.

Задача: Рассмотрите систему уравнений $x_2 = f(x_1)$ и $x_1 = f(x_2)$ и найдите в явном виде выражения для x_1 и x_2 через параметр λ .

Этот цикл, в свою очередь, теряет устойчивость при $\lambda = 1,25$, когда $[f(f(x_1))]' = f'(x_1)f'(x_2) = -1$. Устойчивым становится цикл периода 4 и т.д. (см. рис. 2б).

Рассмотрим теперь крайний случай $\lambda = 2$ и представим уравнение (1)

в альтернативной записи, выразив x_n через x_{n+1} :

$$x_n = \pm \sqrt{\frac{1 - x_{n+1}}{2}}. \quad (2)$$

При этом имеется два возможных значения квадратного корня, отвечающих расположению x_n на левом или правом склоне параболы.

Заддим последовательность знаков посредством случайных испытаний, скажем, бросанием монеты, и используем ее при итерациях «в обратном времени» по формуле (2). Из уравнения видно, что если исходное значение x_{n+1} по абсолютной величине меньше 1, то это справедливо и для x_n , поэтому мы никогда не столкнемся с ситуацией корня из отрицательного числа. (Это ключевой момент, из-за которого все рассуждение годится при $\lambda = 2$ и не проходит при $\lambda < 2$.) Следовательно, *существует такая порождаемая логистическим отображением последовательность x_n , у которой порядок посещения левого или правого склона параболы воспроизводит нашу случайную последовательность знаков, полученную бросанием монеты*. Вот он, хаос!

Итак, при малом λ имеем устойчивую неподвижную точку, а при $\lambda = 2$ — хаос. Естественно спросить, как он возникает при плавном увеличении λ от 0 до 2?

На рис. 3 показана полученная с помощью компьютера *бифуркацион-*



ная диаграмма («бифуркационное дерево»). Для ее построения выберем малый шаг по параметру и для каждого λ производим достаточно большое число итераций отображения (1) до выхода на аттрактор, а затем получаемые значения x откладываем на графике. Из рисунка хорошо видно, что переходу к хаосу предшествует последовательность бифуркаций удвоения периода — моментов, когда каждая ветвь «дерева» расщепляется на две. При достаточно больших λ наблюдается хаос — соответствующие области выглядят как более или менее равномерно заполненные точками участки «кроны».

В таблице 1 приведены найденные численно с высокой точностью точки бифуркаций удвоения периода. Фейгенбаум заметил, что интервал по параметру между последовательными бифуркациями уменьшается с ростом их номера так, что отношение $(\lambda_k - \lambda_{k-1})/(\lambda_{k+1} - \lambda_k)$ стремится к константе $\delta = 4,669\dots$ (проверьте!). Иными словами, последовательность значений λ_k сходится по закону геометрической прогрессии. Предел этой последовательности будем называть критической точкой Фейгенбаума: $\lambda_c = 1,401155189092\dots$. Как будет видно из дальнейшего, в определенном смысле эта точка является границей хаоса. Следующим замечательным наблюдением Фейгенбаума было то, что эта же константа 4,669... появляется и в других

одномерных отображениях, демонстрирующих каскад удвоений периода, например, $x_{n+1} = \lambda \sin x_n$. Это уже интригующий факт, требующий объяснения. Оно достигается привлечением метода ренормализационной группы (РГ), к изложению которого мы теперь переходим.

Уравнение (1) $x_{n+1} = f(x_n)$, $f(x) = 1 - \lambda x^2$ определяет оператор эволюции нашей динамической системы за один временной шаг. Если рассмотрим два шага, то имеем, очевидно, $x_{n+2} = f(f(x_n)) = 1 - \lambda(1 - \lambda x_n^2)^2$. Введем вместо x новую переменную, отличающуюся от старой только постоянным множителем α_0 . Этот множитель подберем так, чтобы функция, задающая оператор эволюции за два шага, была равна в начале координат единице. Заменяя в левой и правой частях уравнения x на x/α_0 , запишем результат в виде $x_{n+2} = f_1(x_n)$, где $f_1(x_n) = \alpha_0 f(f(x/\alpha_0))$, $\alpha_0 = 1/f(f(0)) = 1 - \lambda$. Теперь примем за исходную функцию $f_1(x)$ и произведем над ней те же действия. Получится перенормированный оператор эволюции за четыре шага: $x_{n+4} = f_2(x_n)$, где $f_2(x) = \alpha_1 f_1(f_1(x/\alpha_1))$, $\alpha_1 = 1/f_1(f_1(0))$. Далее эту процедуру можно повторять снова и снова, что приводит к рекуррентному уравнению

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= \alpha_k f_k(f_k(x/\alpha_k)) \\ \alpha_k &= 1/f_k(f_k(0)). \end{aligned} \quad (3)$$

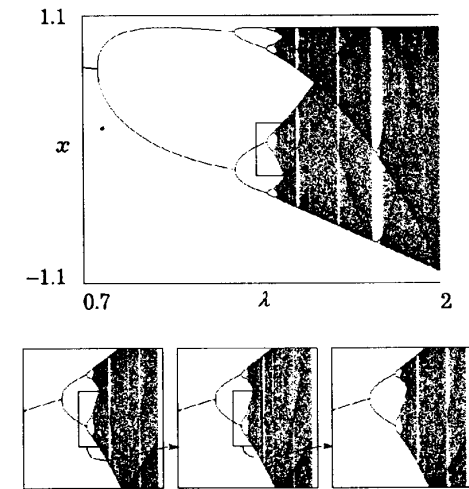


Рис. 3. Бифуркационное дерево — диаграмма, показывающая, какие значения переменной x преобладают в установившемся режиме динамики логистического отображения в зависимости от параметра. «Ствол» и «ветви» дерева отвечают периодическим режимам, а «крона» — хаосу. Внизу иллюстрируется свойство скейлинга (масштабного подобия): прямоугольный фрагмент с центром в точке $(\lambda_c, 0)$ воспроизводит свой вид при пересчете масштаба на фактор $\delta = 4,669\dots$ по горизонтальной оси и $\alpha = -2,502\dots$ по вертикальной. (Знак минус соответствует тому, что кроме пересчета масштаба изображение еще и переворачивается)

Это и есть уравнение РГ. Смысл его в том, что оно выражает оператор эволюции за 2^{k+1} шагов через оператор за 2^k шагов, причем для каждого оператора динамическая переменная имеет свой масштабный множитель.

Возьмем начальную функцию $f(x) = 1 - \lambda x^2$ и рассмотрим значения параметра λ немного меньшее, равное и немного большее критического λ_c . Как будет вес-

ти себя в каждом из этих случаев порождаяемая уравнением (3) последовательность функций? Можно написать программу для компьютера, которая строила бы графики функций $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, \dots . На рис. 4а показано, как они выглядят. При $\lambda < \lambda_c$ график становится от шага к шагу все более пологим, а при $\lambda > \lambda_c$ — все более крутым. Если же $\lambda = \lambda_c$, то форма кривой на графике стабилизируется после

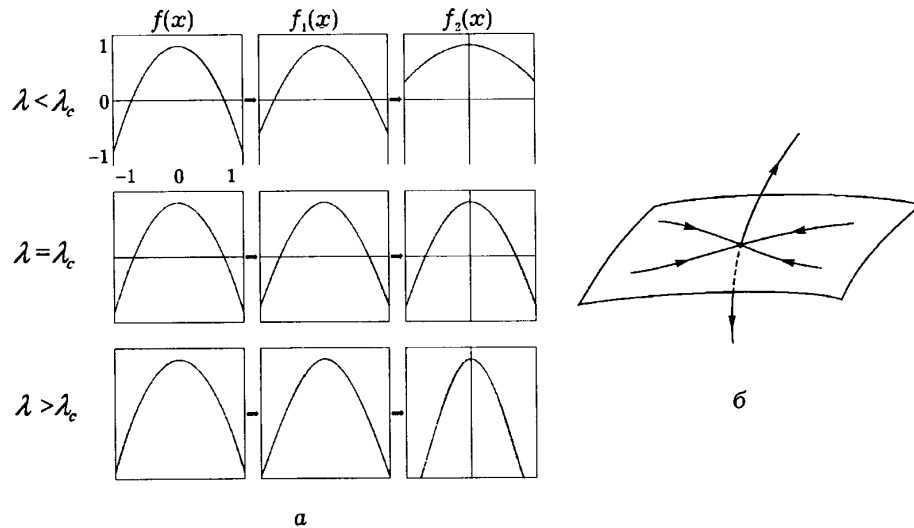


Рис. 4. Действие РГ преобразования (3) на функцию $f(x) = 1 - \lambda x^2$ при значении параметра меньшем, равном и большем критического $\lambda_c = 1,401155 \dots$ — графики функций $f_k(x)$ (а); качественная картинка, иллюстрирующая действие РГ преобразования вблизи его седловой неподвижной точки в пространстве функций (б)

первых шагов РГ преобразования и более не меняется. Иными словами, при больших значениях индекса k функции $f_k(x)$ перестают от него зависеть, и существует определенный предел: $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = g(x)$. Тогда из формулы (3) очевидно, что для функции $g(x)$ должно быть справедливо соотношение

$$g(x) = \alpha g(g(x/\alpha)), \tag{4}$$

называемое *уравнением Фейгенбау-*

ма - Цвитановича, и при этом

$$g(0) = 1 \quad \text{и} \quad \alpha = 1/g(g(0)). \tag{5}$$

Заметим, что функция $g(x)$ должна иметь при $x = 0$ квадратичный экстремум, ибо он присутствует у всех функций $f_k(x)$. С учетом этого условия, решение уравнения (4) оказывается единственным. Его можно найти так. Функцию $g(x)$ представим в виде ряда Тейлора, содержащего четные степени x . Тогда соотношения (4), (5) сводятся к системе нелинейных алгебраических уравнений для коэффици-

ентов разложения, которая решается численно. Фейгенбаум приводит результат — представление функции g для $|x| \leq 1$ с точностью до десятого знака после запятой:

$$\begin{aligned} g(x) = & 1 - 1,527632997x^2 + \\ & + 0,1048151943x^4 + 0,0267056735x^6 - \\ & - 0,0035274139x^8 + \tag{6} \\ & + 0,0000815819x^{10} + 0,0000253684x^{12} - \\ & - 0,0000026878x^{14}. \end{aligned}$$

Масштабная константа оказывается равной

$$\begin{aligned} \alpha = 1/g(x) = \alpha = \\ = -2,50290787509589282 \dots \tag{7} \end{aligned}$$

Подчеркнем, что в формулах (4) и (5) присутствует только функция g и не содержится никакого воспоминания о конкретной форме исходного отображения! Это значит, что функция $g(x)$ *универсальна* — ее вид обусловлен лишь структурой операции РГ, привязанной именно к изучению перехода к хаосу через удвоения периода (вспомним: мы следили, как меняется перенормированный оператор эволюции при последовательных удвоениях длительности рассматриваемых временных интервалов). Если в отображении, имеющем квадратичный экстремум, реализуется каскад бифуркаций удвоений периода и

существует критическая точка, то независимо от конкретного вида отображения перенормированный оператор эволюции на больших временах в критической точке будет описываться той же самой функцией g .

Попытаемся представить себе действие РГ преобразования (3), вообразив бесконечномерное пространство, где каждой точке отвечает некоторая функция $f(x)$. Преобразование (3) переводит каждую точку этого пространства в другую, и при этом точка, соответствующая $g(x)$, остается неподвижной (см. рис. 4а). Можно показать, что это точка типа *седло*: вблизи нее имеется единственное неустойчивое направление, вдоль которого возмущение нарастает при применении РГ преобразования, и гиперповерхность (устойчивое многообразие), на которой имеет место приближение к неподвижной точке (рис. 4б). Вдоль неустойчивого направления уход от неподвижной точки происходит по закону δ^k , где δ — некоторая константа. Она получается из уравнения, форма которого определяется только универсальной функцией $g(x)$. Поэтому константа δ тоже универсальна! Найденная с высокой точностью, она составляет

$$\delta = 4,669201609102990672 \dots \tag{8}$$

Это и есть константа, характеризующая закон сходимости бифуркаций удвоения периода к критической точке, которую грубо оценил Фейгенбаум



в своих первоначальных вычислениях, давших толчок к разработке всей теории.

Обнаруженный Фейгенбаумом закон сходимости есть частное проявление важнейшего свойства — *скейлинга*. Оно заключается в том, что если рассмотреть динамические режимы, реализующиеся в окрестности критической точки размера $\Delta\lambda$, то аналогичные режимы, но с удвоенным характерным временным масштабом, будут присутствовать в меньшей окрестности размера $\Delta\lambda/\delta$, как в докритической, так и в закритической области (см. графическую иллюстрацию скейлинга на рис. 3). Мы видели, что при $\lambda = 2$ имеет место развитый хаос. Можно указать такую сходящуюся к критической точке сверху по закону Фейгенбаума последовательность значений λ , для которых аналогичный режим развитого хаоса, допускающий кодирование произвольной случайной последовательностью двух символов, имеет место у отображения, определенного за $2, 4, 8, \dots$ временных шагов (так называемые *точки Мизюревича*, см. табл. 1). Поэтому взяв сколь угодно малый интервал параметра ($\lambda_c, \lambda_c + \varepsilon$), мы непременно найдем в нем точки, где реализуется хаос. В этом смысле критическая точка служит границей хаоса. Полная же картина динамических режимов в закритической области очень сложна, содержит как хаос, так и «окна» периодических режимов. К тому

же она репродуцируется бесконечно много раз в бесконечно малой окрестности критической точки в силу свойства скейлинга!

Замечательно, что свойство универсальности распространяется не только на одномерные отображения, но и на широкий класс нелинейных диссипативных систем [2–5]. Уравнения, описывающие динамику, могут быть совершенно разными по виду и по математической природе — отображения, дифференциальные уравнения, обыкновенные или в частных производных, уравнения с запаздывающим аргументом. Если реализуется каскад бифуркаций удвоения периода, то типична ситуация, когда сходимость точек бифуркации характеризуется той же самой константой $\delta = 4,669\dots$. Остаются в силе и другие проявления универсальности, на которых мы не можем здесь остановиться из-за ограниченности объема статьи [2–5]. Таким образом, логистическое отображение приобретает новый статус: это не просто частная динамическая система, а полномочный представитель целого класса систем — *фейгенбаумовского класса универсальности*. В этом качестве логистическое отображение можно использовать как адекватную модель для описания разнообразных систем у порога перехода к хаосу, исследуя их поведение под внешним воздействием, динамику связанных систем и т. п. — даже в тех случаях, когда



точный вид уравнений неизвестен!

Теперь настал момент предупредить читателя, что утверждение об универсальности закономерностей Фейгенбаума нужно все же воспринимать с оговорками. Во-первых, как мы уже упоминали, встречаются и другие сценарии перехода к хаосу — перемежаемость, разрушение квазипериодических движений и др. Во-вторых, даже при переходе к хаосу через удвоения периода, фейгенбаумовские закономерности, хотя и представляют типичную ситуацию, не исчерпывают все возможности, если взглянуть на проблему шире.

Рассмотрим динамическую систему, содержащую более одного параметра. Ее можно представлять себе в виде «черного ящика», из которого торчат ручки настройки с делениями, задающие различные режимы динамики. Определим *пространство параметров*, в котором по осям координат отложены величины, задаваемые положением ручек настройки. В этом пространстве имеются области, отвечающие различным режимам динамики. Бифуркации удвоения периода изображаются поверхностями, разграничивающими соседние области. Каскаду удвоений периода отвечает набор бифуркационных поверхностей, которые сближаются с ростом номера бифуркации и накапливаются по закону Фейгенбаума к предельной критической поверхности. Варьируя какой-либо один параметр, мы

движемся в пространстве параметров по некоторой линии. Если она пересекает всю систему поверхностей удвоения периода и критическую поверхность, то реализуется сценарий перехода к хаосу по Фейгенбауму.

Пусть теперь мы перемещаемся в пространстве параметров по фейгенбаумовской критической поверхности. Может случиться, что мы натолкнемся на ее край, вблизи которого, по-видимому, должен реализоваться другой, не фейгенбаумовский тип критического поведения. Для этого есть две мыслимые причины. Во-первых, динамика на пороге хаоса может по-прежнему описываться одномерным отображением, но оно становится возмущенным настолько, что покидает фейгенбаумовский класс универсальности. Во-вторых, в динамику могут оказаться вовлеченными новые измерения фазового пространства, и тогда в качестве модельных систем надо использовать, как минимум, двумерные отображения. Таким образом, возникает задача поиска и классификации новых типов критического поведения, которые могут встретиться при многопараметрическом анализе перехода к хаосу. Естественно предполагать, что эти типы критичности также допускают РГ анализ. Им должны соответствовать свои значения констант, свое, универсальное для каждого типа критичности, локальное устройство пространства параметров, свое модельное ото-



бражение, играющее роль простейшего представителя данного класса универсальности.

Если обратиться к первой из названных возможностей, то допустимо по-прежнему работать с одномерными отображениями. Нефейгенбаумовским типам критичности должны отвечать просто отличные от (6) решения уравнения (3) (см. [6] и приведенные там ссылки). Это могут быть седловые точки, циклы и даже непериодические решения. В частности, были построены решения уравнения (4) в виде разложений по степеням x^4 («трикритическая ситуация», тип T , $\alpha = -1,690303$), x^6 (критичность типа S , от слова «six», $\alpha = -1,467742$), x^8 (критичность типа E , от слова «eight», $\alpha = -1,358017$). В отличие от фейгенбаумовской критичности, эти неподвижные точки уравнения РГ характеризуются наличием нескольких неустойчивых направлений. Соответственно, имеется нескольких констант δ , которые служат факторами скейлинга вдоль выбранных надлежащим образом направлений в пространстве параметров. В качестве примера в табл. 2 приводятся критические точки названных трех типов для отображения

$$x_{n+1} = 1 - Ax_n^2 - Bx_n^4 - Cx_n. \quad (9)$$

Вторая возможность подразумевает необходимость обобщения уравнения РГ на двумерные отображения. Оно выглядит достаточно просто,

если допустить существование такой системы координат (X, Y) в двумерном фазовом пространстве, что масштабный пересчет производится по правилу $X \rightarrow X/\alpha$, $Y \rightarrow Y/\beta$. Эти «скейлинговые координаты» чаще всего не совпадают с динамическими переменными, в которых записывается исходное двумерное отображение, а выражаются через них посредством некоторой замены переменных. Перенормированный оператор эволюции за 2^k шагов задается тогда парой функций:

$$\begin{aligned} X_{n+2^k} &= g_k(X_n, Y_n), \\ Y_{n+2^k} &= f_k(X_n, Y_n), \end{aligned}$$

которые удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} g_{k+1}(X, Y) &= \alpha_k g_k(g_k(X/\alpha_k, Y/\beta_k), \\ &\quad f_k(X/\alpha_k, Y/\beta_k)), \\ f_{k+1}(X, Y) &= \beta_k f_k(g_k(X/\alpha_k, Y/\beta_k), \\ &\quad f_k(X/\alpha_k, Y/\beta_k)), \\ \alpha_k &= 1/g_k(g_k(0, 0)), \\ \beta_k &= 1/f_k(f_k(0, 0)). \end{aligned} \quad (10)$$

Приведем два примера нетривиального критического поведения, описываемого неподвижными точками РГ уравнения (10) [7].

Рассмотрим систему с однонаправленной связью:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2, \\ y_{n+1} &= 1 - Ay_n^2 - Bx_n^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь имеется три параметра λ , A , B , один из которых зафиксируем, взяв произвольно $B = 0,375$. Подбирая λ и A , можно добиться, чтобы обе подсистемы одновременно оказались на пороге хаоса. Это имеет место при $\lambda = \lambda_c = 1,401155\dots$, $A = A_c = 1,124981403\dots$

Точка с координатами (λ_c, A_c) на плоскости параметров (λ, A) была названа *бикритической*. Ей соответствует такая неподвижная точка уравнения (10), что функция g зависит только от x и совпадает с функцией Фейгенбаума (6), а константа α с (7). Решение второго уравнения отыскивается в виде разложения $f(x, y)$ по четным степеням обоих аргументов, масштабная константа оказывается равной $\beta = -1,505318159\dots$

Если сместиться из неподвижной точки РГ преобразования, не нарушая условие однонаправленной связи, то, согласно результатам численных расчетов, обнаруживается ровно два неустойчивых направления. Одно из них «включается» при вариации параметра λ и ассоциируется с константой Фейгенбаума $\delta_1 = 4,669$. Другое соответствует сдвигу параметра второй подсистемы, и ему отвечает новая константа $\delta_2 = 2,39272443\dots$ На рис. 5 показана карта динамических режимов отображения (11). Структура областей многократно репродуцируется в окрестности бикритической точки, причем фактор скейлинга по горизонтальной оси дается констан-

той δ_1 , а по вертикальной — δ_2 .

Добавим в первое уравнение (11) член, описывающий обратное воздействие второй подсистемы на первую:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - Cy_n^2, \\ y_{n+1} &= 1 - Ay_n^2 - Bx_n^2. \end{aligned} \quad (12)$$

На рис. 6 показана карта динамических режимов на плоскости параметров (λ, A) при фиксированных $B = 0,375$ и $C = -0,25$. В нижней части карты можно видеть бифуркационные линии удвоения периода, накапливающиеся к фейгенбаумовской критической линии F . Двигаясь вдоль нее вверх, можно найти крайнюю точку $\lambda = \lambda_c = 1,654524590$, $A = A_c = 1,030837593$, обозначенную на рисунке FQ .

Если ввести скейлинговые переменные $X = y$, $Y = x - 1,1443y$, то получаемая из уравнений (10) последовательность пар функций сходится к определенной неподвижной точке РГ преобразования, такой, что g и f зависят от комбинаций X^2 и XY и представляются в виде разложения по их степеням. Масштабные факторы оказываются следующими: $\alpha = -1,90007167$ и $\beta = -4,00815785$.

Численные расчеты показывают, что вблизи неподвижной точки (g, f) имеется три неустойчивых направления, которым отвечают константы $\delta_1 = 6,32631925$, $\delta_2 = 3,44470967$, $\delta_3 = \alpha = -1,90007167$. Оказывается, что возмущение третьего типа не включается при вариации параметров

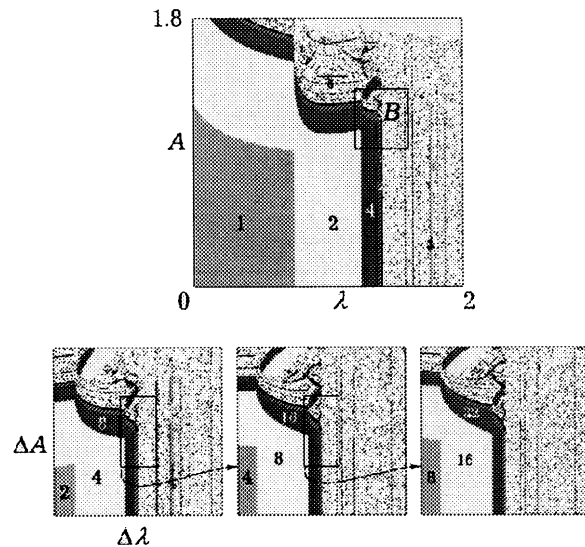


Рис. 5. Карта динамических режимов на плоскости параметров для системы двух логистических отображений с однонаправленной связью (11) при $B = 0,375$. Оттенки серого цвета обозначают период установившегося режима второй подсистемы, значения периода указаны цифрами. Самый светлый оттенок серого — хаос, белый — расходямость. Бикритическая точка отмечена буквой B . Внизу иллюстрируется свойство скейлинга: показано как выглядит окрестность бикритической точки при пересчете масштаба в $\delta_1 = 4,669 \dots$ раз по горизонтальной оси и в $\delta_2 = 2,392 \dots$ по вертикальной. Чтобы сделать проявление скейлинга более наглядным, правило кодирования оттенками серого цвета переопределяется от картинке к картинке.

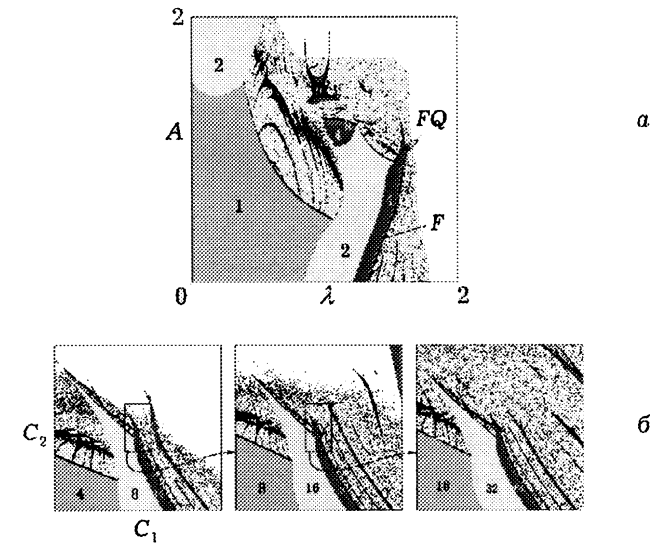


Рис. 6. Карта динамических режимов на плоскости параметров для системы связанных отображений (12) при $B = 0,375, C = -0,25$. Оттенки серого цвета обозначают период установившегося режима, значения периода указаны цифрами. Самый светлый оттенок серого — хаос, белый цвет — расходямость. Фейгенбаумовская критическая линия, обозначенная буквой F , оканчивается в критической точке FQ . Фрагмент плоскости параметров в виде маленького параллелограмма, включающего точку FQ , показан отдельно в скейлинговых координатах (C_1, C_2) : $\lambda = \lambda_c + C_1 + 0,83C_2, A = A_c + C_2$. На нижних диаграммах иллюстрируется свойство скейлинга — конфигурация областей воспроизводит себя при пересчете масштаба в $\delta_1 = 6,326 \dots$ раз по горизонтальной оси и в $\delta_2 = 3,444 \dots$ по вертикальной. Чтобы сделать проявление скейлинга более наглядным, правило кодирования оттенками серого цвета переопределяется от картинке к картинке

в уравнения (12), так что скейлинг определяется оставшимися константами α_1 и δ_2 . Для демонстрации скейлинга введем на плоскости параметров специальную систему координат: начало отсчета поместим в точку FQ , а оси направим так, чтобы сдвиг по каждой оси обеспечивал включение возмущения, связанного с определен-

ным неустойчивым направлением неподвижной точки FG . Из рис. 6б видно, что картина областей различной динамики вблизи критической точки многократно воспроизводится при пересчете масштаба на факторы δ_1 и δ_2 .

Подведем итоги нашего рассказа. Когда говорят о сценарии возникно-

вения хаоса, обычно имеют в виду картину перехода, наблюдаемую при вариации единственного управляющего параметра. Обобщение понятия сценария на многопараметрический анализ состоит в том, что в простран-

стве параметров присутствует некоторая характерная конфигурация областей различных динамических режимов, ассоциирующаяся с критической точкой определенного типа. Анализ и классификация ситуаций тако-



го рода основывается на концепциях ренормгруппы и скейлинга, впервые привнесенных в рассматриваемую область благодаря работе Фейгенбаума. Этот подход открывает замечательную возможность описания динамики систем, уравнения которых имеют совершенно различную математическую природу, с помощью модельных отображений, представляющих соответствующий класс универсальности. Открытие Фейгенбаума — лишь первый шаг в формировании широкой панорамы критических явлений, которые могут встретиться на границе порядка и хаоса.

Список литературы

[1] Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфеев Н. А. *Введение в теорию нелинейных колебаний*. М., Наука, 1976.

[2] Шустер Г. *Детерминированный хаос*. М., Мир, 1988, с. 45–82.
 [3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Гидродинамика*. М., Наука, 1986, с. 155–184.
 [4] Фейгенбаум М. *Универсальность в поведении нелинейных систем*. Успехи физических наук. 1983, т. 141, № 2, с. 343–374.
 [5] Вул Е. Б., Синай Я. Г., Ханин К. М. *Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм*. Успехи математических наук. 1984, т. 39, № 3, с. 3–37.
 [6] Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Сатаев И. Р. *Коразмерность и типичность в контексте проблемы описания перехода к хаосу через удвоения периода в диссипативных динамических системах*. Регулярная и хаотическая динамика. 1997, т. 2, № 3–4, с. 90–105.
 [7] Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Sataev I. R. *A variety of period-doubling universality classes in multi-parameter analysis of transition to chaos*. Physica D. 1997, vol. 109, p. 91–112.

Таблица 1. Значения параметра в логистическом отображении, отвечающие бифуркациям удвоения периода и точкам Мизюревича («развитый хаос»)

Номер	Бифуркация удвоения периода	Точки Мизюревича
1	0,75	2
2	1,25	1,54368901269
3	1,36809893939	1,43035763245
4	1,39404615660	1,40740511816
5	1,39963123887	1,40249217636
6	1,40082874237	1,40144149425
7	1,40108527126	1,40121650431
8	1,40114021470	1,40116832084
9	1,40115198203	1,40115800151
10	1,40115450224	1,40115579142
Предел	1,40115518909	1,40115518909

Таблица 2. Нефейгенбаумовские критические точки в пространстве параметров одномерного отображения (9)

Тип	Значения параметров и константы скейлинга
T	$A = 0, B = 1,594901356, C = 0$ $\delta_1 = 7,284686, \delta_2 = -4,829405, \delta_3 = 2,857124$
S	$A = 1,872448192, B = -1,625205284, C = 1,094016101$ $\delta_1 = 9,296246, \delta_2 = 4,640870, \delta_3 = 2,154268$
E	$A = 1,379909481, B = -0,557409701, C = 1,181821122$ $\delta_1 = 10,948624, \delta_2 = 3,401114, \delta_3 = 1,844211$